
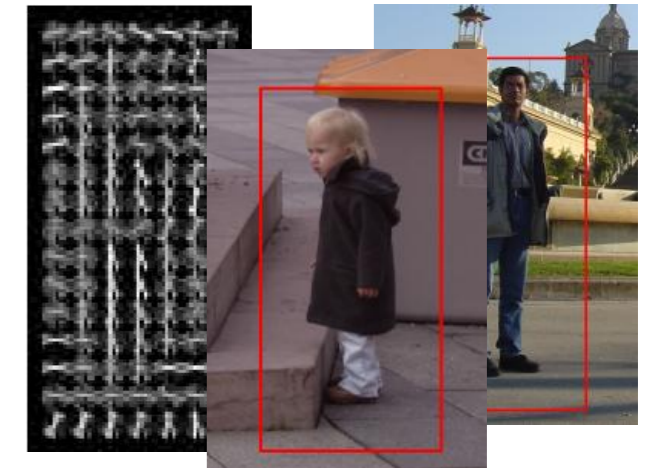
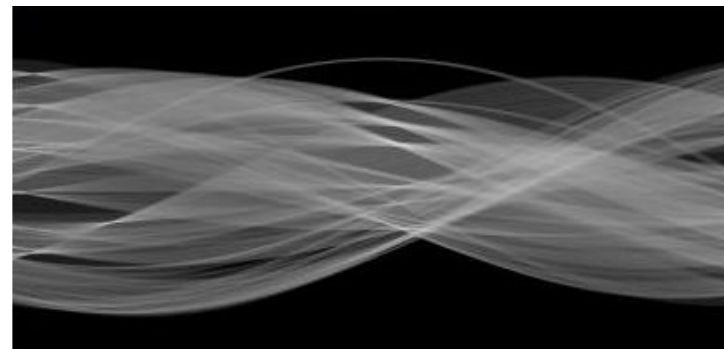
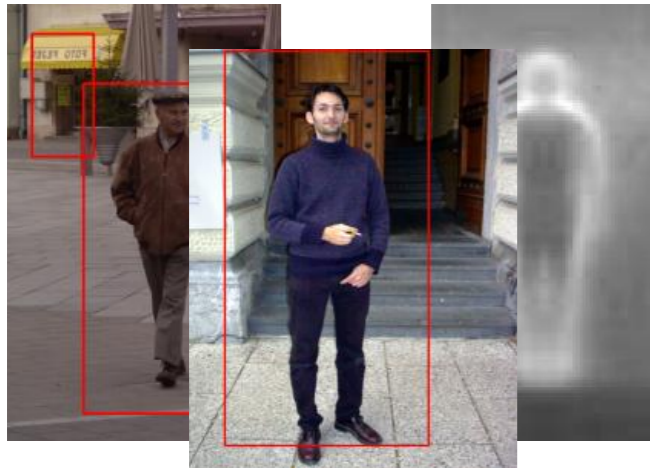


Обработка изображений в системах искусственного интеллекта

(курс лекций)

http://bit.ly/ML_IS_CV

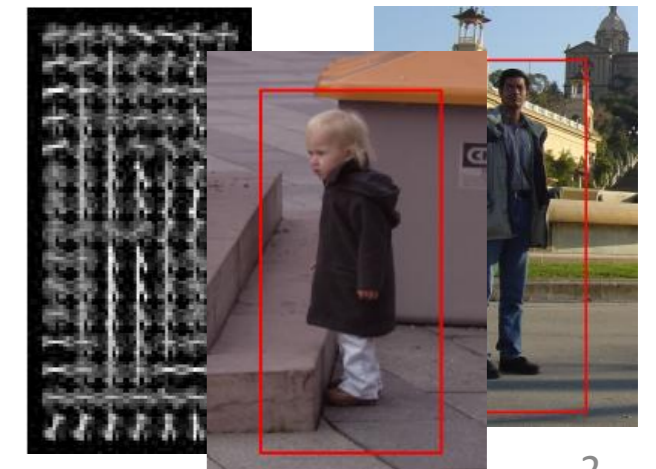
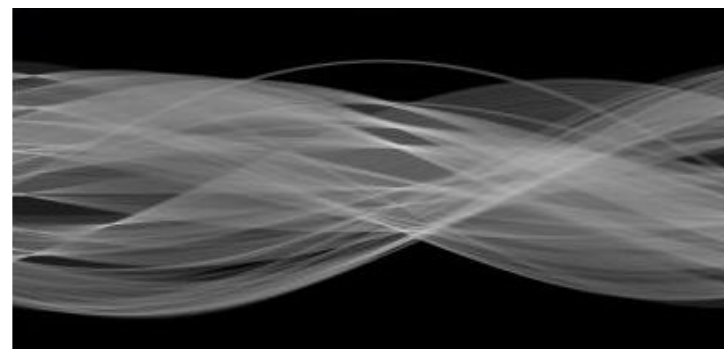
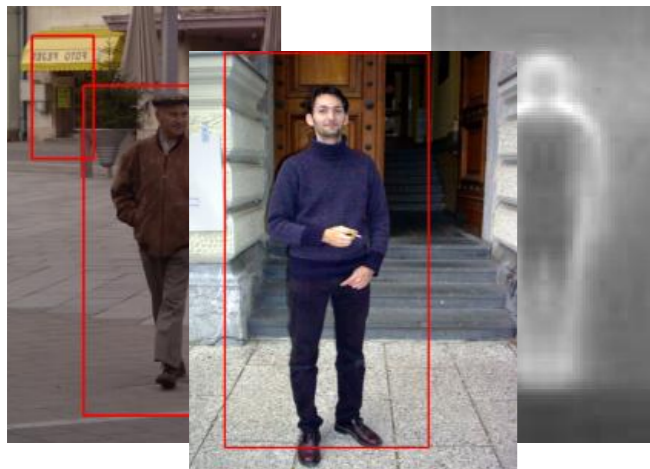
Гнеушев Александр Николаевич 



Введение в вейвлет теорию

Тема 13

20.03.2026



Интегральное вейвлет-преобразование

Функция окна позволяет локализовать особенности сигнала и в пространстве, и в частотной области, однако ширина окна $\Delta_{\hat{g}}$ не меняется на всем диапазоне частот:

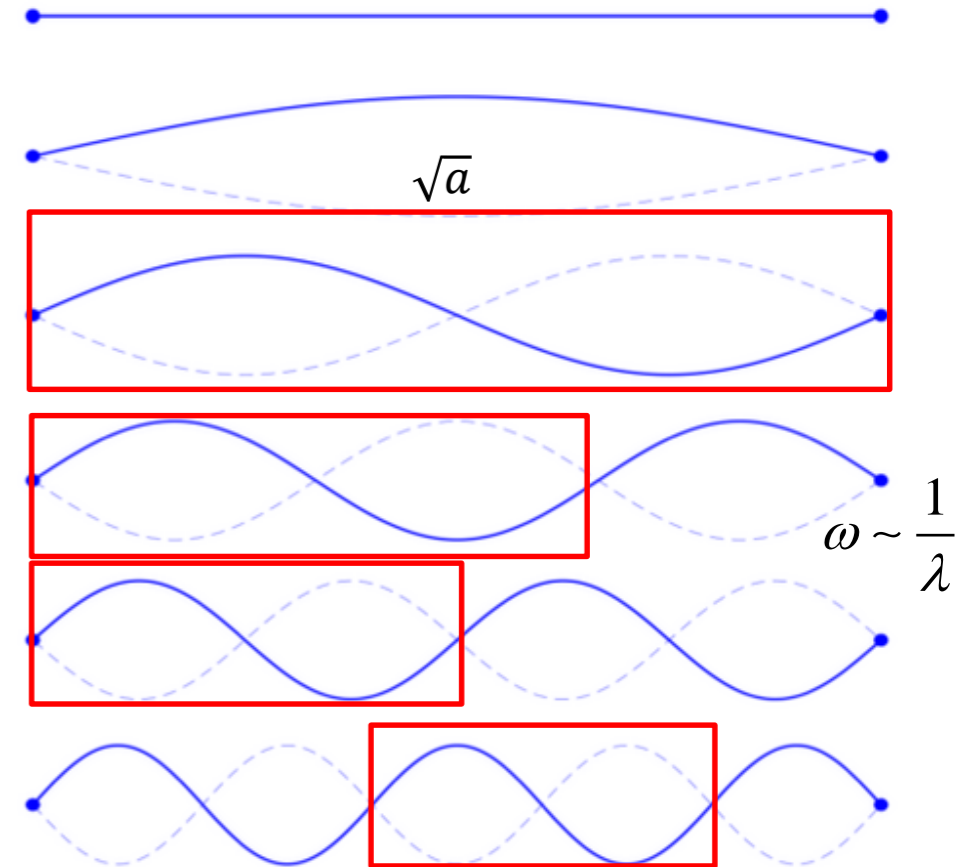
Для более точной локализации высокочастотных особенностей требуется более узкое пространственное окно, а для полного анализа низкочастотных компонент необходимо широкое пространственное окно. Следовательно, КВПФ не подходит для анализа сигналов одновременно с очень низкой и очень высокими частотами.

Например, семейство функций Габора определяется сдвигами b при фиксированном пространственном **масштабе** a :

$$G_{b,\omega}^a(x) = g_a(x-b)e^{j\omega x} = \frac{1}{2\sqrt{\pi a}} e^{-\frac{(x-b)^2}{2a}} e^{j\omega x}$$

Рассмотрим множество масштабов и введем зависимость: $\omega(a)$.

$$[\omega + \omega^* - \Delta_{\hat{g}}, \omega + \omega^* + \Delta_{\hat{g}}]$$



Интегральное вейвлет-преобразование

Функция окна позволяет локализовать особенности сигнала и в пространстве, и в частотной области, однако ширина окна $\Delta_{\hat{g}}$ не меняется на всем диапазоне частот:

Для более точной локализации высокочастотных особенностей требуется более узкое пространственное окно, а для полного анализа низкочастотных компонент необходимо широкое пространственное окно. Следовательно, КВПФ не подходит для анализа сигналов одновременно с очень низкой и очень высокими частотами.

Например, семейство функций Габора определяется сдвигами b при фиксированном пространственном масштабе a :

$$G_{b,\omega}^a(x) = g_a(x-b)e^{j\omega x} = \frac{1}{2\sqrt{\pi a}} e^{-\frac{(x-b)^2}{2a}} e^{j\omega x}$$

Рассмотрим множество масштабов и введем зависимость: $\omega(a)$.

Положим:
$$\Psi_{b,a}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right), \quad a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

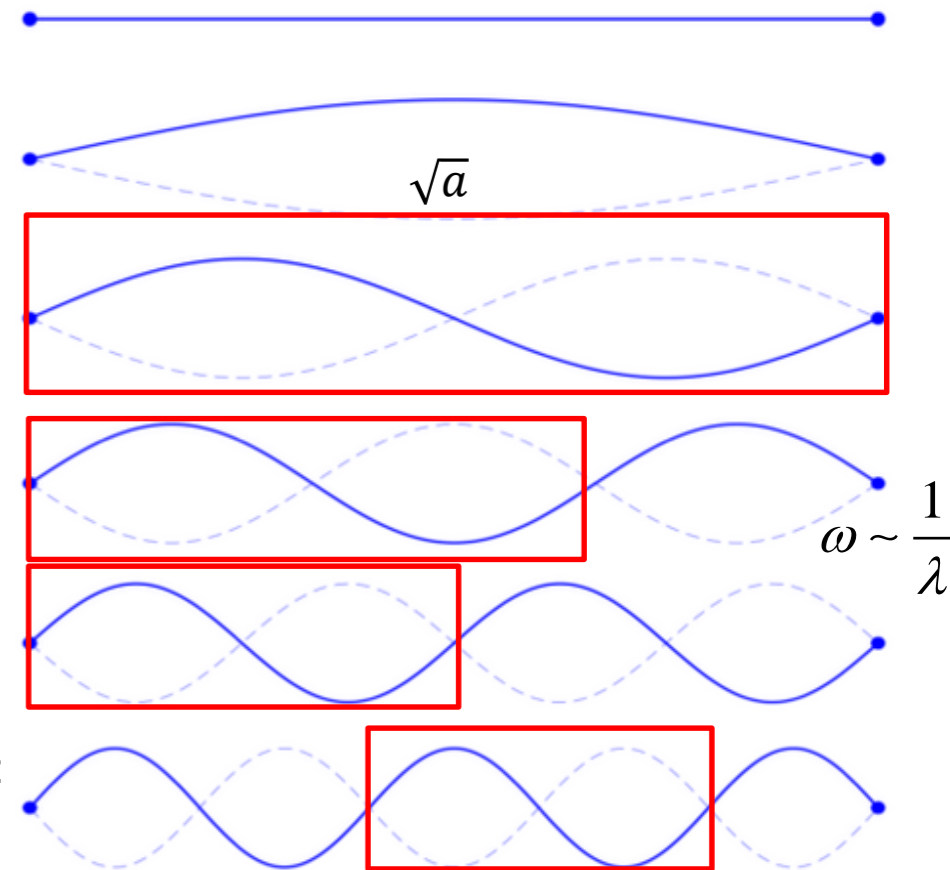
$\psi \in L^2(\mathbb{R})$ - базисный/материнский вейвлет, удовлетворяющий условию “допустимости”:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega = C_{\psi} < \infty. \quad \text{Если } x\psi(x) \in L^2(\mathbb{R}) \text{ - функция окно } \Rightarrow \hat{\psi}(x) \text{ - непрерывная функция}$$

Из условия допустимости $\Rightarrow \hat{\psi}(0) = 0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx = 0$ - нулевое среднее, т.е. $\psi(x)$ - должно **колебаться** и быстро убывать (“вейвлет”).

Дополнительно накладывают условия обнуления моментов старших порядков: $\int_{-\infty}^{\infty} x^p \psi(x) dx = 0, \quad p=0 \dots m-1$

$$[\omega + \omega^* - \Delta_{\hat{g}}, \omega + \omega^* + \Delta_{\hat{g}}]$$



Интегральное вейвлет-преобразование

Интегральное вейвлет преобразование (ИВП):

$$W_{\psi} \{f\} (b, a) = \langle f, \psi_{b,a} \rangle = |a|^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)} dx$$

При $x\psi(x), \omega\hat{\psi}(\omega) \in L^2(\mathbb{R})$ - функции окна $[x^* - \Delta_{\psi}, x^* + \Delta_{\psi}]$

$\psi_{b,a}(x)$ - растяжение-сдвиг функции окна $[b + ax^* - a\Delta_{\psi}, b + ax^* + a\Delta_{\psi}]$. Окно сужается при уменьшении a и расширяется при увеличении.

$$\frac{1}{2\pi} \hat{\psi}_{b,a}(\omega) = \frac{a|a|^{-\frac{1}{2}}}{2\pi} e^{j\omega b} \hat{\psi}(a\omega) \quad - \text{окно } [\omega^* - \Delta_{\hat{\psi}}, \omega^* + \Delta_{\hat{\psi}}]$$

$$S = 4\Delta_{\psi}\Delta_{\hat{\psi}} = const$$

Сдвинем центр в ноль $\eta(\omega) = \hat{\psi}(\omega + \omega^*)$ и используя равенство Парсеваля, обратное оконное Фурье преобразование:

$$\Rightarrow W_{\psi} \{f\} (b, a) = \frac{a|a|^{-\frac{1}{2}}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{j\omega b} \overline{\eta\left(a\left(\omega - \frac{\omega^*}{a}\right)\right)} d\omega$$

Функция окна $\eta\left(a\left(\omega - \frac{\omega^*}{a}\right)\right) = \eta(a\omega - \omega^*) = \hat{\psi}(a\omega)$ с радиусом $\frac{1}{a}\Delta_{\hat{\psi}}$.

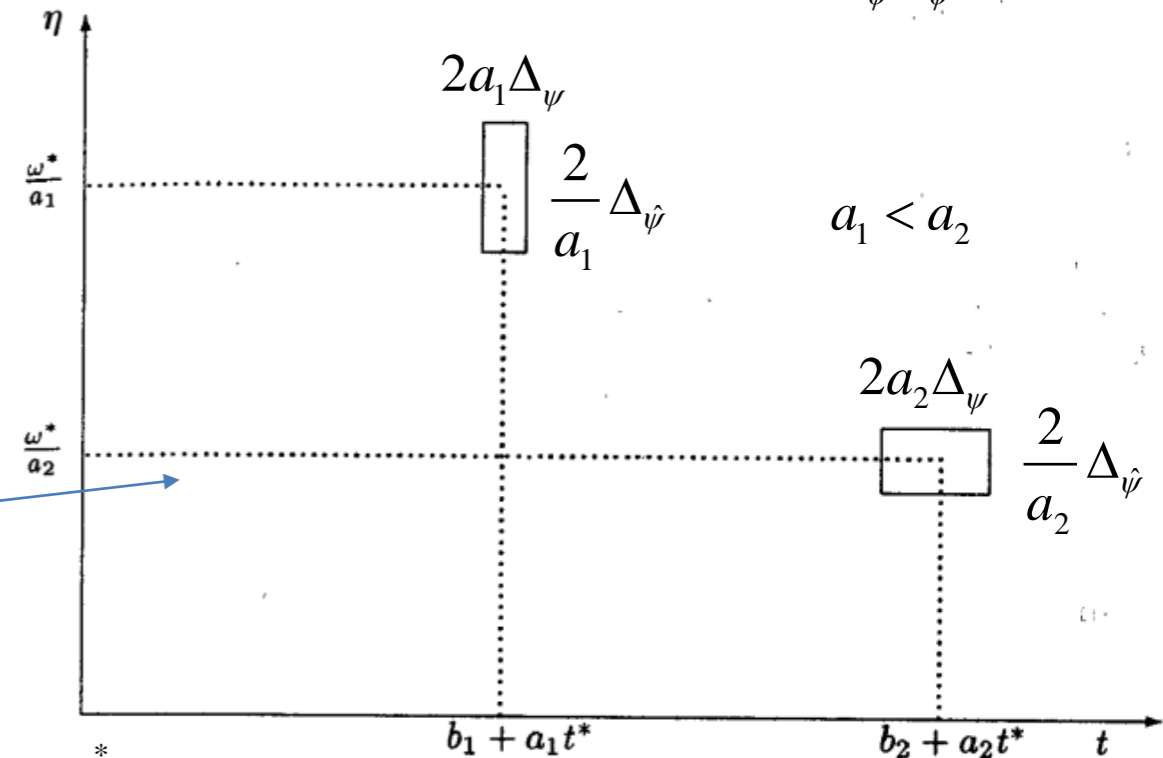
ИВП дает локальную информацию с пространственно-частотным окном:

$$[b + ax^* - a\Delta_{\psi}, b + ax^* + a\Delta_{\psi}] \times \left[\frac{\omega^*}{a} - \frac{1}{a}\Delta_{\hat{\psi}}, \frac{\omega^*}{a} + \frac{1}{a}\Delta_{\hat{\psi}}\right]$$

Отношение центра окна к ширине окна (октава при $a > 0$):

$$Q = \frac{\omega^*/a}{2\Delta_{\hat{\psi}}/a} = \frac{\omega^*}{2\Delta_{\hat{\psi}}} \quad - \text{не зависит от } a \text{ (} Q \text{ – постоянная фильтрация).}$$

На высоких $\omega = \frac{\omega^*}{a}$ окно сужается, на низких частотах – расширяется.



Интегральное вейвлет-преобразование

Теорема: Пусть $\psi(x)$ - базисный вейвлет, для $f, g \in L^2(\mathbb{R})$: $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_{\psi}\{f\}(b, a) \overline{W_{\psi}\{g\}(b, a)} \frac{da}{a^2} db = C_{\psi} \langle f, g \rangle$

Тогда:
$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{C_{\psi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_{\psi}\{f\}(b, a) \left\langle \frac{1}{2\sqrt{\pi\delta}} e^{-\frac{x^2}{2\delta}}, \psi_{a,b}(x) \right\rangle \frac{da}{a^2} db \Big|_{\delta \rightarrow +0} = \frac{1}{C_{\psi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_{\psi}\{f\}(b, a) \psi_{a,b}(x) \frac{da}{a^2} db$$

Т.к. $\omega = \frac{\omega^*}{a}, \omega^* > 0, a > 0 \Rightarrow \omega > 0$, доп. ограничение:

$$\int_0^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega = \int_0^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(-\omega)|^2}{|\omega|} d\omega = \frac{1}{2} C_{\psi} < \infty.$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2}{C_{\psi}} \int_0^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} W_{\psi}\{f\}(b, a) \psi_{a,b}(x) db \right] \frac{da}{a^2}$$

Интегральное вейвлет-преобразование

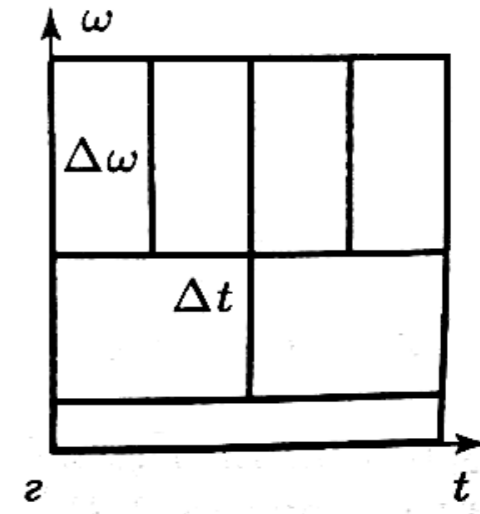
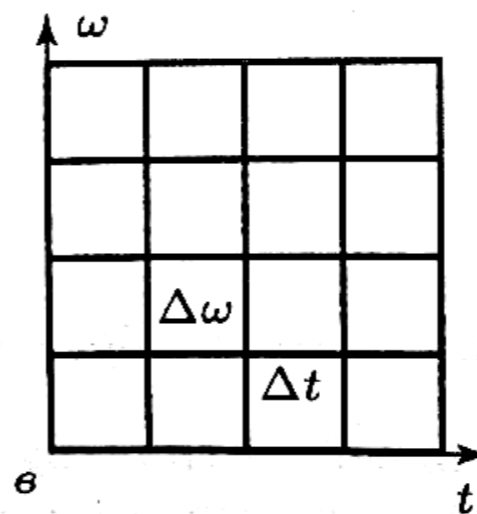
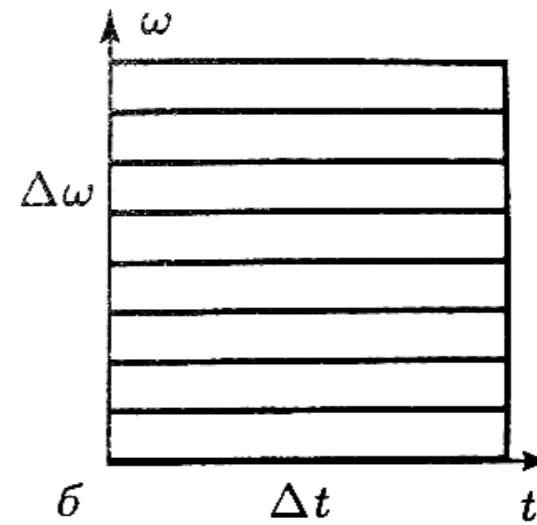
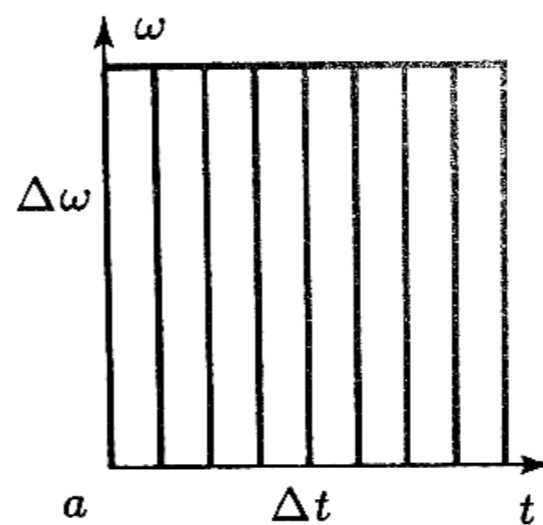
Теорема: Пусть $\psi(x)$ - базисный вейвлет, для $f, g \in L^2(\mathbb{R})$: $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_{\psi}\{f\}(b, a) \overline{W_{\psi}\{g\}(b, a)} \frac{da}{a^2} db = C_{\psi} \langle f, g \rangle$

Тогда:
$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{C_{\psi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_{\psi}\{f\}(b, a) \left\langle \frac{1}{2\sqrt{\pi\delta}} e^{-\frac{x^2}{2\delta}}, \psi_{a,b}(x) \right\rangle \frac{da}{a^2} db \Bigg|_{\delta \rightarrow +0} = \frac{1}{C_{\psi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_{\psi}\{f\}(b, a) \psi_{a,b}(x) \frac{da}{a^2} db$$

Т.к. $\omega = \frac{\omega^*}{a}, \omega^* > 0, a > 0 \Rightarrow \omega > 0$, доп. ограничение:

$$\int_0^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega = \int_0^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(-\omega)|^2}{|\omega|} d\omega = \frac{1}{2} C_{\psi} < \infty.$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2}{C_{\psi}} \int_0^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} W_{\psi}\{f\}(b, a) \psi_{a,b}(x) db \right] \frac{da}{a^2}$$

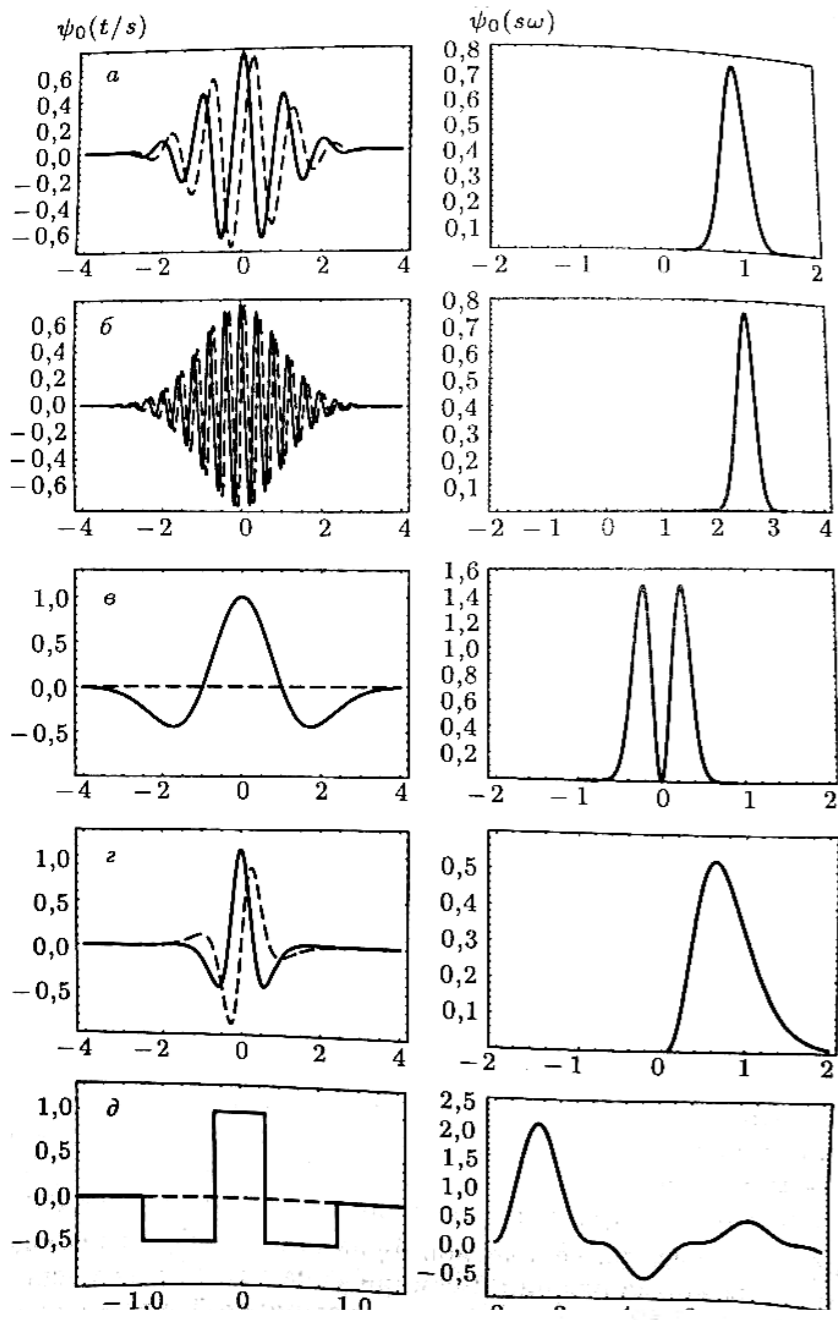


Частотно-временная локализация в фазовом пространстве:

- а) Дискретная выборка (сэмплирование дельта-функциями)
- б) Преобразование Фурье,
- в) Оконное преобразование Фурье
- г) Вейвлетное преобразование

Интегральное вейвлет-преобразование

Примеры вейвлет функций

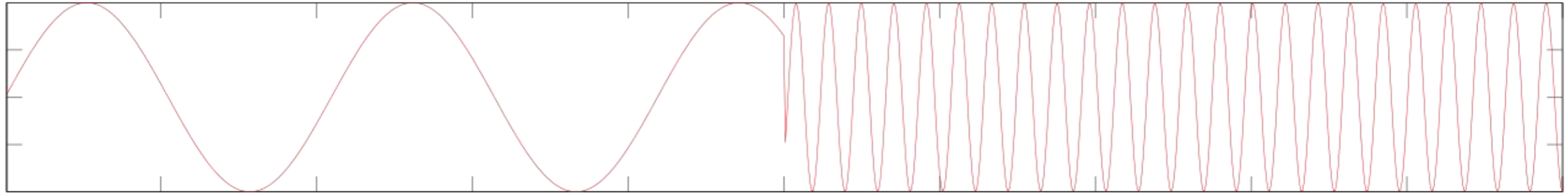


Вейвлет	$\psi_0(\eta)$	$\hat{\psi}_0(s\omega)$
Морлет	$\pi^{-1/4} e^{j\omega_0 \eta} e^{-\eta^2/2}$	$\pi^{-1/4} H(\omega) e^{(s\omega - \omega_0)^2/2}$
DOG	$\frac{(-1)^{m+1}}{\left[\Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right)\right]^{1/2}} \frac{d^m}{d\eta^m} e^{-\frac{\eta^2}{2}}$	$\frac{(j)^m}{\left[\Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right)\right]^{1/2}} (s\omega)^m e^{-\frac{(s\omega)^2}{2}}$
Паул	$\frac{2^m j^m m!}{\sqrt{\pi(2m!)}} (1 - j\eta)^{-(m+1)}$	$\frac{2^m}{\sqrt{m(2m-1)}} H(\omega) (s\omega)^m e^{-s\omega}$
ФНАТ	$\begin{cases} 1, & \eta < 1/3, \\ -1/2, & 1/3 < \eta \leq 1, \\ 0, & \eta > 1 \end{cases}$	$3H(s\omega) \left(\frac{\sin(s\omega)}{s\omega} - \frac{\sin(3s\omega)}{3s\omega} \right)$

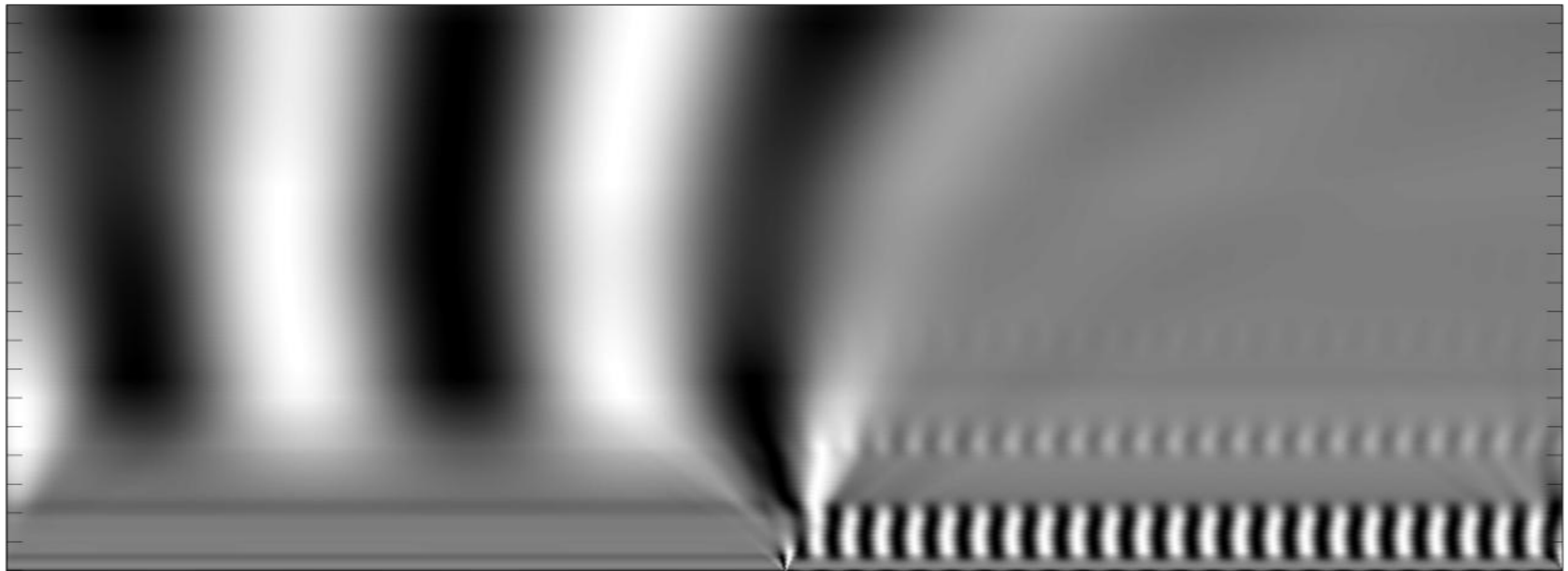
Здесь $H(x)$ — функция Хевисайда.

Рис. 1.3. Типы базисных вейвлетных функций. Представлены действительные (сплошные линии) и мнимые (штриховые линии) части материнских вейвлетов (слева) и их фурье-образы (справа): (а) соответствует морлет-вейвлету с $\omega_0 = 6, 0$; (б) — морлет-вейвлету ($\omega_0 = 16$); (в) — МНАТ-вейвлету (DOG-вейвлет с $m = 2$); (г) — вейвлету Паула с $m = 4$ и (д) — ФНАТ-вейвлету

Интегральное вейвлет-преобразование



Непрерывное вейвлет-преобразование сигнала, содержащего смену частоты



Дискретное вейвлет-преобразование.

$$\Psi_{b,a}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right), \quad a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

Разобьем ось частот на непересекающиеся частотные диапазоны (октавы). Рассмотрим двоичные разбиения. $a_j = \frac{1}{2^j}$

Ограничим b дискретным множеством: $b_{j,k} = \frac{k}{2^j} b_0, \quad j, k \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow \Psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - kb_0), \quad b_0 \equiv 1$$

$$W_\psi \{f\}(b_{j,k}, a_j) = \langle f, \Psi_{j,k} \rangle, \quad j, k \in \mathbb{Z}$$

Дискретное вейвлет-преобразование.

$$\Psi_{b,a}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right), \quad a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

Разобьем ось частот на непересекающиеся частотные диапазоны (октавы). Рассмотрим двоичные разбиения. $a_j = \frac{1}{2^j}$

Ограничим b дискретным множеством: $b_{j,k} = \frac{k}{2^j} b_0, \quad j, k \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow \Psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - kb_0), \quad b_0 \equiv 1$$

$$W_\psi\{f\}(b_{j,k}, a_j) = \langle f, \psi_{j,k} \rangle, \quad j, k \in \mathbb{Z}$$

Требование устойчивого восстановления функции f по ее образам $\langle f, \psi_{j,k} \rangle$ означает, что если $\|W_\psi\{f\}(b_{j,k}, a_j)\|^2$ - мало, то и $\|f\|^2$ также должно быть малой: $\exists a < \infty: \|W_\psi\{f\}(b_{j,k}, a_j)\|^2 < 1 \Rightarrow \|f\|^2 < a$. Пусть $\tilde{f} = f / \|W_\psi\{f\}(b_{j,k}, a_j)\|$, тогда из условия $\|W_\psi\{\tilde{f}\}(b_{j,k}, a_j)\|^2 < 1$ следует $\|f\|^2 / \|W_\psi\{f\}(b_{j,k}, a_j)\|^2 < a$, при $A = 1/a$:

$$A\|f\|^2 < \|\langle f, \psi_{j,k} \rangle\|^2, \quad j, k \in \mathbb{Z} \text{ - условие устойчивости}$$

Если функции удовлетворяют условию фрейма (устойчивости и ограниченности) (A, B – границы Фрейма):

$$A\|f\|_2^2 \leq \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{j,k} \rangle|^2 \leq B\|f\|_2^2, \quad 0 < A \leq B < \infty$$

\Rightarrow

$$A \leq \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(2^{-j}\omega)|^2 \leq B, \quad 0 < A \leq B < \infty$$

$$A \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(x + 2\pi k)|^2 \leq B, \quad 0 < A \leq B < \infty$$

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega = 2A \ln 2$$

То функция может быть восстановлена: $f(x) = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} c_{j,k} \psi_{j,k}(x)$

Дискретное вейвлет-преобразование.

$$\Psi_{b,a}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right), \quad a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

Разобьем ось частот на непересекающиеся частотные диапазоны (октавы). Рассмотрим двоичные разбиения. $a_j = \frac{1}{2^j}$

Ограничим b дискретным множеством: $b_{j,k} = \frac{k}{2^j} b_0, \quad j, k \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow \Psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - kb_0), \quad b_0 \equiv 1$$

$$W_\psi \{f\}(b_{j,k}, a_j) = \langle f, \Psi_{j,k} \rangle, \quad j, k \in \mathbb{Z}$$

$$f(x) = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} c_{j,k} \Psi_{j,k}(x)$$

$$\langle f(x), \tilde{\Psi}_{n,m}(x) \rangle = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} c_{j,k} \langle \tilde{\Psi}_{n,m}(x), \Psi_{j,k}(x) \rangle$$

$$\langle \tilde{\Psi}_{n,m}(x), \Psi_{j,k}(x) \rangle = \delta_{n,j} \delta_{m,k} \Rightarrow c_{j,k} = \langle f(x), \tilde{\Psi}_{j,k}(x) \rangle$$

$$f(x) = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \langle f(x), \tilde{\Psi}_{j,k}(x) \rangle \Psi_{j,k}(x)$$

Дискретное вейвлет-преобразование.

$$\Psi_{b,a}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right), \quad a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

Разобьем ось частот на непересекающиеся частотные диапазоны (октавы). Рассмотрим двоичные разбиения. $a_j = \frac{1}{2^j}$

Ограничим b дискретным множеством: $b_{j,k} = \frac{k}{2^j} b_0, \quad j, k \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow \Psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - kb_0), \quad b_0 \equiv 1$$

$$W_\psi \{f\}(b_{j,k}, a_j) = \langle f, \Psi_{j,k} \rangle, \quad j, k \in \mathbb{Z}$$

$$f(x) = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} c_{j,k} \Psi_{j,k}(x)$$

$$\langle f(x), \tilde{\Psi}_{n,m}(x) \rangle = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} c_{j,k} \langle \tilde{\Psi}_{n,m}(x), \Psi_{j,k}(x) \rangle$$

$$\langle \tilde{\Psi}_{n,m}(x), \Psi_{j,k}(x) \rangle = \delta_{n,j} \delta_{m,k} \Rightarrow c_{j,k} = \langle f(x), \tilde{\Psi}_{j,k}(x) \rangle$$

$$f(x) = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \langle f(x), \tilde{\Psi}_{j,k}(x) \rangle \Psi_{j,k}(x)$$

$$A \|f\|_2^2 \leq \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} |\langle f, \Psi_{j,k} \rangle|^2 \leq B \|f\|_2^2, \quad 0 < A \leq B < \infty$$

$$A \leq \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(2^{-j} \omega)|^2 \leq B, \quad A \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(x + 2\pi k)|^2 \leq B,$$

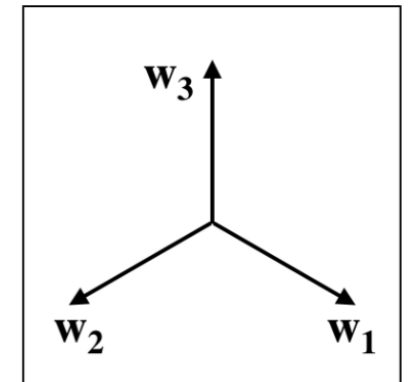
Фрейм жесткий, если $A = B$:

$$A \|f\|_2^2 = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} |\langle f, \Psi_{j,k} \rangle|^2,$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(2^{-j} \omega)|^2 = A, \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(x + 2\pi k)|^2 = A$$

$$f(x) = \frac{1}{A} \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \langle f(x), \Psi_{j,k}(x) \rangle \Psi_{j,k}(x)$$

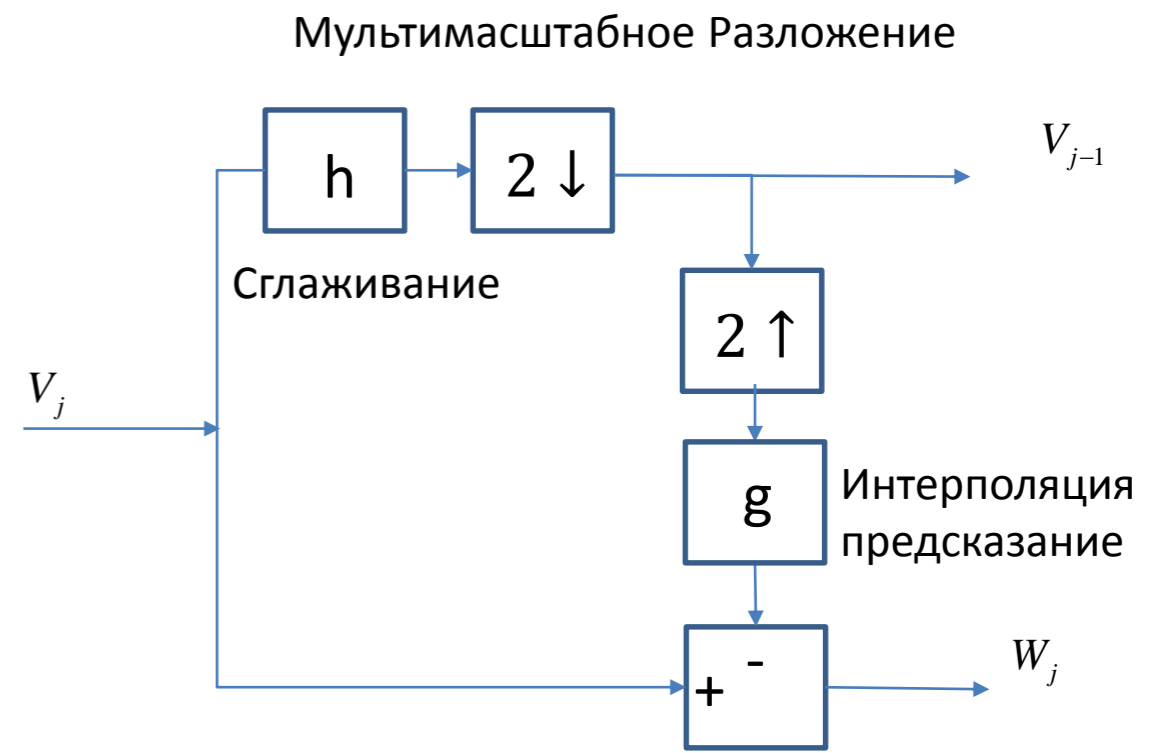
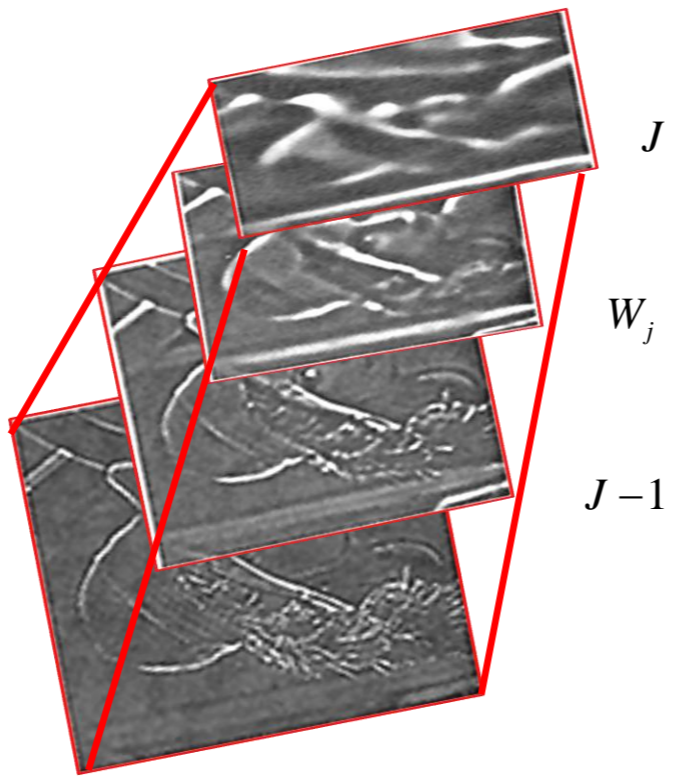
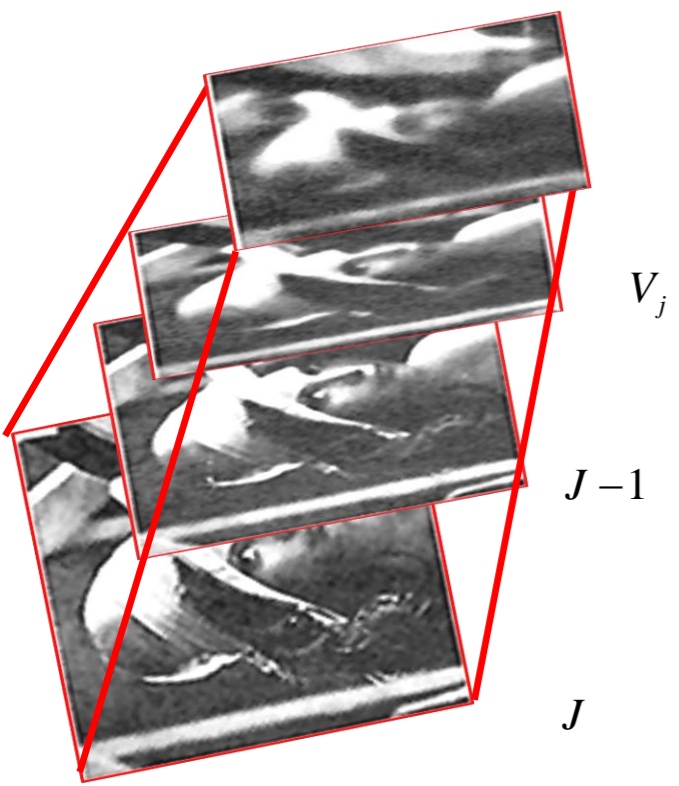
A – избыточность фрейма, при $A = 1$ – ортогональный базис.



Жесткий Фрейм
в \mathbb{R}^2 с $A = \frac{3}{2}$

Введение в кратномасштабный анализ.

Гауссовская пирамида



Гауссовская пирамида $\{V_j\}$

$$V_{j-1} = (h * V_j) \downarrow$$

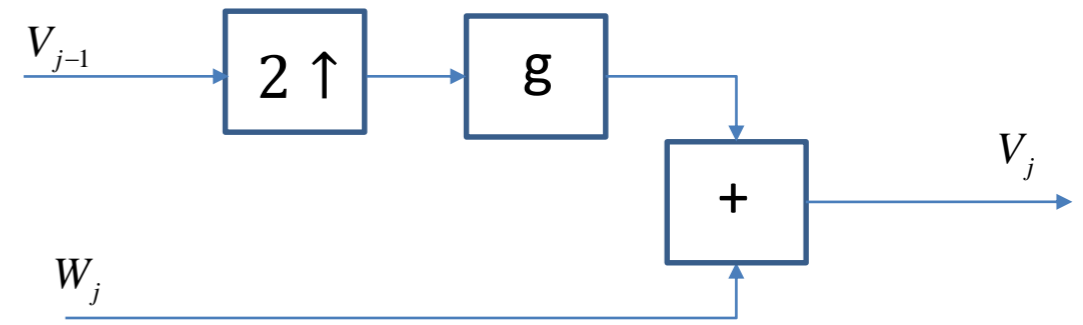
Лапласовская пирамида $\{W_j\}$

$$W_j = V_j - g * (((h * V_j) \downarrow) \uparrow)$$

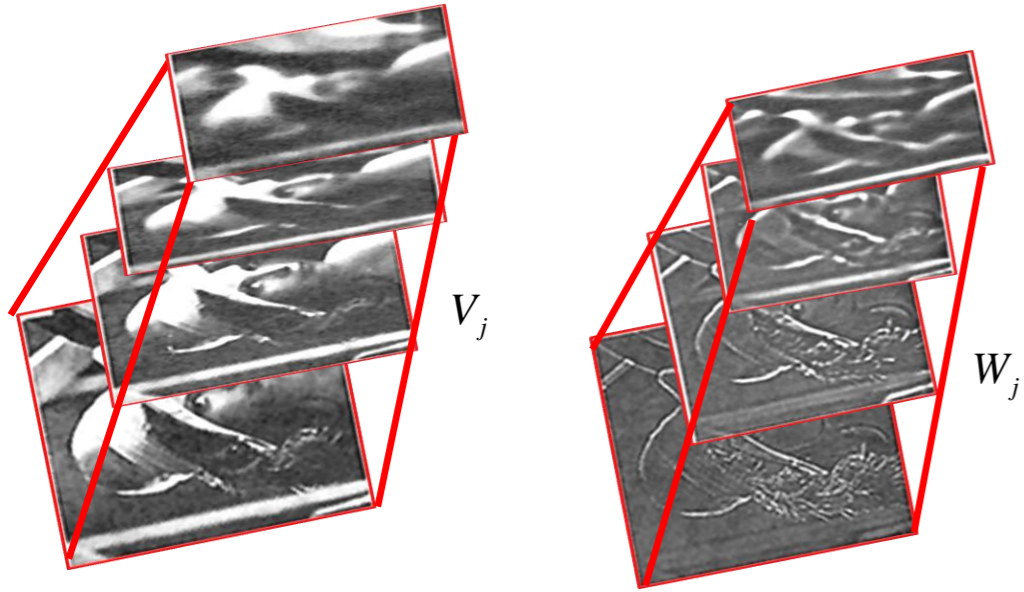
$$\Rightarrow V_j = g * (((h * V_j) \downarrow) \uparrow) + W_j = g * (V_{j-1} \uparrow) + W_j$$

Грубое представление детали

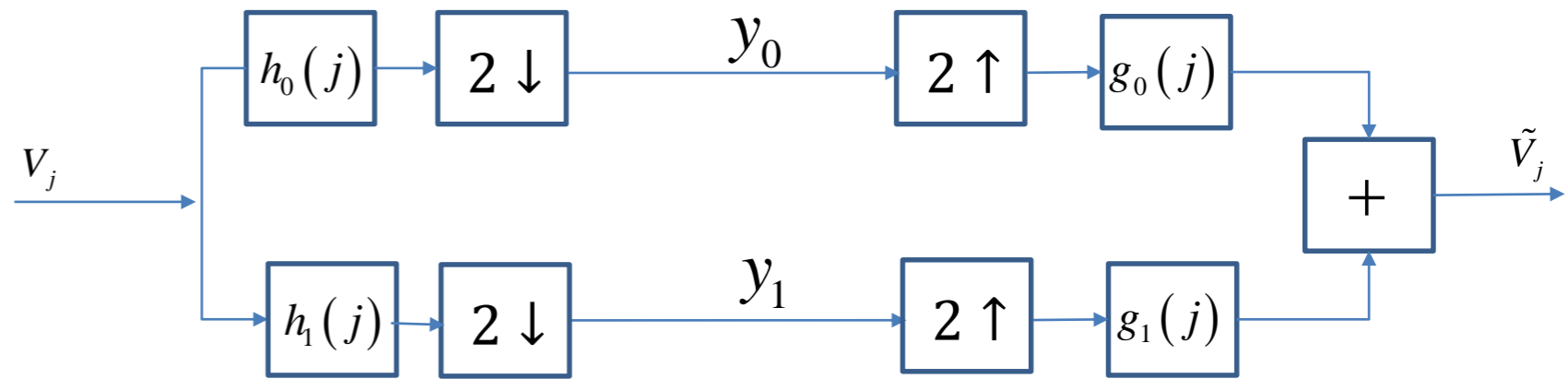
Реконструкция



Введение в кратномасштабный анализ. Гауссовская пирамида

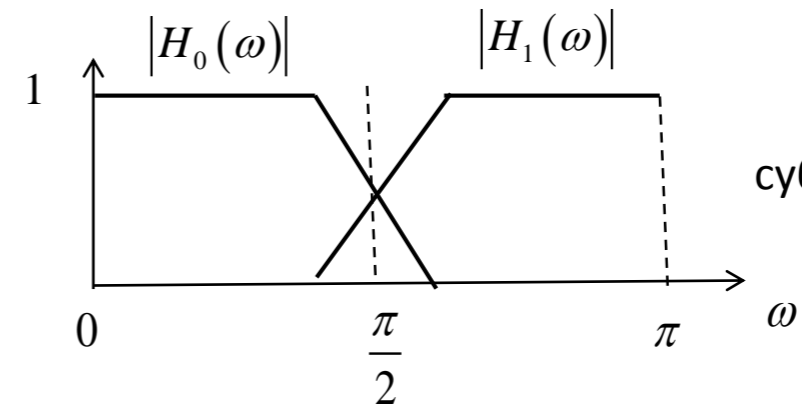


Гауссовская пирамида



Фильтры анализа

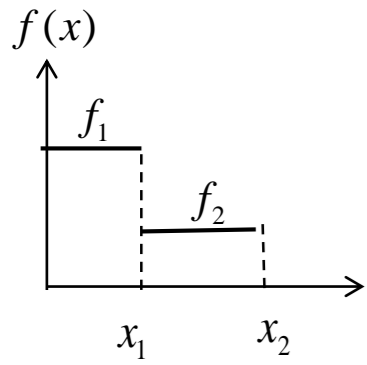
Фильтры синтеза



субдиапазоны

$$H_1(\omega) = 1 - H_0(\omega)$$

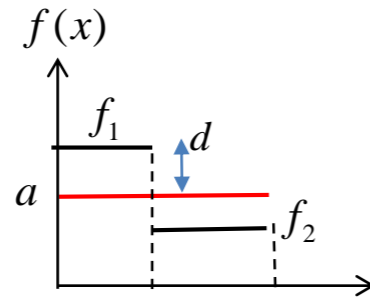
Введение в кратномасштабный анализ. Вейвлеты Хаара.



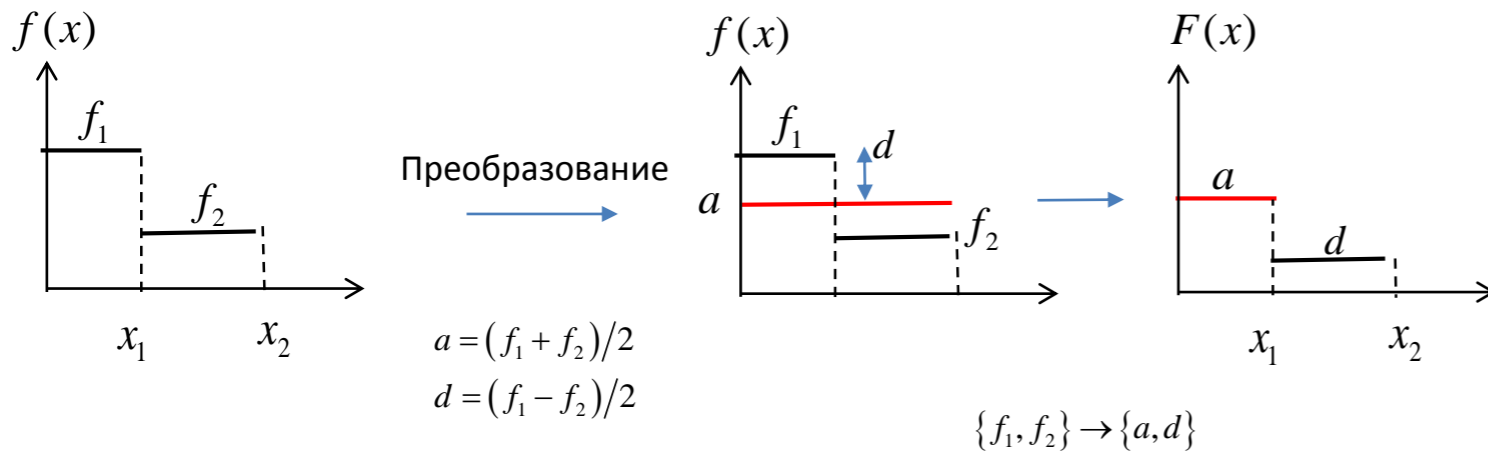
Преобразование

$$a = (f_1 + f_2)/2$$

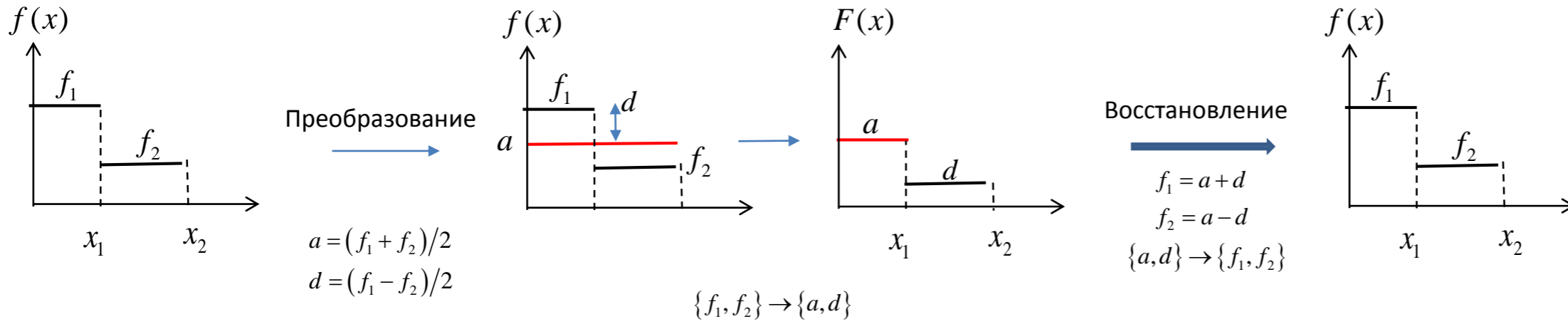
$$d = (f_1 - f_2)/2$$



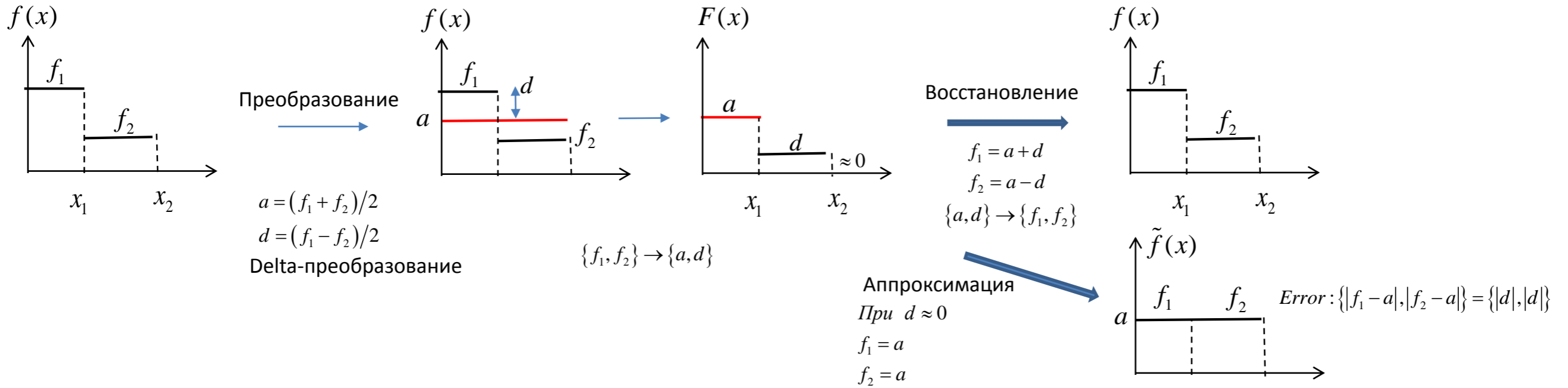
Введение в кратномасштабный анализ. Вейвлеты Хаара.



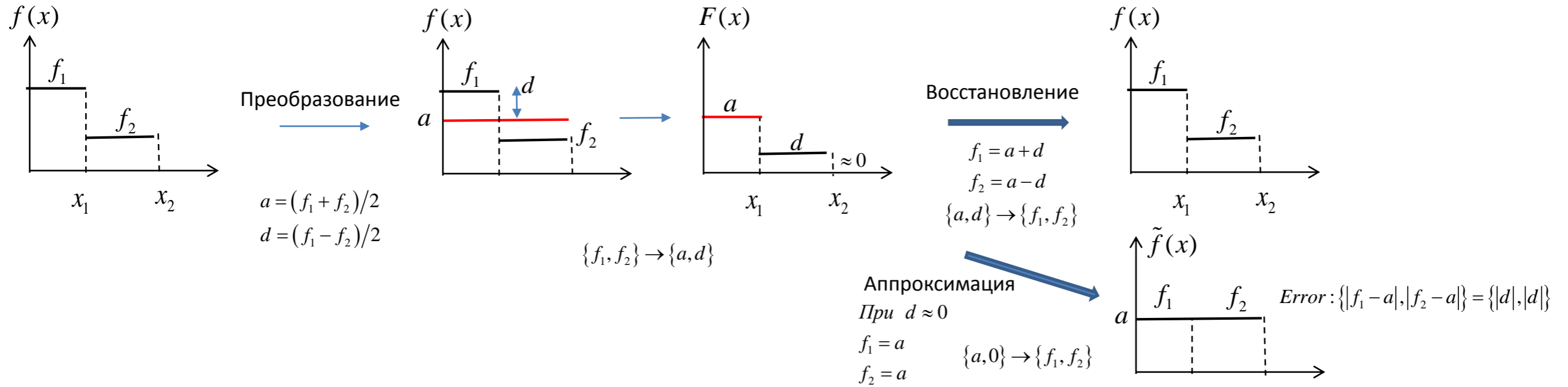
Введение в кратномасштабный анализ. Вейвлеты Хаара.



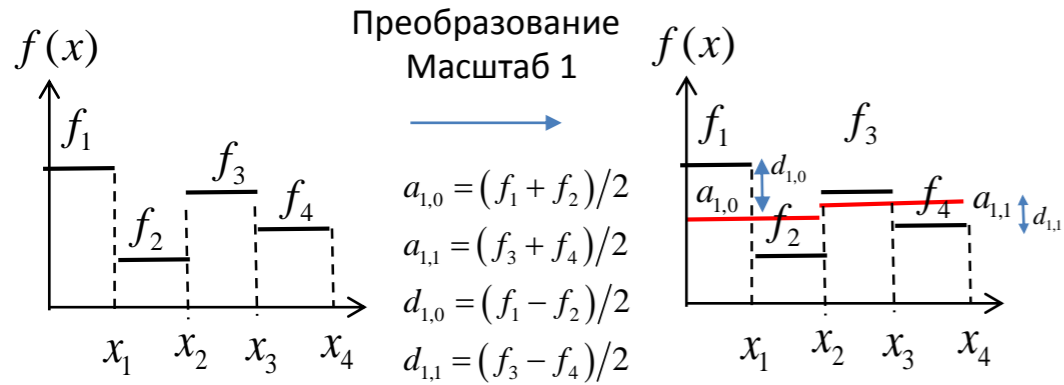
Введение в кратномасштабный анализ. Вейвлеты Хаара.



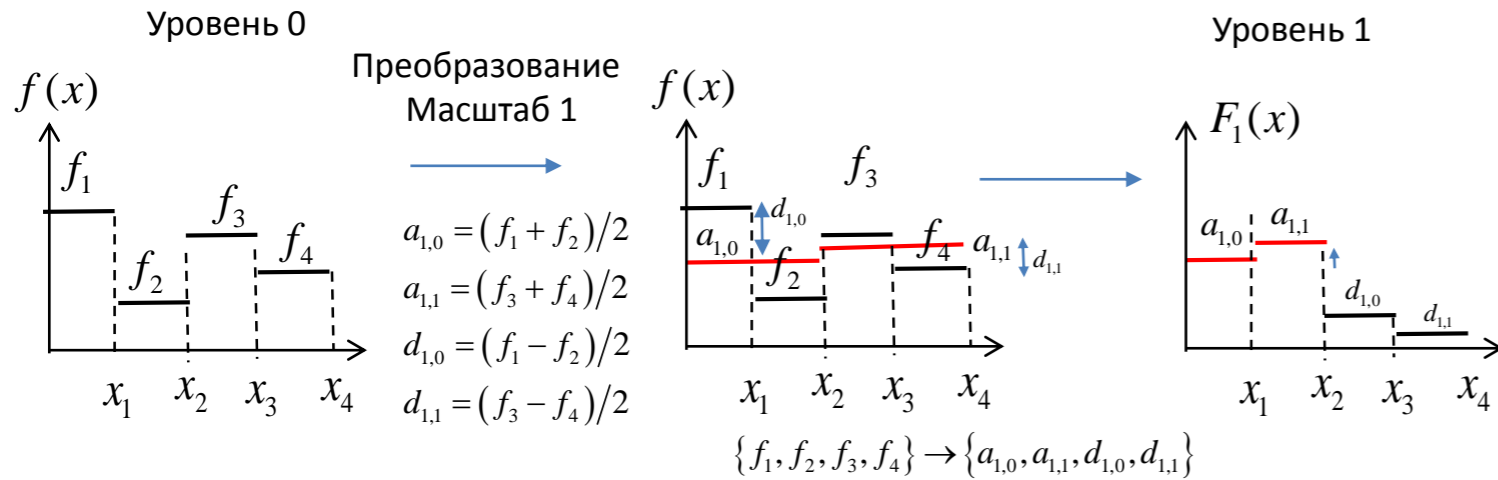
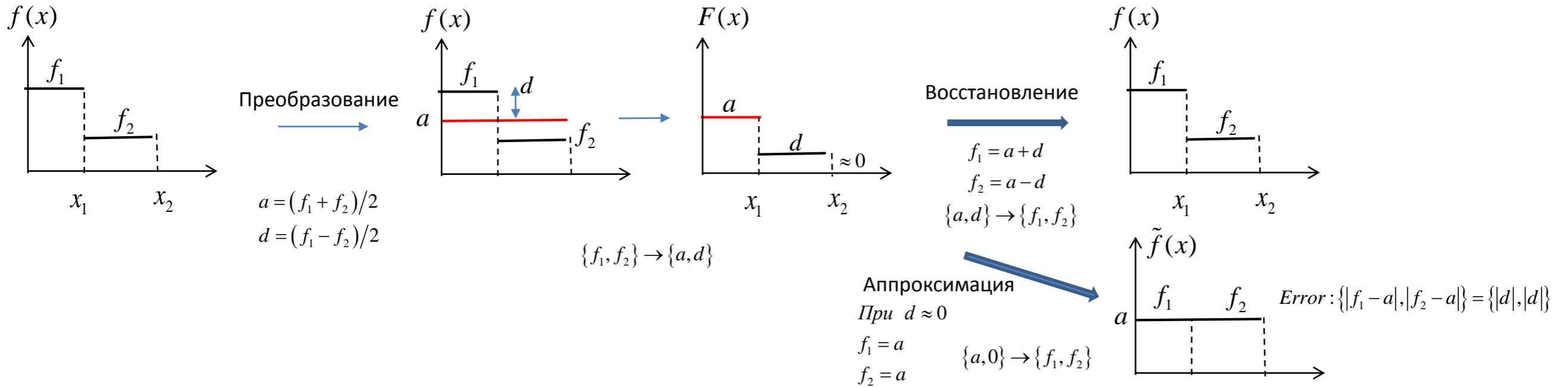
Введение в кратномасштабный анализ. Вейвлеты Хаара.



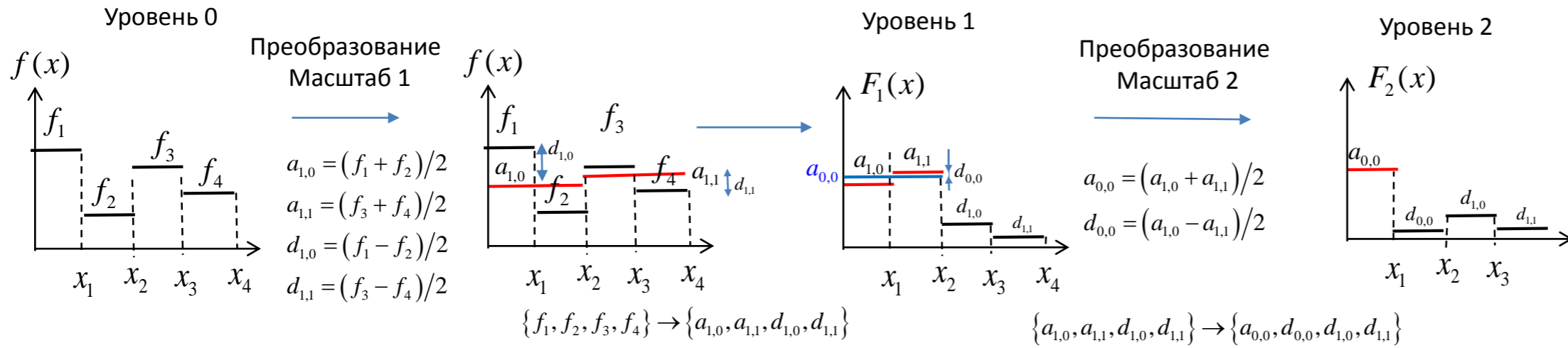
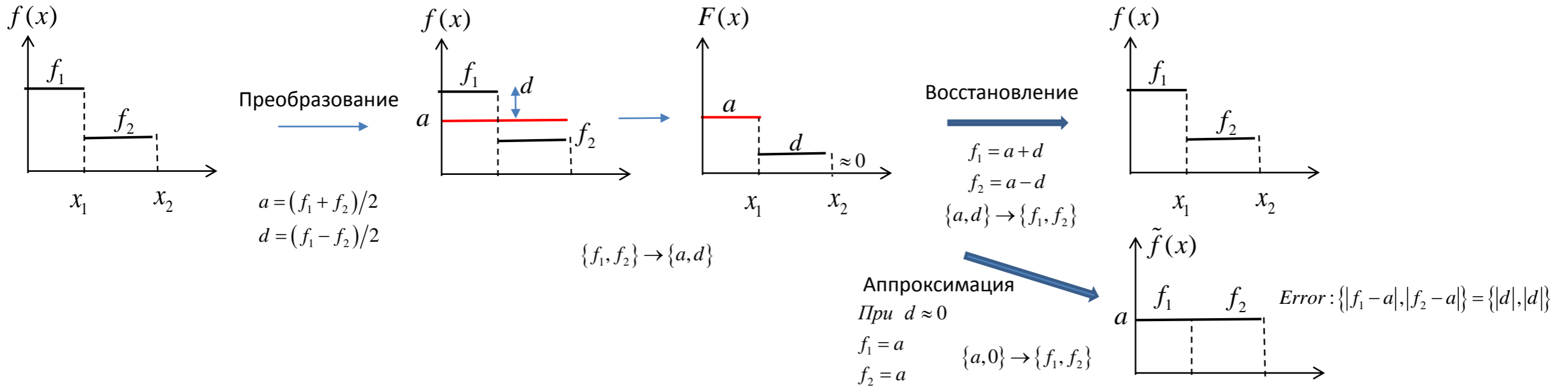
Уровень 0



Введение в кратномасштабный анализ. Вейвлеты Хаара.

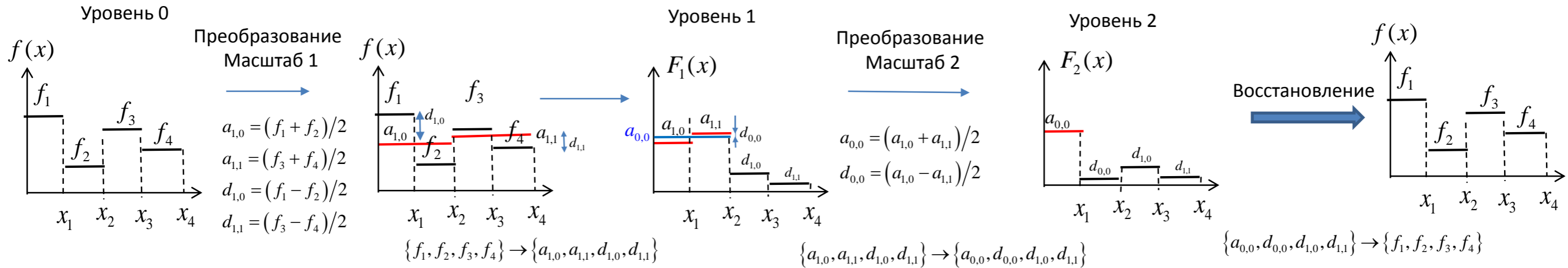
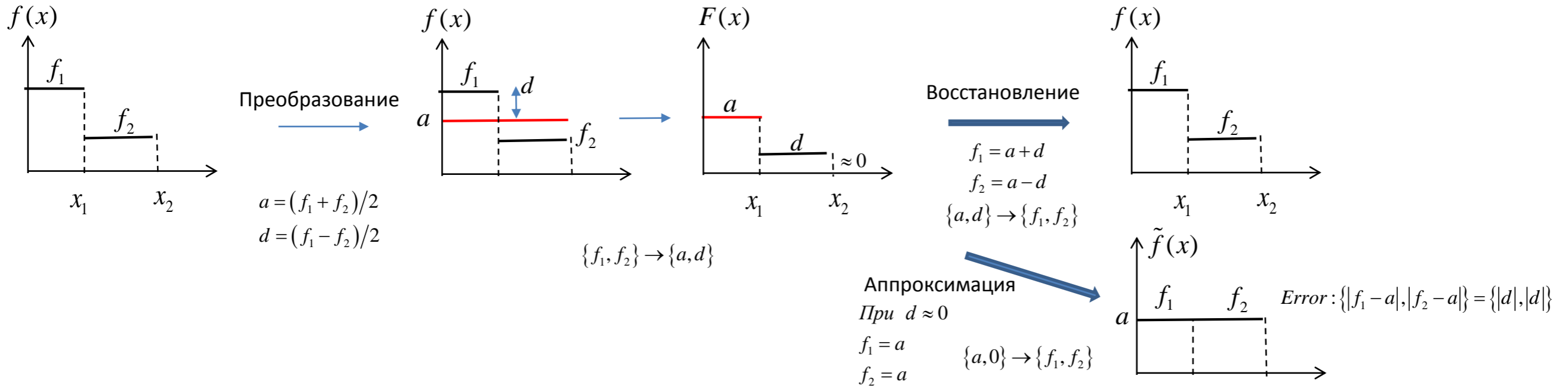


Введение в кратномасштабный анализ. Вейвлеты Хаара.



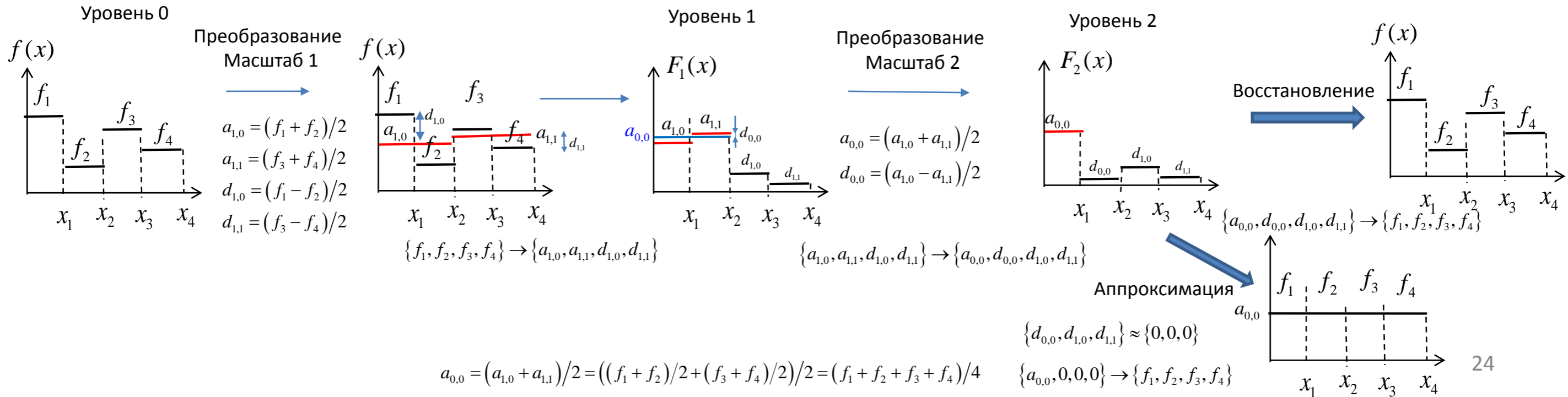
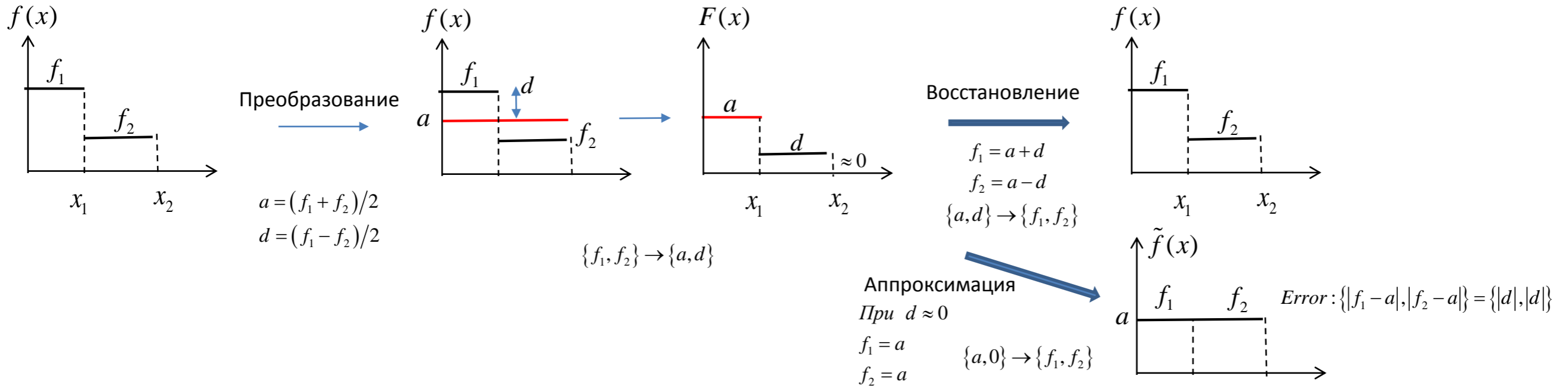
$$a_{0,0} = (a_{1,0} + a_{1,1})/2 = ((f_1 + f_2)/2 + (f_3 + f_4)/2)/2 = (f_1 + f_2 + f_3 + f_4)/4$$

Введение в кратномасштабный анализ. Вейвлеты Хаара.

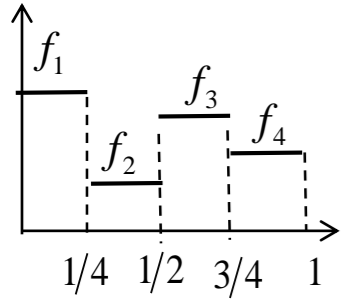


$$a_{0,0} = (a_{1,0} + a_{1,1})/2 = ((f_1 + f_2)/2 + (f_3 + f_4)/2)/2 = (f_1 + f_2 + f_3 + f_4)/4$$

Введение в кратномасштабный анализ. Вейвлеты Хаара.



Введение в кратномасштабный анализ. Вейвлеты Хаара.

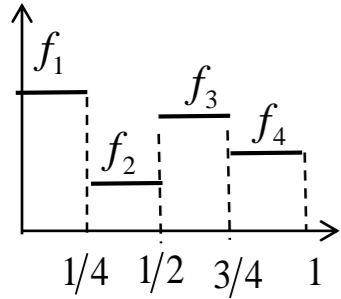


$f(x) = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ - изображение

$$f(x) = f_1 F_{[0,1/4)}(x) + f_2 F_{[1/4,1/2)}(x) + f_3 F_{[1/2,3/4)}(x) + f_4 F_{[3/4,1)}(x)$$

$$F_{[a,b)}(x) = \begin{cases} 1, & a \leq x < b \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \text{ - Характеристическая функция}$$

Введение в кратномасштабный анализ. Вейвлеты Хаара.



$f(x) = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ - изображение

$$f(x) = f_1 F_{[0,1/4)}(x) + f_2 F_{[1/4,1/2)}(x) + f_3 F_{[1/2,3/4)}(x) + f_4 F_{[3/4,1)}(x)$$

$$F_{[a,b)}(x) = \begin{cases} 1, & a \leq x < b \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \text{ - Характеристическая функция}$$

Сдвиги характеристической функции $F_{[0,1/4)}(x)$:

$$F_{[1/4,1/2)}(x) = F_{[0,1/4)}(x - 1/4)$$

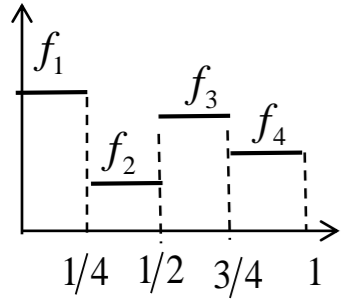
$$F_{[1/2,3/4)}(x) = F_{[0,1/4)}(x - 1/2)$$

$$F_{[3/4,1)}(x) = F_{[0,1/4)}(x - 3/4)$$

Масштабирование характеристической функции $F_{[0,1)}(x)$:

$$F_{[0,1/4)}(x) = F_{[0,1)}(2^2 x)$$

Введение в кратномасштабный анализ. Вейвлеты Хаара.



$f(x) = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ - изображение

$$f(x) = f_1 F_{[0,1/4)}(x) + f_2 F_{[1/4,1/2)}(x) + f_3 F_{[1/2,3/4)}(x) + f_4 F_{[3/4,1)}(x)$$

$$F_{[a,b)}(x) = \begin{cases} 1, & a \leq x < b \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \text{ - Характеристическая функция}$$

Пусть: $\phi(x) = F_{[0,1)}(x)$, - масштабирующая функция

$$\phi_{k,j}(x) = \phi(2^k x - j), j = 0, \dots, 2^k - 1 \quad k - \text{масштаб}$$

Сдвиги характеристической функции $F_{[0,1/4)}(x)$:

$$F_{[1/4,1/2)}(x) = F_{[0,1/4)}(x - 1/4)$$

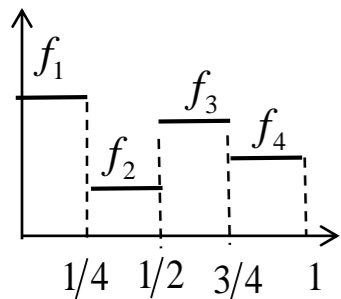
$$F_{[1/2,3/4)}(x) = F_{[0,1/4)}(x - 1/2)$$

$$F_{[3/4,1)}(x) = F_{[0,1/4)}(x - 3/4)$$

Масштабирование характеристической функции $F_{[0,1)}(x)$:

$$F_{[0,1/4)}(x) = F_{[0,1)}(2^2 x)$$

Введение в кратномасштабный анализ. Вейвлеты Хаара.



$f(x) = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ - изображение

$$f(x) = f_1 F_{[0,1/4)}(x) + f_2 F_{[1/4,1/2)}(x) + f_3 F_{[1/2,3/4)}(x) + f_4 F_{[3/4,1)}(x)$$

$$F_{[a,b)}(x) = \begin{cases} 1, & a \leq x < b \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \text{ - Характеристическая функция}$$

Сдвиги характеристической функции $F_{[0,1/4)}(x)$:

$$F_{[1/4,1/2)}(x) = F_{[0,1/4)}(x - 1/4)$$

$$F_{[1/2,3/4)}(x) = F_{[0,1/4)}(x - 1/2)$$

$$F_{[3/4,1)}(x) = F_{[0,1/4)}(x - 3/4)$$

Масштабирование характеристической функции $F_{[0,1)}(x)$:

$$F_{[0,1/4)}(x) = F_{[0,1)}(2^2 x)$$

Пусть: $\phi(x) = F_{[0,1)}(x)$, - масштабирующая функция

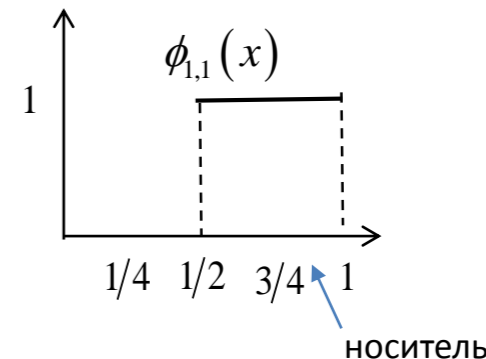
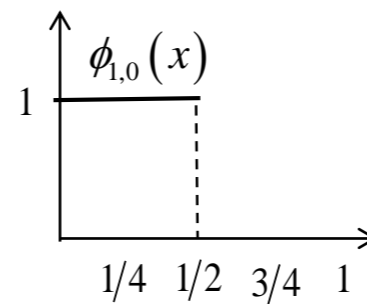
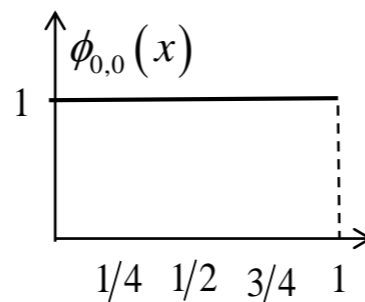
$$\phi_{k,j}(x) = \phi(2^k x - j), j = 0, \dots, 2^k - 1 \quad k \text{ - масштаб}$$

Тогда:

$$\phi_{0,0}(x) = \phi(x)$$

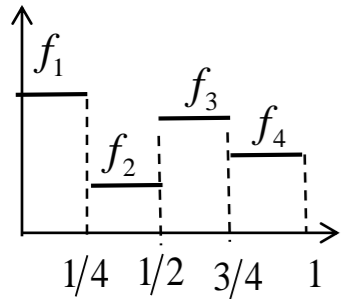
$$\phi_{1,0}(x) = \phi(2x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1/2, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\phi_{1,1}(x) = \phi(2x - 1) = \begin{cases} 1, & 1/2 \leq x < 1, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$



$$\Rightarrow f(x) = f_1 \phi_{2,0}(x) + f_2 \phi_{2,1}(x) + f_3 \phi_{2,2}(x) + f_4 \phi_{2,3}(x)$$

Введение в кратномасштабный анализ. Вейвлеты Хаара.



$f(x) = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ - изображение

$$f(x) = f_1 F_{[0,1/4)}(x) + f_2 F_{[1/4,1/2)}(x) + f_3 F_{[1/2,3/4)}(x) + f_4 F_{[3/4,1)}(x)$$

$$F_{[a,b)}(x) = \begin{cases} 1, & a \leq x < b \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \text{ - Характеристическая функция}$$

Сдвиги характеристической функции $F_{[0,1/4)}(x)$:

$$F_{[1/4,1/2)}(x) = F_{[0,1/4)}(x - 1/4)$$

$$F_{[1/2,3/4)}(x) = F_{[0,1/4)}(x - 1/2)$$

$$F_{[3/4,1)}(x) = F_{[0,1/4)}(x - 3/4)$$

Масштабирование характеристической функции $F_{[0,1)}(x)$:

$$F_{[0,1/4)}(x) = F_{[0,1)}(2^2 x)$$

Пусть: $\phi(x) = F_{[0,1)}(x)$, - масштабирующая функция

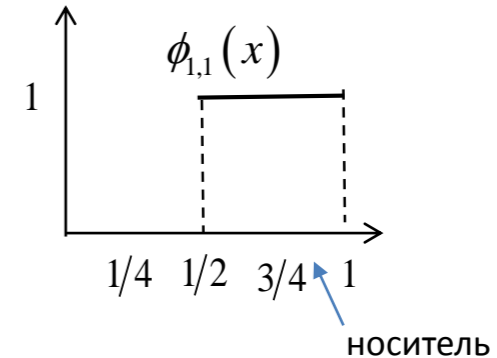
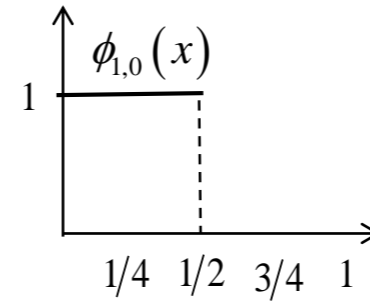
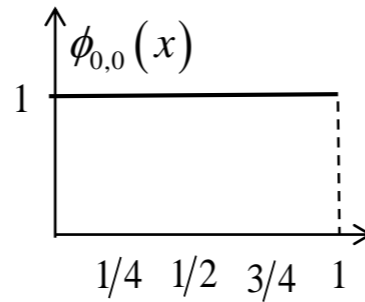
$$\phi_{k,j}(x) = \phi(2^k x - j), j = 0, \dots, 2^k - 1 \quad k \text{ - масштаб}$$

Тогда:

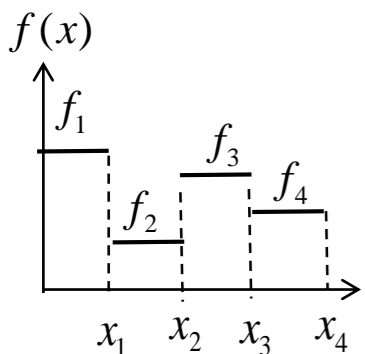
$$\phi_{0,0}(x) = \phi(x)$$

$$\phi_{1,0}(x) = \phi(2x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1/2, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\phi_{1,1}(x) = \phi(2x - 1) = \begin{cases} 1, & 1/2 \leq x < 1, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

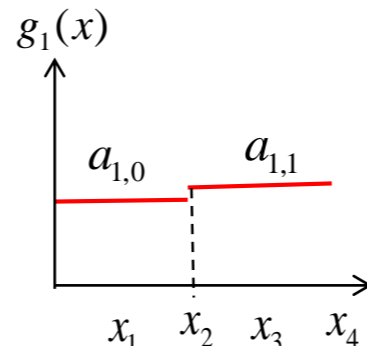
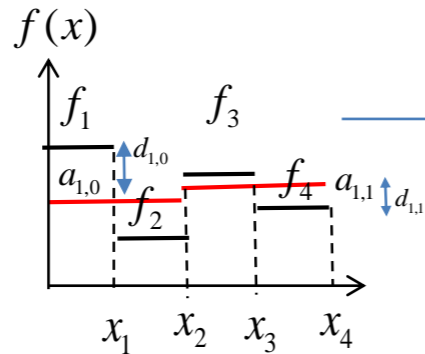


$$\Rightarrow f(x) = f_1 \phi_{2,0}(x) + f_2 \phi_{2,1}(x) + f_3 \phi_{2,2}(x) + f_4 \phi_{2,3}(x)$$



$$a_{1,0} = (f_1 + f_2)/2$$

$$a_{1,1} = (f_3 + f_4)/2$$



$$\Rightarrow g_1(x) = a_{1,0} \phi_{1,0}(x) + a_{1,1} \phi_{1,1}(x)$$

$$f(x; a, d) - ?$$

Введение в кратномасштабный анализ. Вейвлеты Хаара.

Пусть: $F_{[a,b)}(x) = \begin{cases} 1, & a \leq x < b \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$ - Характеристическая функция

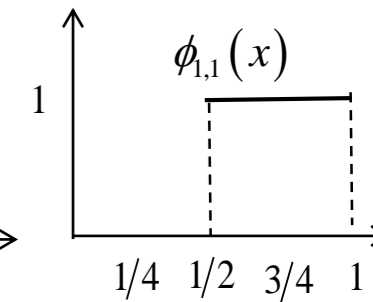
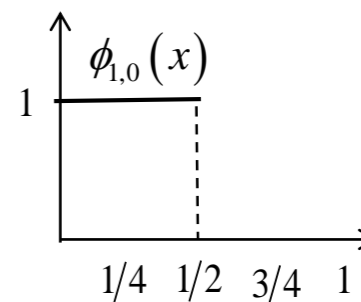
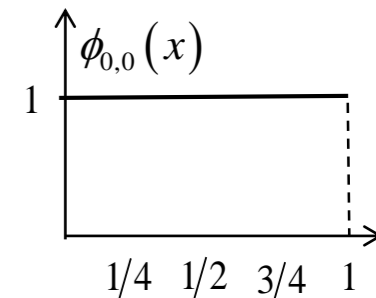
$\phi(x) = F_{[0,1)}(x)$, - масштабирующая функция

$\phi_{k,j}(x) = \phi(2^k x - j)$, $j = 0, \dots, 2^k - 1$

$$\phi_{0,0}(x) = \phi(x)$$

$$\phi_{1,0}(x) = \phi(2x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1/2, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\phi_{1,1}(x) = \phi(2x-1) = \begin{cases} 1, & 1/2 \leq x < 1, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$



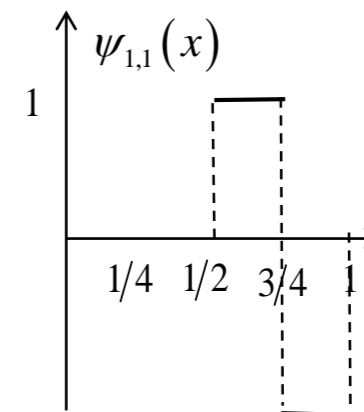
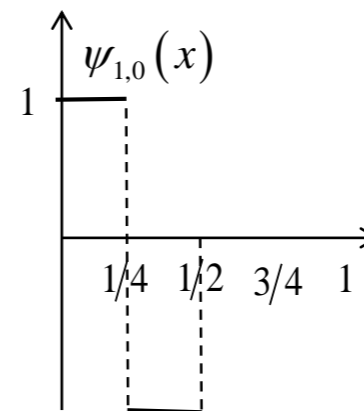
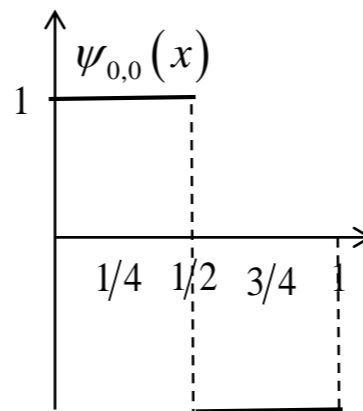
Пусть: $\psi(x) = F_{[0,1/2)}(x) - F_{[1/2,1)}(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1/2, \\ -1, & 1/2 \leq x < 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$ - Базисный вейвлет

$\psi_{k,j}(x) = \psi(2^k x - j)$, $j = 0, \dots, 2^k - 1$

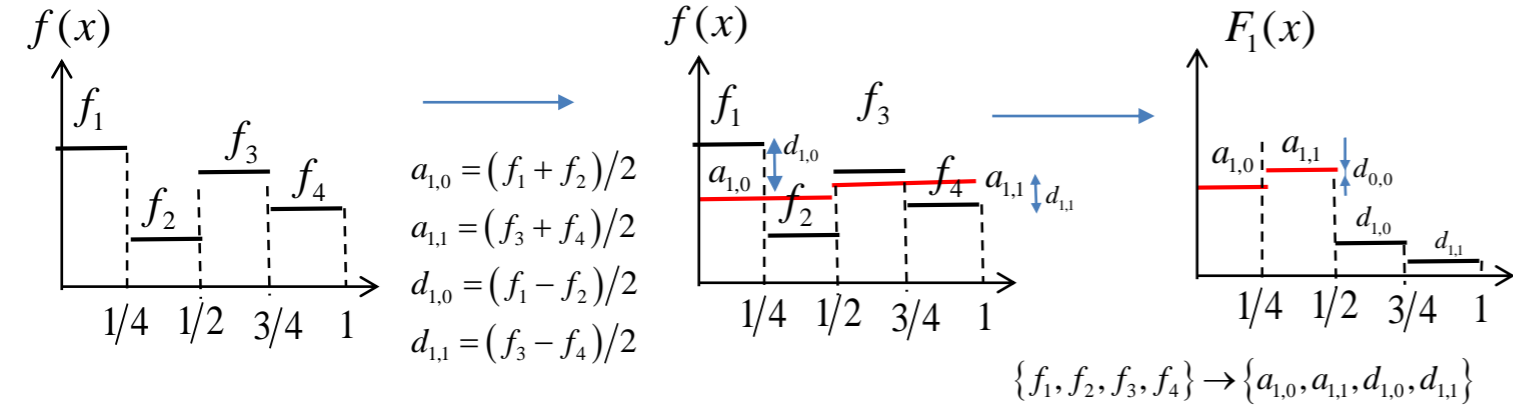
Тогда: $\psi_{0,0}(x) = \psi(x)$

$$\psi_{1,0}(x) = \psi(2x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1/4, \\ -1, & 1/4 \leq x < 1/2, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

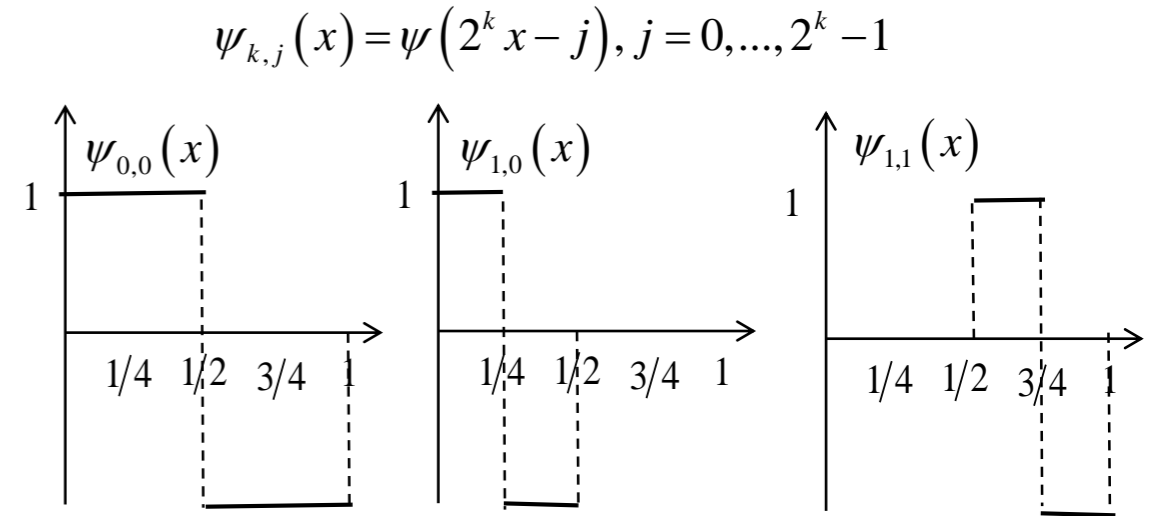
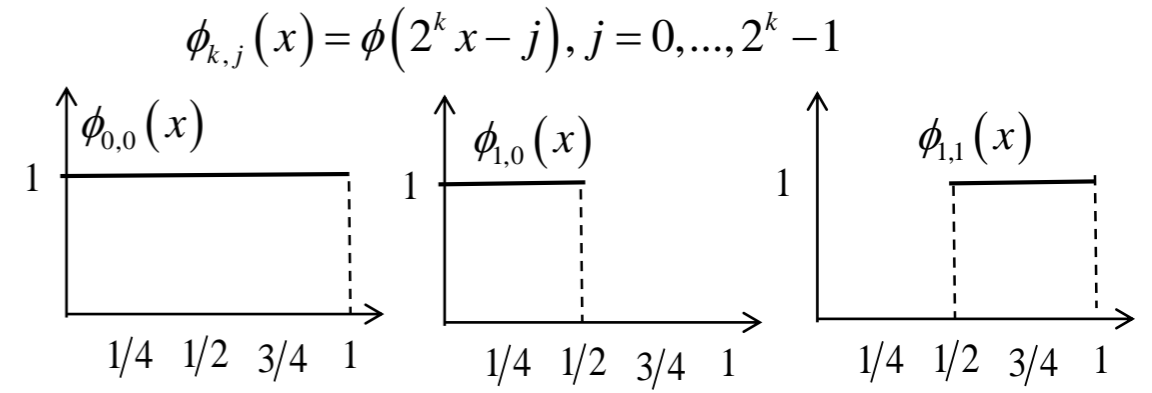
$$\psi_{1,1}(x) = \psi(2x-1) = \begin{cases} 1, & 1/2 \leq x < 3/4, \\ -1, & 3/4 \leq x < 1, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$



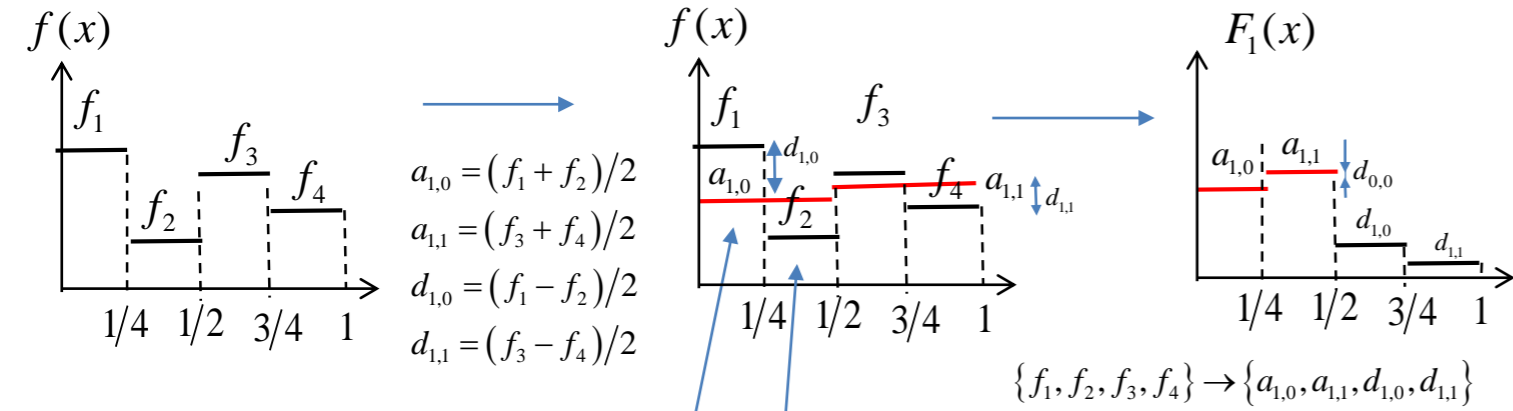
Введение в кратномасштабный анализ. Вейвлеты Хаара.



$$\Rightarrow g_1(x) = a_{1,0}\phi_{1,0}(x) + a_{1,1}\phi_{1,1}(x)$$



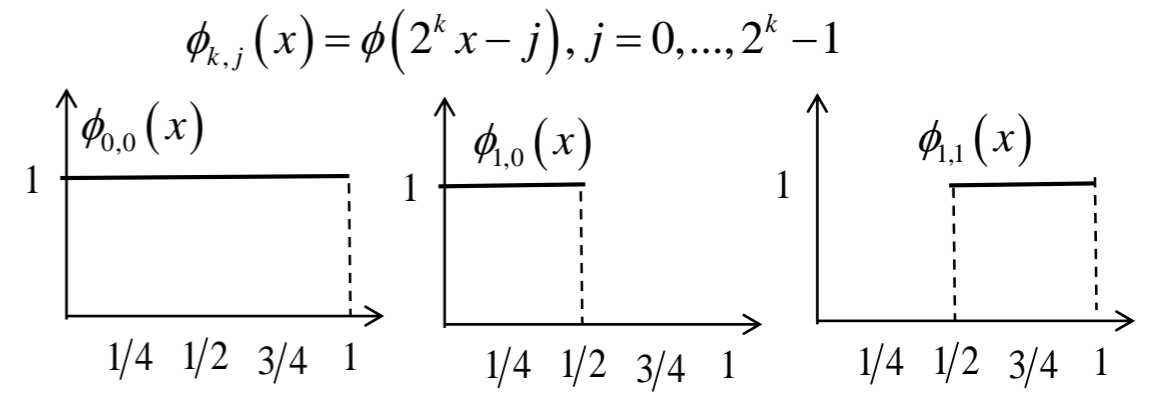
Введение в кратномасштабный анализ. Вейвлеты Хаара.



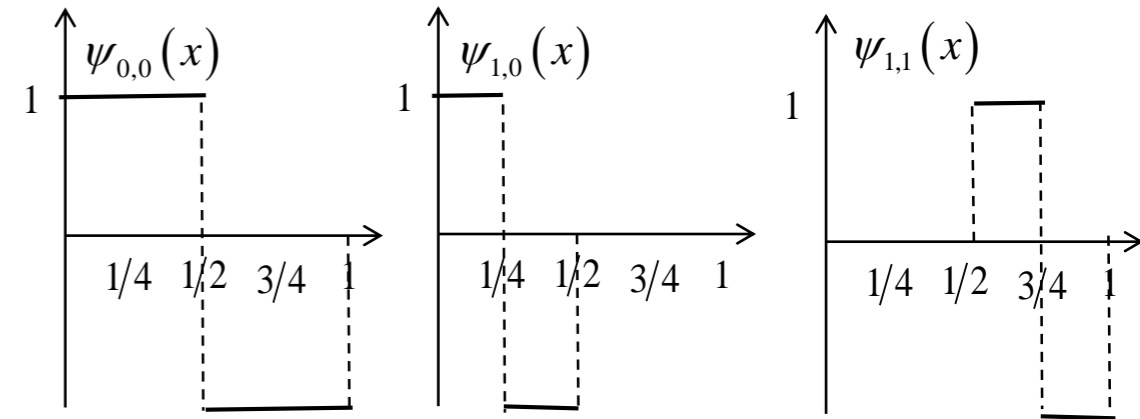
$$\Rightarrow g_1(x) = a_{1,0}\phi_{1,0}(x) + a_{1,1}\phi_{1,1}(x)$$

$$[0, 1/4]: f(x) - g_1(x) = f_1 - a_{1,0} = d_{1,0}$$

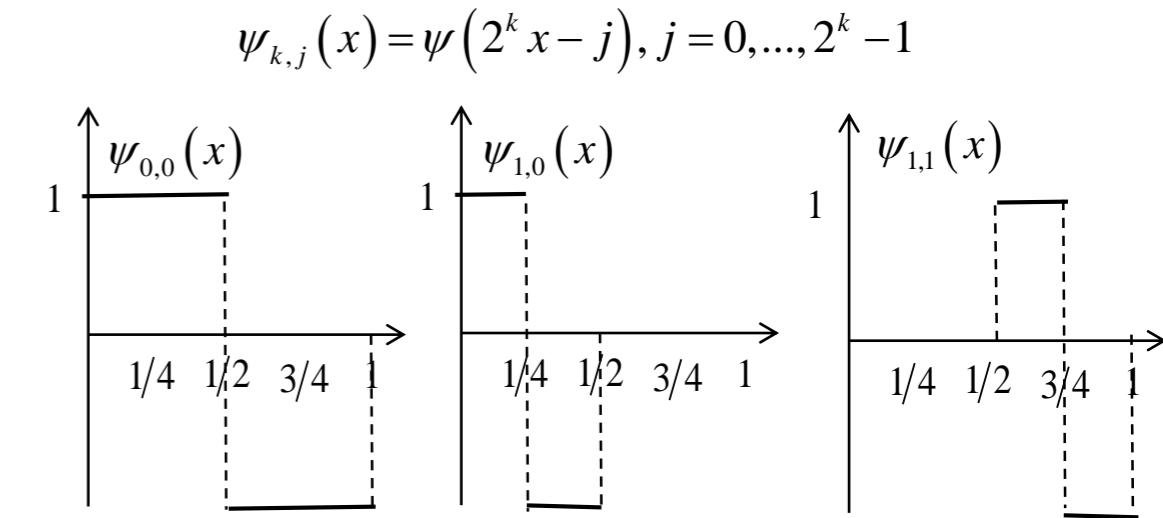
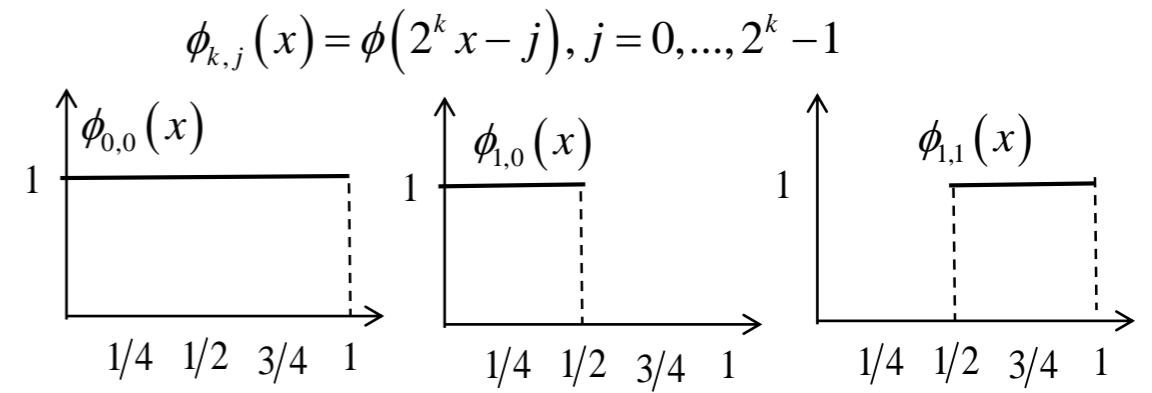
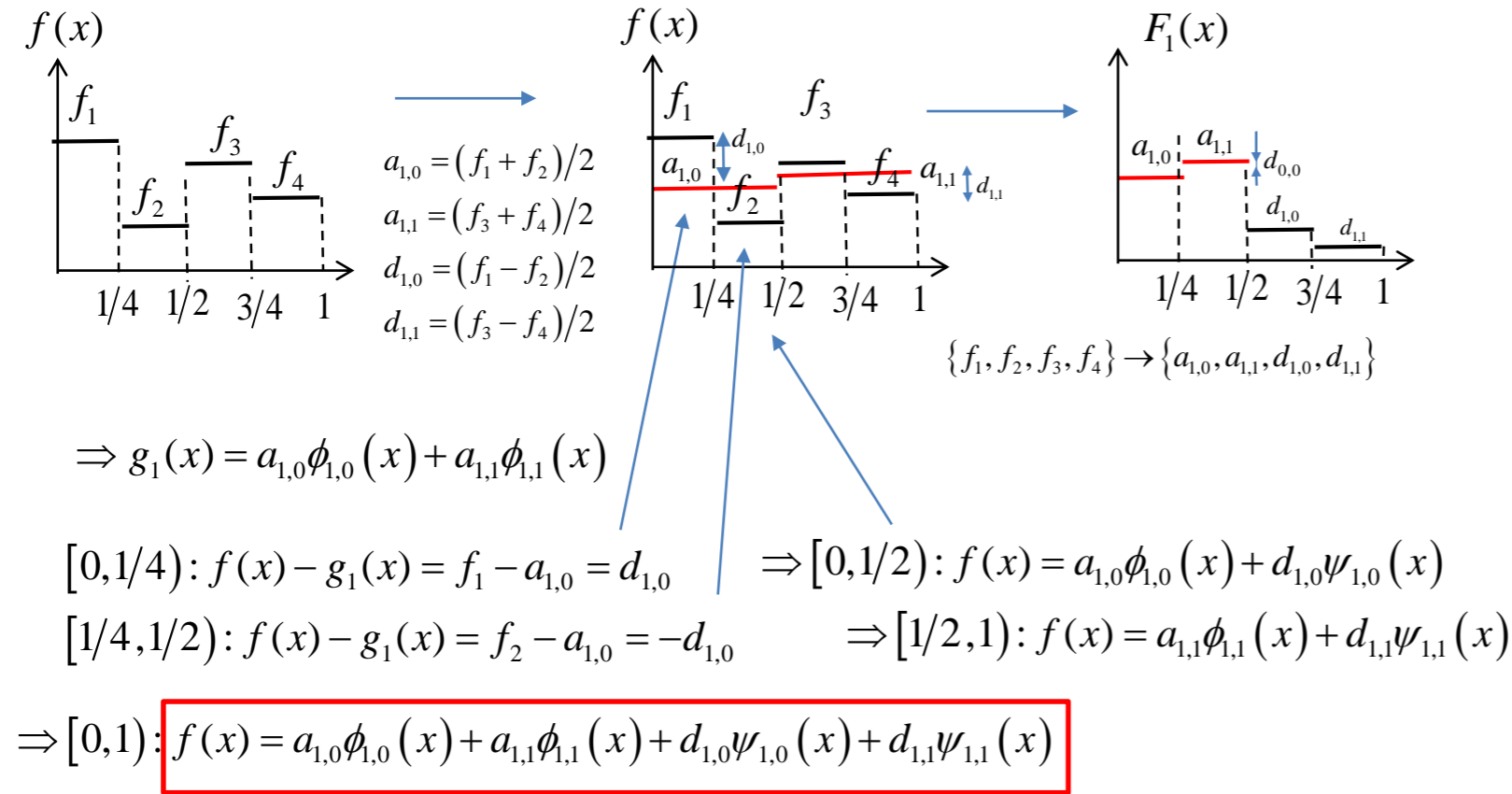
$$[1/4, 1/2]: f(x) - g_1(x) = f_2 - a_{1,0} = -d_{1,0}$$



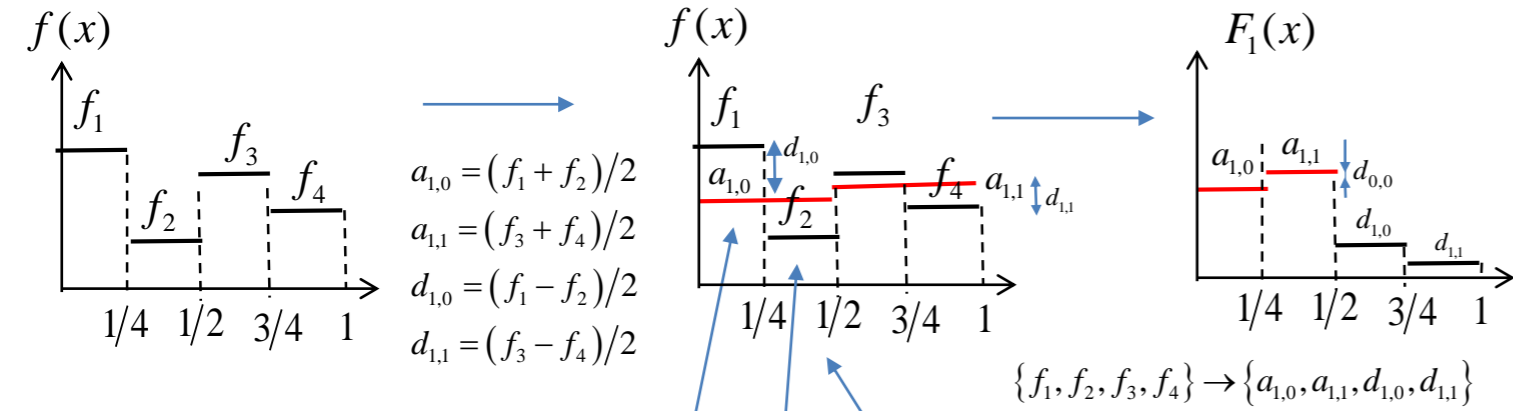
$$\psi_{k,j}(x) = \psi(2^k x - j), j = 0, \dots, 2^k - 1$$



Введение в кратномасштабный анализ. Вейвлеты Хаара.



Введение в кратномасштабный анализ. Вейвлеты Хаара.

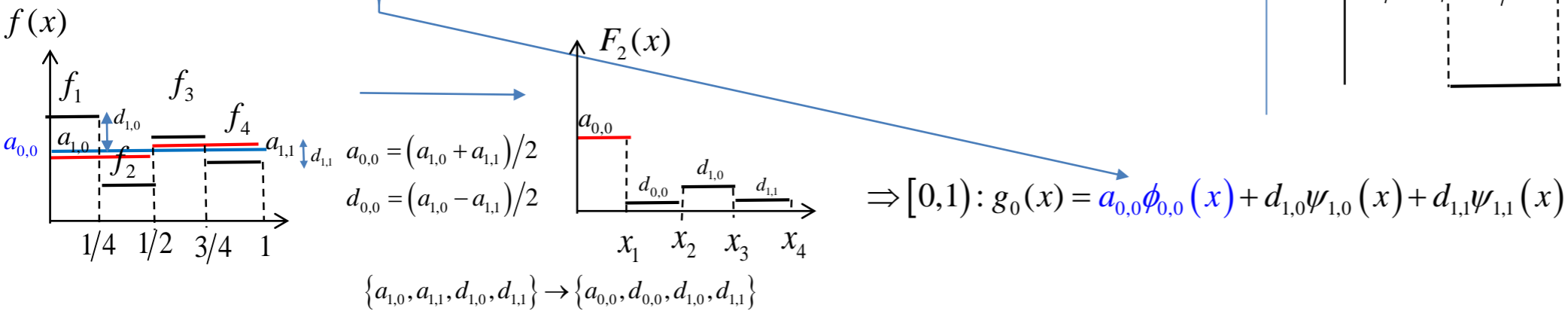


$$\Rightarrow g_1(x) = a_{1,0}\phi_{1,0}(x) + a_{1,1}\phi_{1,1}(x)$$

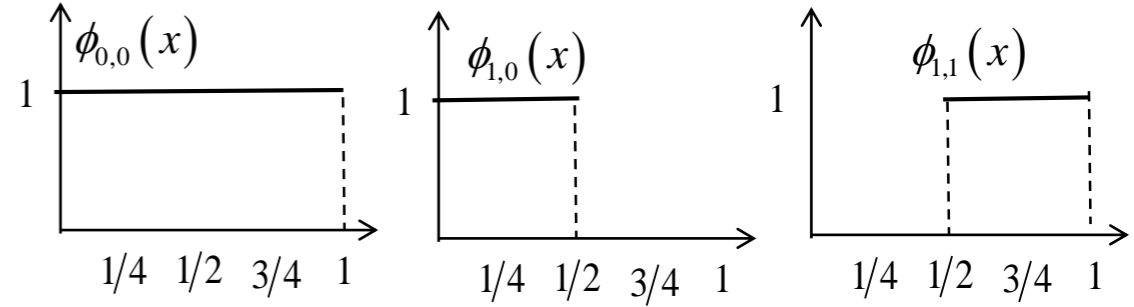
$$[0, 1/4]: f(x) - g_1(x) = f_1 - a_{1,0} = d_{1,0} \Rightarrow [0, 1/2]: f(x) = a_{1,0}\phi_{1,0}(x) + d_{1,0}\psi_{1,0}(x)$$

$$[1/4, 1/2]: f(x) - g_1(x) = f_2 - a_{1,0} = -d_{1,0} \Rightarrow [1/2, 1): f(x) = a_{1,1}\phi_{1,1}(x) + d_{1,1}\psi_{1,1}(x)$$

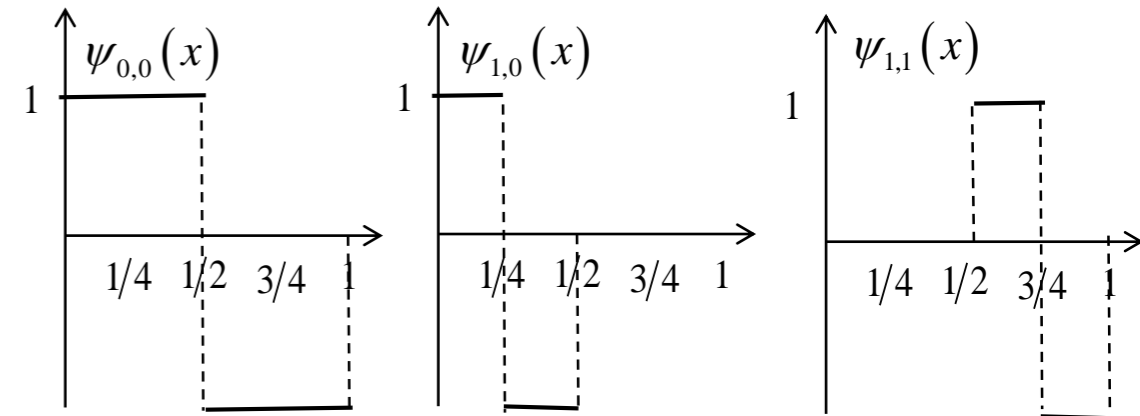
$$\Rightarrow [0, 1): f(x) = a_{1,0}\phi_{1,0}(x) + a_{1,1}\phi_{1,1}(x) + d_{1,0}\psi_{1,0}(x) + d_{1,1}\psi_{1,1}(x)$$



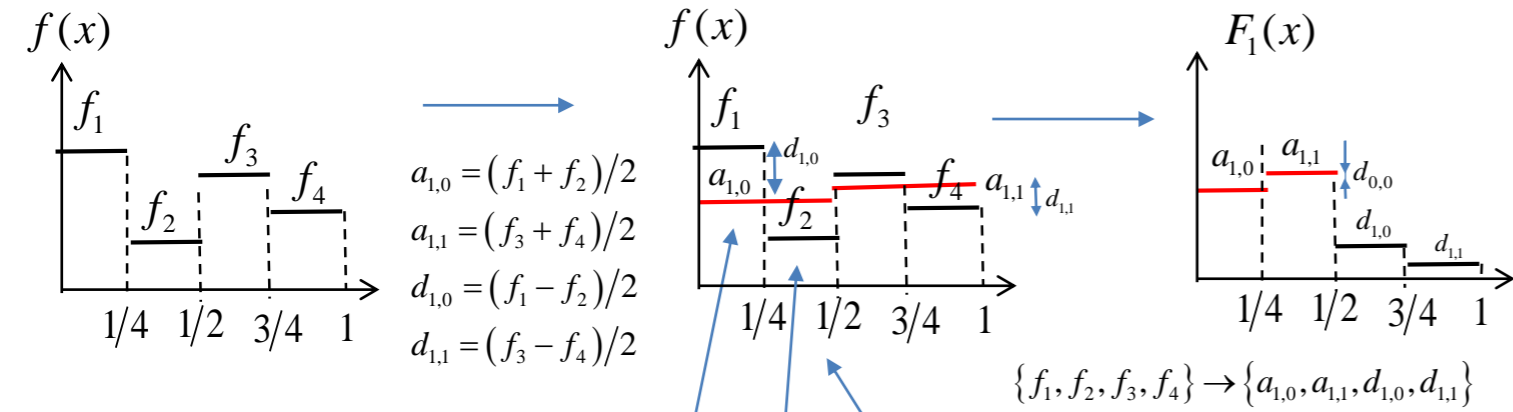
$$\phi_{k,j}(x) = \phi(2^k x - j), j = 0, \dots, 2^k - 1$$



$$\psi_{k,j}(x) = \psi(2^k x - j), j = 0, \dots, 2^k - 1$$



Введение в кратномасштабный анализ. Вейвлеты Хаара.

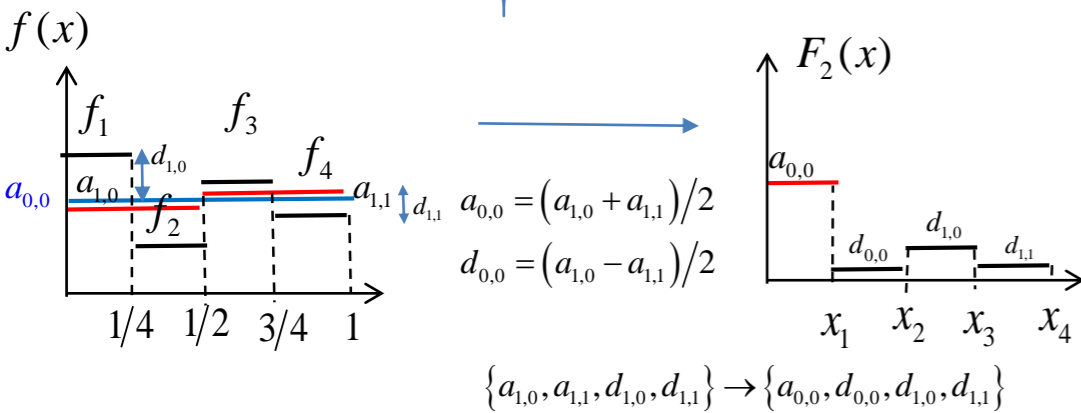


$$\Rightarrow g_1(x) = a_{1,0}\phi_{1,0}(x) + a_{1,1}\phi_{1,1}(x)$$

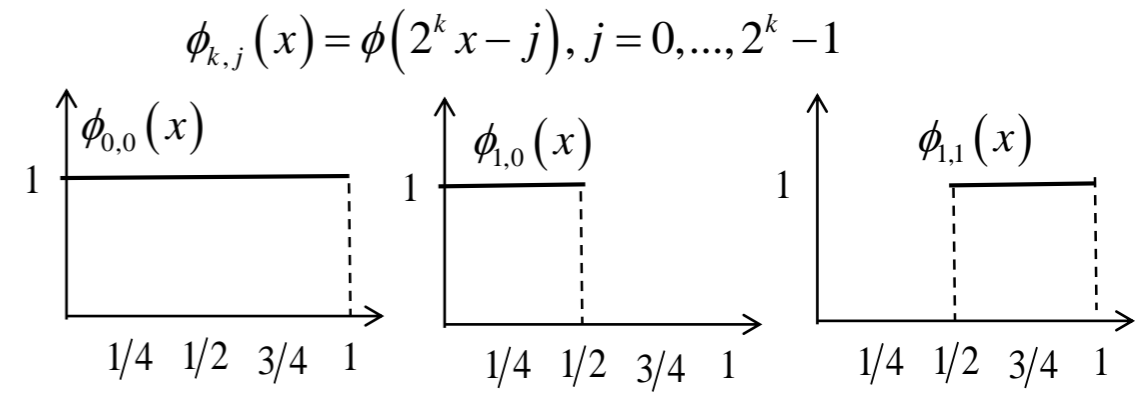
$$[0, 1/4): f(x) - g_1(x) = f_1 - a_{1,0} = d_{1,0} \Rightarrow [0, 1/2): f(x) = a_{1,0}\phi_{1,0}(x) + d_{1,0}\psi_{1,0}(x)$$

$$[1/4, 1/2): f(x) - g_1(x) = f_2 - a_{1,0} = -d_{1,0} \Rightarrow [1/2, 1): f(x) = a_{1,1}\phi_{1,1}(x) + d_{1,1}\psi_{1,1}(x)$$

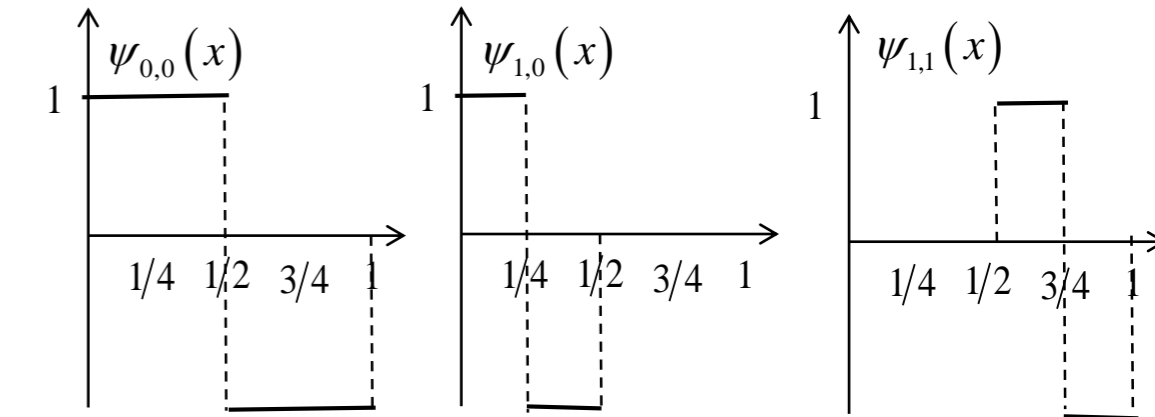
$$\Rightarrow [0, 1): f(x) = \underbrace{a_{1,0}\phi_{1,0}(x) + a_{1,1}\phi_{1,1}(x)}_{g_1(x)} + d_{1,0}\psi_{1,0}(x) + d_{1,1}\psi_{1,1}(x) \text{ - Уровень 1}$$



$$\Rightarrow [0, 1): g_0(x) = a_{0,0}\phi_{0,0}(x) + d_{1,0}\psi_{1,0}(x) + d_{1,1}\psi_{1,1}(x)$$



$$\psi_{k,j}(x) = \psi(2^k x - j), j = 0, \dots, 2^k - 1$$



$$[0, 1/4): f(x) - g_0(x) = f_1 - a_{0,0} - d_{1,0} = d_{0,0}$$

$$[1/4, 1/2): f(x) - g_0(x) = f_2 - a_{0,0} + d_{1,0} = d_{0,0}$$

$$[1/2, 1): f(x) - g_0(x) = -d_{0,0}$$

Декомпозиция функции на средние (“размытые”) значения и детализирующие значения:

$$\Rightarrow [0, 1): f(x) = a_{0,0}\phi_{0,0}(x) + d_{0,0}\psi_{0,0}(x) + d_{1,0}\psi_{1,0}(x) + d_{1,1}\psi_{1,1}(x) \text{ - Уровень 2}$$