Часть V

Алгебраические решётки

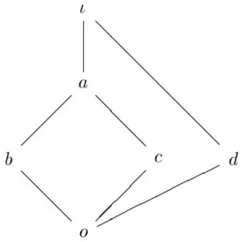
Разделы

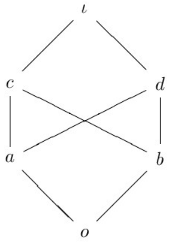
Решёточно упорядоченное множество

Определение

Ч.у. множество, в котором для любых элементов a и b существуют $\inf\{a, b\}$ и $\sup\{a, b\}$ называют *решёточно упорядоченным*.

Решётка называется *полной*, если любое подмножество её элементов имеет точные верхнюю и нижнюю грани.





Алгебраические решётки: определение

Определение

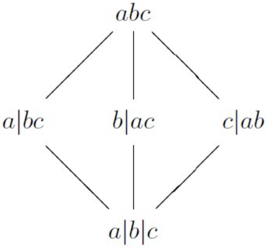
Алгебраическая решётка — это тройка $\mathbf{L} = \langle L, \sqcup, \sqcap \rangle$, где L — непустое множество, а $\sqcup$ (*объединение*), $\sqcap$ (*пересечение*) — бинарные операции на нём, подчиняющимися парам законов коммутативности, ассоциативности, идемпотентности и поглощения:

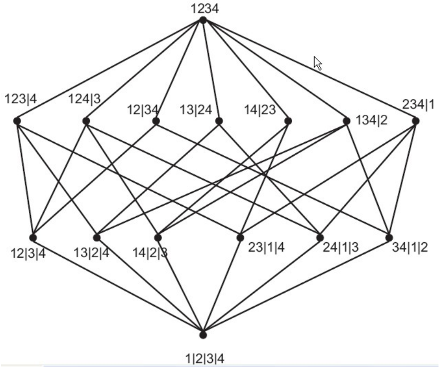
$$x \sqcup y = y \sqcup x; \qquad x \sqcap y = y \sqcap x;$$
$$x \sqcup (y \sqcup z) = (x \sqcup y) \sqcup z; \qquad x \sqcap (y \sqcap z) = (x \sqcap y) \sqcap z;$$
$$x \sqcup x = x; \qquad x \sqcap x = x,$$
$$x \sqcap (x \sqcup y) = x; \qquad x \sqcup (x \sqcap y) = x.$$

Принцип двойственности для решёток

Любое утверждение, истинное для любых произвольных элементов решётки, остаётся таковым при замене $\sqcap \leftrightarrow \sqcup$.

Решётка всех разбиений множества — беллиан





Беллианы множеств $\{a, b, c\}$ и $\{1, 2, 3, 4\}$

$|\Pi_n| = B(n)$ — количество всевозможных эквивалентностей n-элементном множестве — *число Белла*.

$$B(3) = 5,\ B(4) = 15,\ \dots,\ B(20) = 51724158235372,\ \dots$$

Эквивалентность решёточно упорядоченных множеств и решёток

Теорема

1. *Пусть* $\langle P, \leqslant \rangle$ *— решёточно упорядоченное множество. Если для любых элементов* x *и* y *из* P *положить*

$$x \sqcup y \overset{\text{def}}{=} \sup\{x, y\}, \qquad x \sqcap y \overset{\text{def}}{=} \inf\{x, y\},$$

то структура $\langle P, \sqcup, \sqcap \rangle$ *будет решёткой.*

2. *Пусть* $\langle L, \sqcup, \sqcap \rangle$ *— решётка. Если для любых элементов* x *и* y *из* L *положить*

$$x \leqslant y \overset{\text{def}}{=} x \sqcap y = x \quad (\textit{или } x \leqslant y \overset{\text{def}}{=} x \sqcup y = y),$$

то структура $\langle L, \leqslant \rangle$ *будет решёточно упорядоченным множеством.*

Эквивалентность решёточно упорядоченных множеств и решёток...

Теорема устанавливает взаимно-однозначное соответствие между решёточно упорядоченными множествами и решётками: из одной АС всегда можно получить другую.

Поэтому термин «решётка» применяют для обоих понятий: любую решётку можно представить либо как упорядоченное множество, либо как алгебру.

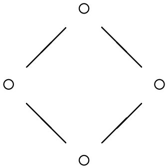
решёточно упорядоченные множества	решётки
$\langle \mathbb{R}, \leqslant \rangle$	$\langle \mathbb{R}, \max, \min \rangle$
$\langle \mathbb{N}, \mid \rangle$	$\langle \mathbb{N}, \vee, \wedge \rangle$
$\langle \mathcal{P}(A), \subseteq \rangle$	$\langle \mathcal{P}(A), \cup, \cap \rangle$

Возможность такого рассмотрения решёток позволяет вводить в них как порядковые, так и алгебраические операции, что приводит к богатой и многообразной в приложениях теории.

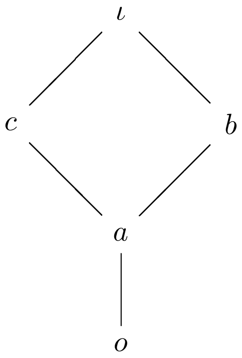
Решётки: примеры

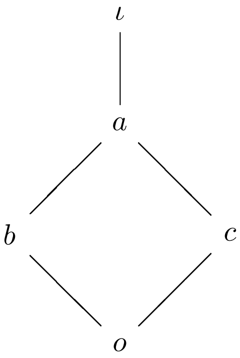
Решётки $(A \neq \varnothing)$ —

- все булевы алгебры;
- все цепи;
- единственные 1-х, 2-х и 3-хэлементные решётки — цепи $\mathbf{1}$, $\mathbf{2}$, $\mathbf{3}$;
- 4-элементные решётки — $\mathbf{4}$ и B^2:

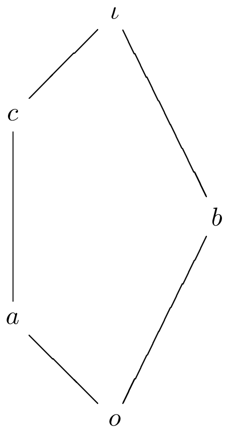


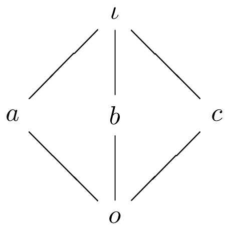
5-элементные решётки —





5-элементные решётки — пятиугольник N_5 и бриллиант M_3





+ цепь **5**

Решётки: универсальные грани и атомы

Наименьший элемент решётки (как р.у.м.) — её *ноль* (o), наибольший — *единица* (ι).
Это *универсальные грани* решётки.
Решётка может их и не иметь: $\mathbb{Z}$, $\langle \mathbb{N}, | \rangle$ — только $o = 1$.

Все конечные решётки содержат o и ι.

Определение

Элемент $a \neq o$ решётки L с нулём o называется *атомом* если для любого элемента $x \in L$ справедливо

$$a \sqcap x = \left[\begin{array}{l} o, \\ a. \end{array} \right.$$

В последнем случае говорят, что *элемент x содержит атом a*.

Гомоморфизмы решёток

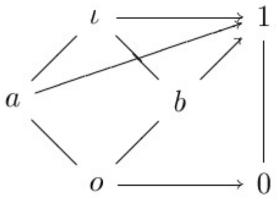
Определение

Отображение φ решётки $\mathbf{L}$ в решётку $\mathbf{L}'$ называется *алгебраическим* или *решёточным гомоморфизмом*, если для любых $x, y \in L$ справедливы равенства

$$\varphi(x \sqcup y) = \varphi(x) \sqcup \varphi(y) \quad \text{и} \quad \varphi(x \sqcap y) = \varphi(x) \sqcap \varphi(y).$$

Биективный решёточный гомоморфизм — *решёточный изоморфизм*.
Изоморфизм решётки в себя называется *автоморфизмом*.
Инъективные и сюръективные решёточные гомоморфизмы называют *решёточными* (или *алгебраическими*) *мономорфизмами* (*вложениями*) и *эпиморфизмами* соответственно.

Связь порядкового и решёточного гомоморфизмов решёток



1) Порядковые гомоморфизмы решёток как ч.у. множеств, вообще говоря, не являются алгебраическими.

2) Любое отображение одной решётки на другую, сохраняющее хотя бы одну из решёточных операций, является порядковым гомоморфизмом.

В случае изоморфизма проблемы снимаются.

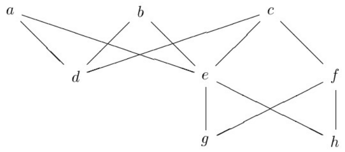
Теорема (об эквивалентности двух видов изоморфизма решёток)

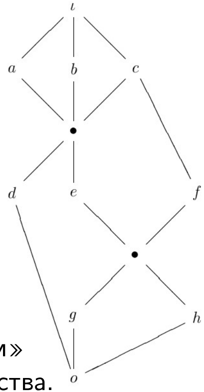
Две решётки алгебраически изоморфны, iff они изоморфны как ч.у. множества.

Пополнение произвольного ч.у. множества до решётки

Теорема (замыкание Макнила)

Всякое ч.у. множество можно вложить в подходящую полную решётку с сохранением всех точных граней.





Универсальные грани и элементы,
отмеченные знаком • суть сечения Макнила.

Теорема показывает, что знаменитое построение Р. Дедекиндом действительных чисел «сечениями» на самом деле применимо для любого ч.у. множества.

Идеалы решёток

Определение

Пусть $\langle L, \sqcup, \sqcap \rangle$ — решётка. Непустое подмножество I элементов L называется её *(решёточным) идеалом*, если

❶ $(x \in I) \,\&\, (y \leqslant x) \;\Rightarrow\; y \in I$ и ❷ $x, y \in I \;\Rightarrow\; x \sqcup y \in I$.

Двойственно, непустое подмножество F элементов L называется её *решёточным фильтром*, если

❶ $(x \in F) \,\&\, (x \leqslant y) \;\Rightarrow\; y \in F$ и ❷ $x, y \in F \;\Rightarrow\; x \sqcap y \in F$.

Непустое подмножество I оказывается *решёточным идеалом*, iff для любых её элементов x и y справедливо

$$x, y \in I \;\Leftrightarrow\; x \sqcup y \in I$$

и аналогично для фильтров.

Решётки: теоремы о вложениях

Теорема (о представлении решёток)

Всякая решётка может быть вложена в булеан подходящего множества с сохранением всех точных нижних граней.

Теорема (Макнил)

Всякую решётку можно вложить в подходящую полную решётку с сохранением всех точных граней.

Теорема

Всякую конечную решётку можно вложить в конечную решётку разбиений.

Подрешётки

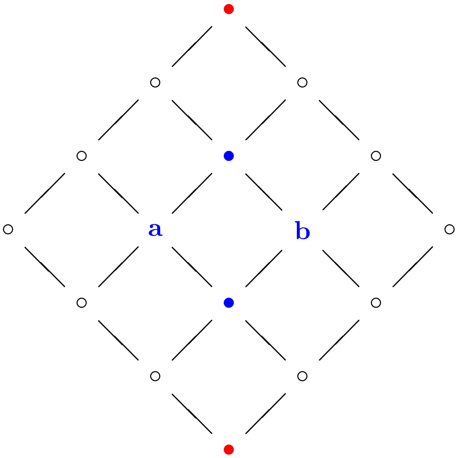
Определение

Непустое подмножество L' носителя решётки $\mathbf{L} = \langle L, \sqcup, \sqcap \rangle$ называется её *подрешёткой* (символически $\mathbf{L}' \leqslant \mathbf{L}$), если $\mathbf{L}'$ устойчиво относительно сужений $\sqcup$ и $\sqcap$.

Каждое подмножество решётки L является подрешёткой, iff L — цепь.

Из определения следует, что подмножество элементов решётки $\mathbf{L}$ может быть решёткой относительно наследуемого частичного порядка, но не подрешёткой L.

Подрешётка и не-подрешётка решётки $\mathbf{L} = 4 \times 4$



$\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \bullet, \bullet\} \leqslant \mathbf{4}^2$, но $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \bullet, \bullet\} \not\leqslant \mathbf{4}^2$

Разделы

Модулярные решётки

Определение

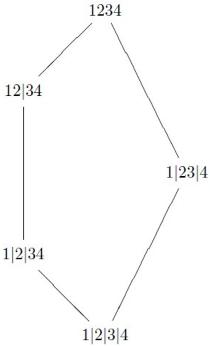
Решётка $\langle L, \sqcup, \sqcap \rangle$ называется *модулярной*, если для любых $x, y, z \in L$ в ней выполняется следующий *модулярный закон*

$$Mod\colon\ x \leqslant y \ \Rightarrow\ x \sqcup (y \sqcap z) = y \sqcap (x \sqcup z).$$

Пример

1. Модулярными являются все цепи, решётка $\langle \mathbb{N}, | \rangle$, булевы алгебры и их подрешётки.
2. Решётка $NSub\, G$ всех нормальных подгрупп группы G образует модулярна (пересечение групп — всегда группа, а объединение нормальных подгрупп совпадает с их произведением).
3. Решётка всех эквивалентностей на данном множестве в общем случае не модулярна.

Пятиугольник N_5 — немодулярная решётка



Решётка всех эквивалентностей на данном множестве в общем случае не модулярна.

$$\alpha = (1|2|34),\ \beta = (1|23|4),\ \gamma = (12|34),\ \alpha \leqslant \gamma$$
$$\alpha \sqcup (\gamma \sqcap \beta) = \alpha \sqcup o = \alpha \neq \gamma \sqcap (\alpha \sqcup \beta) = \gamma \sqcap \iota = \gamma.$$

Немодулярность N_5 оказывается ключевой:

Теорема (критерий модулярности решётки)

Решётка модулярна, iff никакая её подрешётка не изоморфна пятиугольнику N_5.

Дистрибутивные решётки

Определение

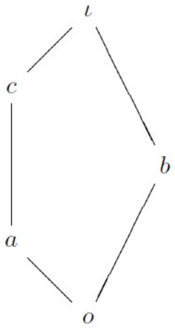
Решётка $\langle L, \sqcup, \sqcap \rangle$ называется *дистрибутивной*, если в ней выполняются дистрибутивные законы

$$(x \sqcup y) \sqcap z = (x \sqcap z) \sqcup (y \sqcap z);$$
$$(x \sqcap y) \sqcup z = (x \sqcup z) \sqcap (y \sqcup z).$$

Пример

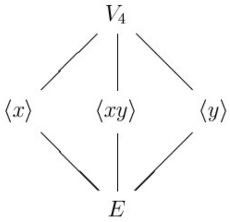
1. Все цепи, булевы алгебры и их подрешётки дистрибутивны.
2. Решётка всех подпространств векторного пространства, упомянутая выше в качестве примера модулярной решётки, не является дистрибутивной.
3. Решётка $\mathrm{Sub}\, C$ всех подгрупп циклической группы C дистрибутивна.

Всякая дистрибутивная решётка модулярна



$(a \sqcup b) \sqcap c = \iota \sqcap c = c \neq (a \sqcap c) \sqcup (b \sqcap c) = a \sqcup o = a$

Модулярный закон — ослабленная форма второго дистрибутивного закона



$V_4 = \langle\, e, x, y, xy \,\rangle$ — четверная Клейна, решётка $Sub\, V_4 \cong M_3$ (ромб) подгрупп V_4 (все они нормальны) модулярна, но не дистрибутивна: $a = \langle x \rangle$, $b = \langle y \rangle$, $c = \langle xy \rangle$,

$$(a \sqcup b) \sqcap c = \iota \sqcap c = c \neq (a \sqcap c) \sqcup (b \sqcap c) = o \sqcup o = o.$$

Критерий дистрибутивности решётки

Недистрибутивность M_3, оказывается ключевой: справедлива

Теорема

Модулярная решётка является дистрибутивной, iff никакая её подрешётка не изоморфна ромбу M_3.

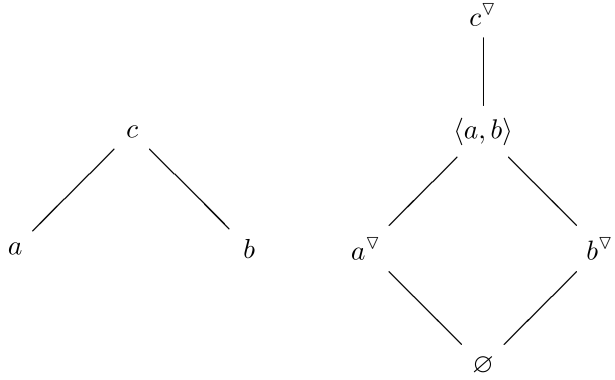
Следствие (критерий дистрибутивности решётки)

Решётка дистрибутивна, iff никакая её подрешётка не изоморфна ни пятиугольнику N_5, ни ромбу M_3.

Дистрибутивность решётки $J(\mathbf{P})$

Лемма

$J(\mathbf{P}) \leqslant \langle \mathcal{P}(\mathbf{P}), \cup, \cap \rangle \Rightarrow$ *решётка $J(\mathbf{P})$ дистрибутивна.*



Z_3, $J(Z_3)$

Неразложимые элементы решёток

В конечных дистрибутивных решётках важную роль играют не атомы (например, в конечной цепи всего один атом), а неразложимые в объединение элементы.

Определение

Элемент $z \neq o$ решётки назовём *неразложимым*, если из $z = x \sqcup y$ следует либо $z = x$, либо $z = y$.

Пример

1. Атомы любой решётки неразложимы, и в атомной булевой алгебре нет других неразложимых элементов.
2. В решётке $\langle \mathbb{N}, | \rangle$ неразложимы только степени простых чисел.
3. В цепи ни один элемент не является разложимым.

Неразложимые элементы решёток...

Лемма

В конечной решётке каждый ненулевой элемент может быть представлен в виде объединения неразложимых элементов.

Доказательство

Если элемент b *неразложим, то* $b = b \sqcup b$.
Пусть $b = b_1 \sqcup b_2$ *и* $b_1 \neq b \neq b_2$.

- *Если и* b_1, *и* b_2 *неразложимы, то лемма доказана.*
- *В противном случае представляем* b_1 *и/или* b_2 *в виде объединения строго содержащихся в них элементов, и т.д. В силу конечности решётки указанный процесс закончится, и исходный элемент* b *будет представлен в виде объединения неразложимых элементов.*

Представление произвольных элементов решётки через неразложимые

Обозначения для подмножеств элементов (дистрибутивной) решётки $\mathbf{L}$

- $\operatorname{Irr}\mathbf{L}$ — множество неразложимых в объединение элементов $\mathbf{L}$;
- $\operatorname{Irr}(x) = \{\, y \in \operatorname{Irr}\mathbf{L} \mid y \leqslant x \,\}$ — множество неразложимых элементов $\mathbf{L}$, содержащихся в x.

Доказанная лемма утверждает, что в конечной решётке каждый ненулевой элемент x допускает представление:

$$x = \bigsqcup_{a \in \operatorname{Irr}(x)} a.$$

Изоморфизм ч.у. множества и неразложимых элементов решётки его порядковых идеалов

Лемма

Если $\mathbf{P}$ *— ч.у. множество, то* $\mathrm{Irr}\, J(\mathbf{P}) \cong \mathbf{P}$.

Доказательство

Пусть $\mathbf{P}$ *— ч.у. множество и тогда* $J(\mathbf{P})$ *— дистрибутивная решётка его порядковых идеалов. Порядковый идеал решётки неразложим, iff он является главным:*

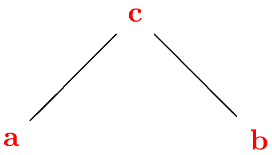
$$\mathrm{Irr}\, J(\mathbf{P}) \cong J_0(\mathbf{P}) = \{\, x^{\triangledown} \mid x \in P \,\}.$$

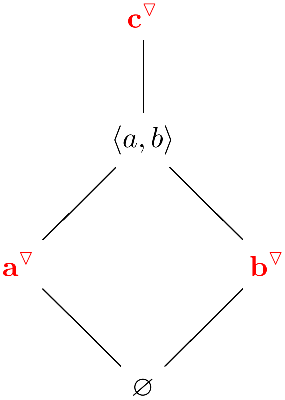
Ранее был установлен изоморфизм между ч.у. множеством и совокупностью его главных идеалов:

$$\varphi : P \to J(P), \quad \varphi(x) = x^{\triangledown},$$

поэтому $P \cong J_0(P) = \mathrm{Irr}\, J(P)$.

$\mathrm{Irr}\ J(\mathbf{P}) \cong \mathbf{P}$: пример





Z_3, множество $Irr\,J(Z_3)$ выделено

Фундаментальная теорема о конечных дистрибутивных решётках

Теорема (ФТКДР, *Г. Биркгоф*)

Всякая конечная дистрибутивная решётка $\mathbf{L}$ *изоморфна решётке порядковых идеалов ч.у. множества её неразложимых элементов:* $\mathbf{L} = J(Irr\,\mathbf{L})$.

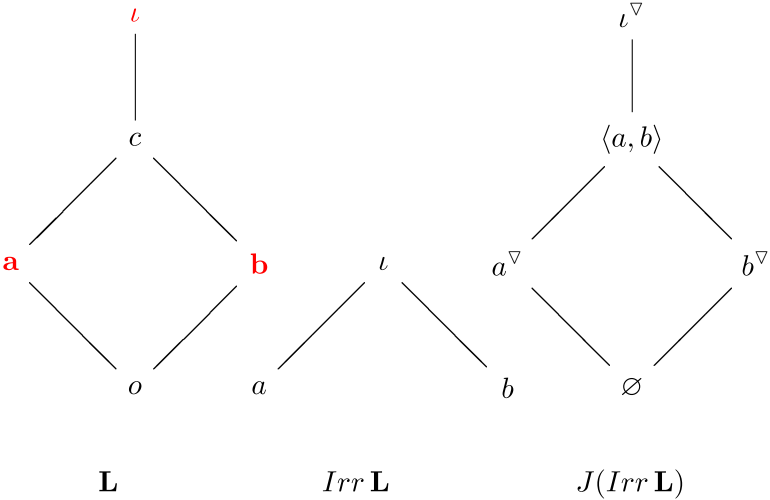
Доказательство (набросок)

Пусть $\mathbf{L} = \langle L, \sqcup, \sqcap \rangle$ *— конечная дистрибутивная решётка и* $J(\mathrm{Irr}\ \mathbf{L})$ *— решётка порядковых идеалов ч.у. множества* $\mathrm{Irr}\ \mathbf{L}$*. Рассмотрим отображение* $\psi : L \to J(\mathrm{Irr}\ \mathbf{L})\,, \quad \psi(x) = \mathrm{Irr}(x)$.

- *Отображение* ψ *есть биекция.*
- $x \leqslant y \Leftrightarrow \mathrm{Irr}(x) \subseteq \mathrm{Irr}(y) \Leftrightarrow \psi(x) \subseteq \psi(y)$.

$\therefore\ \psi$ *— (порядковый) изоморфизм между* $\mathbf{L}$ *и* $J(\mathrm{Irr}\ \mathbf{L})$.

ФТКДР $\mathbf{L} = J(Irr\,\mathbf{L})$: иллюстрация



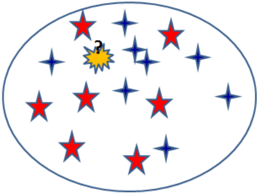
Разделы

Классификация по прецедентам: постановка задачи

1. Множество объектов $\mathcal{X}$ разделено на несколько подмножеств (*классов*).
2. Информация о таком разбиении содержится только в указании о принадлежности к данным классам элементов конечной *обучающей последовательности (выборки)* из $\mathcal{X}$, элементы которой называют *прецедентами*.
3. Объекты имеют описание на некотором формальном языке, указывающем степень обладания объектами конечным числом признаков из множества $M = \{x_1, \ldots, x_n\}$.

Классификация: пространство объектов

Распознавание образов



пространство объектов

 - объекты класса A

 - объекты класса B

 - объект неизвестного класса

прецедент	класс
Объект 1	A
Объект 2	B
…	…
Объект L	A
Объект X	?

- **Поиск полезных ископаемых**
- **Медицинская диагностика**
- **Прогнозирование**
- **…**

Классификация: признаковая матрица

Часто используется описание в виде *объектно-признаковой* $(0,1)$-*матрицы* $\mathcal{M}$, в которой объектам соответствуют строки, признакам — столбцы, а элементы матрицы кодируют наличие/отсутствие признаков у объектов.

Класс K_i	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
Объект 1	1	0	$\ldots$	1
Объект 2	0	1	$\ldots$	1
Объект 3	1	1	$\ldots$	0
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
Объект m_i	0	1	$\ldots$	0

— для каждого из классов $K_1, \ldots, K_s$, $s \geqslant 2$. Далее $s = 2$.

Классификация: язык описания и решающее правило

Задача обучения

По матрице $\mathcal{M}$ сформулировать *решающее правило*, которое по описанию нового объекта из $\mathcal{X}$ указывало бы имя класса, его содержащего.

Решающее правило должно максимизировать некоторой функционал, определяющей *качество классификации*.

Таким функционалом в подавляющем числе случаев является минимум (не абсолютный) числа ошибок классификации, однако может также учитываться, например, и доля отказов.

Классификация: подходы к решению задачи

- метрические методы (*NN*, ...);
- разделяющие поверхности (*SVM*, ...);
- потенциальные функции;
- логические методы;
- коллективные решающие правила (*области компетенции, голосование, алгебраический подход*);
- структурные методы;
- ...
- реляционный подход (*АФП (FCA)*, ...)

Wille R., Ganter B. Formal concept analysis. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1999.

Соответствия Галуа: определение

Далее запись отображений:
$f(a)$ записывается как af, а $f(A)$ записывается как Af.

Определение

Пусть $\mathcal{P} = \langle P, \sqsubseteq_P \rangle$ и $\mathcal{Q} = \langle Q, \sqsubseteq_P \rangle$ — ч.у. множества.
Пара отображений (φ, ψ), $\varphi : P \to Q$, $\psi : Q \to P$,
удовлетворяющая свойствам

1. φ и ψ антиизотонны;
2. $p\varphi\psi \sqsupseteq p$ и $q\psi\varphi \sqsupseteq q$, $p \in P$, $q \in Q$ ($\varphi\psi$ и $\psi\varphi$ — *операторы замыкания* на P и Q соответственно).

называется *соответствием Галуа* между $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$.

Справедливы и более сильные соотношения

$$p \sqsubseteq q\psi \Leftrightarrow q \sqsubseteq p\varphi \quad \text{и} \quad \varphi = \varphi\psi\varphi,\ \psi = \psi\varphi\psi.$$

Понятие: философское отступление...

Понятие — это ...

... целостная совокупность суждений об отличительных признаках вещей и отношений между ними

Примеры:

искусство, *наука*, ...

Объём понятия — это ...

... *совокупность всех вещей*, обладающих зафиксированными в данном понятии признаками

Примеры:

искусство: *литература*, *живопись*, *архитектура*,...
наука: *биология*, *физика*, *химия*...

Понятие: философское отступление...

Содержание понятия — это ...

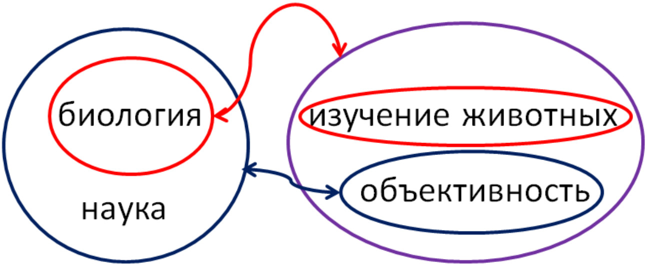
... *совокупность свойств*, присущих всем объектам данного понятия

Примеры:

искусство: *результат отражения действительности в форме чувственных образов, создание выразительных форм, ...*
наука: *познавательная деятельность, объективность, систематичность, ...*

Закон обратного отношения между содержанием и объёмом понятия:

Бóльшее по объёму понятие имеет меньшее содержание



Антимонотонность соответствий Галуа отражает этот закон

Классификация: положительные и отрицательные примеры

Рассматриваются задачи, в которых множество $\mathcal{X}$ разбито на два непересекающихся класса:
$\mathcal{X}^+$ (*положительный*) и $\mathcal{X}^-$ (*отрицательный*)
относительно обладания/необладания их объектами некоторым целевым признаком $z \notin M$.

Прецеденты из данных классов называются, соответственно, *положительными* и *отрицательными примерами*.

Имеем 2 класса и $z = "x \in \mathcal{X}^+"$

АФП: формальный контекст

Пусть

G — *множество объектов*;
M — *множество признаков*;
I — соответствие между G и M называемое *отношением инцидентности*, т.е. gIm означает, что объект $g \in G$ обладает признаком $m \in M$.

Определение

Тройка $K = (G, M, I)$ называется *формальным контекстом*.

В конечном случае контекст может быть задан в виде объектно-признаковой $(0,1)$-матрицы.

Соответствия Галуа в АФП и нотация

Утверждение

Если для произвольных $A \subseteq G$ *и* $B \subseteq M$ *ввести отображения*

$$\varphi : 2^G \to 2^M \quad \text{и} \quad \psi : 2^M \to 2^G$$

такие, что

$$A\varphi = \{ m \in M \mid \forall g \in A\, (gIm) \} = A',$$
$$B\psi = \{ g \in G \mid \forall m \in B\, (gIm) \} = B',$$

то пара отображений (φ, ψ) *будет соответствием Галуа между ч.у. множествами* 2^G *и* 2^M*,*
упорядоченными по включению.

Формальные объём и содержание

Определение

Пусть дан контекст $K = (G, M, I)$.
Пара подмножеств $(A,\ B)$, где $A \subseteq G,\ B \subseteq M$, и таких, что $A' = B$ и $B' = A$, называется *формальным понятием* данного контекста с *формальным объёмом* A и *формальным содержанием* B.

Если контекст представлен в виде объектно-признаковой $(0, 1)$-матрицы, то формальному понятию соответствует максимальная её подматрица, заполненная единицами.

Формальные объём и содержание — замкнутые, соответственно, относительно $\varphi\psi$ и $\psi\varphi$ множества.

Решётка формальных понятий

Теорема (основная АФП)

Множество всех формальных понятий данного контекста K образует полную решётку, обозначаемую $\mathfrak{B}(K)$, относительно операций $\vee$ (объединение) и $\wedge$ (пересечение):

$$(A_1, B_1) \vee (A_2, B_2) = \big((B_1 \cap B_2)', B_1 \cap B_2\big),$$
$$(A_1, B_1) \wedge (A_2, B_2) = \big(A_1 \cap A_2, (A_1 \cap A_2)'\big)$$

и называемую решёткой формальных понятий.

$$(A_1, B_1) \sqsubseteq (A_2, B_2) \Rightarrow (A_1 \subseteq A_2) \,\&\, (B_1 \supseteq B_2)$$

У решётки $\mathfrak{B}(K)$ формального контекста $K = (G, M, I)$:

единица ι — формальное понятие (G, G');
атомы — формальные понятия вида (g, g');
нуль o — формальное понятие $(\varnothing, M)$ с пустым объёмом.

Два контекста: объём и содержание

Данные для обучения классификации описываются *положительным* $K_+ = (G_+, M, I_+)$ и *отрицательным* $K_- = (G_-, M, I_-)$ *контекстами*.

Операторы Галуа в этих контекстах обозначаются соответствующими верхними индексами: A^+, A^-, B^+ и т.д.

Определение

Формальное понятие $(A_+, B_+) \in K_+$ называется *положительным*.
A_+ — положительный формальный объём,
B_+ — положительное формальное содержание.

Аналогично определяются отрицательные формальные объём и содержание для контекста K_-.

Гипотезы формальных контекстов

Определение

Положительное формальное содержание B_+ положительного понятия (A_+, B_+) называется:

- *положительной $\oplus-$предгипотезой*, если $\forall(A_-, B_-) \in K_-\ (B_+ \neq B_-)$, т. е. оно не является формальным содержанием ни одного отрицательного понятия;
- *положительной $\oplus-$гипотезой*, если $\forall(g, g^-) \in K_-\ (B_+ \not\subseteq g^-)$, т. е. оно не является подмножеством содержания понятия какого-либо отрицательного примера g;
- *фальсифицированной положительной $\oplus-$гипотезой*, если $\exists(g, g^-) \in K_-\ (B_+ \subseteq g^-)$.

Отрицательные ($\ominus-$предгипотезы, ...) определяются аналогично.

Гипотеза является также и предгипотезой.

Классификация с помощью гипотез

Гипотезы используются для классификации новых объектов

Простейшее решающее правило

Пусть $g \notin \{G_+ \cup G_-\}$ — новый (неопределённый) объект.

Если его формальное содержание g' содержит хотя бы одну

- $\oplus$—гипотезу и не содержит ни одной отрицательной гипотезы, то он относится к положительному классу;
- $\ominus$—гипотезу и не содержит ни одной положительной гипотезы, то он относится к отрицательному классу.

Отказ от классификации происходит, если g':

- либо не содержит никаких гипотез (недостаток данных);
- либо содержит как положительные, так и отрицательные гипотезы (противоречие в данных).

Многозначные контексты

Для получения бинарной информации о признаках из количественных и качественных признаков используется процедура шкалирования.

Многозначный контекст — это четвёрка (G, M, Z, I), где

- G, M, Z — множества объектов, признаков и значений признаков соответственно,
- I — тернарное отношение $I \subseteq G \times M \times Z$, задающее значение $z \in Z$ признака $m \in M$ объекта $g \in G$,

причем отображение $G \times M \to Z$ функционально.

Шкалирование — это представление многозначных контекстов двузначными.

Пример «Фрукты»: постановка задачи

Задача:

построить классификатор по целевому свойству
z = *«являться фруктом»* и следующей объектно-признаковой таблице положительных и отрицательных примеров:

№	$G \setminus M$	цвет	жёсткий	гладкий	форма	z
1	**яблоко**	жёлтое	нет	да	круглое	$+$
2	**грейпфрут**	жёлтый	нет	нет	круглый	$+$
3	**киви**	зелёный	нет	нет	овальное	$+$
4	**слива**	синяя	нет	да	овальная	$+$
5	**кубик**	зелёный	да	да	кубический	$-$
6	**яйцо**	белое	да	да	овальное	$-$
7	**теннисный мяч**	(белый)	нет	нет	круглый	$-$

Пример «Фрукты»: результат шкалирования

$G \setminus M$	w	y	g	b	f	$\bar{\text{f}}$	s	$\bar{\text{s}}$	r	$\bar{\text{r}}$	z
1		$\times$				$\times$	$\times$		$\times$		$+$
2		$\times$				$\times$		$\times$	$\times$		$+$
3			$\times$			$\times$		$\times$		$\times$	$+$
4				$\times$		$\times$	$\times$			$\times$	$+$
5			$\times$		$\times$		$\times$			$\times$	$-$
6	$\times$				$\times$		$\times$			$\times$	$-$
7	$\times$					$\times$		$\times$	$\times$		$-$

$G_+ = \{1,2,3,4\}$, $G_- = \{5,6,7\}$ $\Rightarrow$ отношение I_+ представлено верхней частью таблицы, а отношение I_- — нижней.

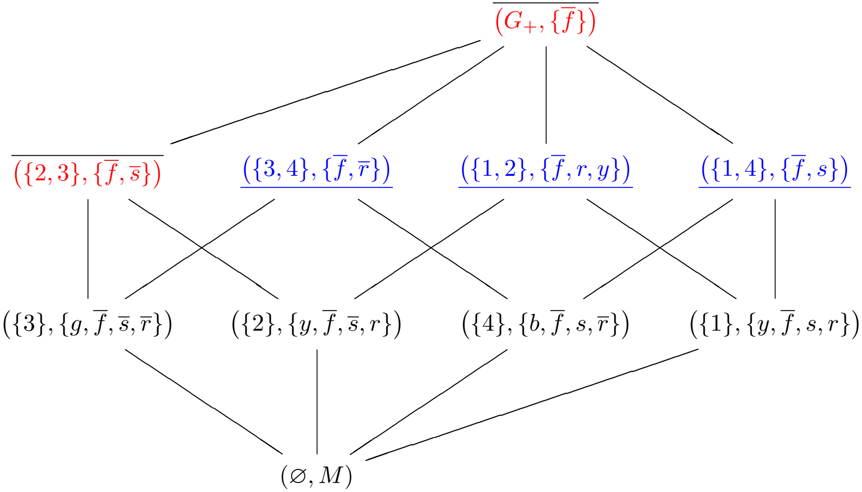
Признаки означают:

w — *белый*, y — *жёлтый*, g — *зелёный*, b — *синий*;

f — *твёрдый*, $\overline{f}$ — *мягкий*, s — *гладкий*, $\overline{s}$ — *шероховатый*;

r — *круглый*, $\overline{r}$ — *некруглый*.

Пример «Фрукты»: решётка $\mathfrak{B}(K_+)$



Пример «Фрукты»: решётка $\mathfrak{B}(K_-)$

$$
\begin{tikzcd}
 & & (G_-, \varnothing) \arrow[dll, dash] \arrow[drr, dash] & & \\
\underline{(\{6,7\},\{w\})} \arrow[d, dash] \arrow[drr, dash] & & & & \underline{(\{5,6\},\{f,s,\overline{r}\})} \arrow[dll, dash] \arrow[d, dash] \\
(\{7\},\{w,\overline{f},\overline{s},r\}) \arrow[drr, dash] & & (\{6\},\{\overline{r},f,s,w\}) \arrow[d, dash] & & (\{5\},\{f,\overline{r},s,g\}) \arrow[dll, dash] \\
 & & (\varnothing, M) & &
\end{tikzcd}
$$

Пример «Фрукты»: формирование гипотез

Формальные содержания

- $\{\overline{f}, \overline{r}\}$ (*мягкий, некруглый*),
  $\{\overline{f}, r, y\}$ (*мягкий, круглый, жёлтый*) и
  $\{\overline{f}, s\}$ (*мягкий, гладкий*)
  — являются $\oplus$−гипотезами;

- $\{\overline{f}, \overline{s}\}$ (*мягкий, шероховатый*)
  — является фальсифицированной $\oplus$−гипотезой, т.к. она — часть содержания $\{w, \overline{f}, \overline{s}, r\}$ отрицательного примера 7 (теннисный мяч);

- $\{w\}$ (*белый*) и
  $\{f, s, \overline{r}\}$ (*твёрдый, гладкий, некруглый*)
  — являются $\ominus$−гипотезами.

Пример «Фрукты»: классификация

Неопределённый объект g

- **мирабель** будет классифицирован как *фрукт*, т.к. его формальное содержание *жёлтый, мягкий, гладкий* $\{y, \overline{f}, s\}$ содержит $\oplus-$гипотезу $\{\overline{f}, s\}$ и не содержит ни одной из $\ominus-$гипотез);

- **кусок сахара** со свойствам *белый*, некруглый, твёрдый будет классифицирован как *не-фрукт*;

- **брикет пломбира** со свойствами *белый, мягкий, некруглый* вызовет отказ от классификации, поскольку $g' = \{w, \overline{f}, \overline{r}\}$ содержит как положительную $\{\overline{f}, \overline{r}\}$, так и отрицательную $\{w\}$ гипотезы.

Пример «Фрукты»: дополнение

Если считать, что теннисный мяч — зелёный, то $\mathfrak{B}(K_-)$:

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & (G_-, \varnothing) \arrow[dll, dash] \arrow[drr, dash] & & \\
\overline{(\{5,7\},\{g\})} \arrow[d, dash] \arrow[drr, dash] & & & & \underline{(\{5,6\},\{f,s,\overline{r}\})} \arrow[dll, dash] \arrow[d, dash] \\
(\{7\},\{g,\overline{f},\overline{s},r\}) \arrow[drr, dash] & & (\{5\},\{\overline{r},f,s,g\}) \arrow[d, dash] & & (\{6\},\{f,\overline{r},s,w\}) \arrow[dll, dash] \\
 & & (\varnothing, M) & &
\end{tikzcd}
$$

Пример «Фрукты»: дополнение...

При таком изменении свойств объекта № 7 изменятся только отрицательный контекст. Теперь

- $\{g\} = \{5,7\}'$ является фальсифицированной $\ominus$−гипотезой, поскольку она содержится в формальном содержании $\{g, \overline{f}, \overline{s}, \overline{r}\}$ положительного понятия $\{3\}$.
- $\{f, s, \overline{r}\} = \{5,6\}'$ является $\ominus$−гипотезой.

Поэтому

- объекты со свойствами *жёлтый, мягкий, гладкий* и *белый, мягкий, некруглый* будет классифицированы как *фрукт*;
- на объекте с единственным свойством *белый* произойдёт отказ от классификации.

Разделы

- Решёточно упорядоченное множество, алгебраические решётки и их эквивалентность. Примеры.
- Гомоморфизмы решёток, связь порядкового и решёточного гомоморфизмов. Сечения Макнила.
- Идеалы решёток. Модулярные и дистрибутивные решётки. Критерии модулярности и дистрибутивности решётки.
- Неразложимые элементы решёток и представление произвольных элементов решётки через неразложимые. Изоморфизм ч.у. множества и неразложимых элементов решётки его порядковых идеалов.
- Фундаментальная теорема о конечных дистрибутивных решётках.
- Задача классификация по прецедентам. Закон обратного отношения между содержанием и объёмом понятия. Соответствия Галуа.

- Анализ формальных понятий (АФП). Формальные объём и содержание. Решётка формальных понятий.
- Гипотезы АФП. Простейшее решающее правило классификации.