



Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики

Кафедра Математических Методов Прогнозирования

Стёпина Александра Михайловна

**Преобразование объектов на основе медиального  
представления формы**

**ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА**

**Научный руководитель:**

д.т.н., профессор

Л.М. Местецкий

# Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Постановка задачи и существующие решения</b>	<b>3</b>
2.1	Постановка задачи . . . . .	3
2.2	2D - деформации . . . . .	3
2.3	Формальная постановка задачи . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Решение задачи</b>	<b>6</b>
3.1	Модель фигуры . . . . .	7
3.1.1	Определения и обозначения . . . . .	7
3.1.2	Медиальное представление . . . . .	9
3.2	Модель деформаций . . . . .	11
3.2.1	Деформация фрагмента скелета . . . . .	11
3.2.2	Деформация границы . . . . .	13
3.3	Обсуждение и выводы . . . . .	15
<b>4</b>	<b>Особенности реализации</b>	<b>15</b>
<b>5</b>	<b>Заключение</b>	<b>16</b>
	<b>Список литературы</b>	<b>17</b>

## **Аннотация**

В данной работе представлен алгоритм преобразования фигуры в растровом изображении. Предлагается использовать медиальное представление формы, т.е. скелет фигуры с радиальной функцией. Деформация задаётся некоторой точкой, вокруг которой производится поворот части фигуры. В таком случае преобразование разбивается на несколько этапов - изменение положения части скелета, сегментация с выделением соответствующей ему границы фигуры и её поворот, объединение сегментированных частей и перестроение скелета.

# 1 Введение

Задача 2D-деформации фигур возникает при обработке изображений в режиме реального времени. Преобразование изображений может быть использовано для сравнения формы объектов или же просто для удобного создания анимации. Данная задача часто встречается в коммерческом программном обеспечении для редактирования видео или 2D-векторной анимации, например, Adobe After Effects, Adobe Flash.

## 2 Постановка задачи и существующие решения

### 2.1 Постановка задачи

Содержательно задачу можно сформулировать следующим образом: На вход подаётся растровое изображение. Необходимо ввести модели объектов изображения и деформаций, осуществить преобразование. И на выходе получить реконструированное изображение, сохранив реалистичность.

### 2.2 2D - деформации

Существует много статей, посвящённых преобразованию 2D изображений. Большая часть из них основывается на построении триангуляционной сетки поверх изображения и произведения деформаций в зависимости от определённой топологии.

Например, в работе [3] Igarashi et al. представили интерактивную систему для деформаций, которая позволяет пользователю манипулировать несколькими точками. Фигура покрывается треугольной сеткой и пользователь двигает вершины сетки. Далее система вычисляет расположение оставшихся свободных вершин, минимизируя искажение каждого треугольника. Получается нелинейная задача. Для её решения производится разбиение задачи на 2 этапа: первый - вычисление поворота сторон треугольника и второй - вычисление изменения масштаба. Получается 2 задачи минимизации метода наименьших квадратов, каждая из которых быстро и стабильно решается. Как отмечают авторы, 2-х шаговый алгоритм является практической

аппроксимацией для достижения высокой производительности и может создавать неестественные эффекты.

Чтобы преодолеть эту проблему Weng et al. в работе [4] предложили алгоритм, основанный на нелинейной оптимизации наименьших квадратов. Он нацелен на сохранение 2-х геометрических свойств - Лапласовских координат граничной кривой (координата  $\delta_i$  для точки  $v_i$  (вершина графа, являющегося наложенной на фигуру сеткой) вычисляется как разность между  $v_i$  и средним её соседей  $v_{i-1}$  и  $v_{i+1}$  на кривой:  $\delta_i = L_P(v_i) = v_i - (v_{i-1} + v_{i+1})/2$ ) и локальной области внутри фигуры (вводится 2 локальных свойства для графа: относительная позиция каждой внутренней точки по отношению к её соседям и длина каждого ребра графа), которые представляют собой нелинейную квадратичную функцию энергии. Вместо линеаризации этих параметров авторы предлагают итерационный метод решения. Этот подход позволяет достаточно свободно изменять форму, не принимая во внимание особенностей свойств фигур, таких как изображений животных, не имеющих склонности к произвольной деформации.

В работе [6] представлен сохраняющий контекст (под контекстом формы понимается любое измерение конфигурации свойств формы, которое не меняется, когда глобальная форма растягивается или сужается)

подход к изменению изображений, который взаимодействует с 2D-сеткой с помощью предложенного алгоритма дифференциального сеточного изменения. (При этом рассматривается треугольная сетка  $S = (K, V)$ , где  $V$  множество, состоящее из пар координат вершин,  $K$  описывает их смежность. Скалярное поле  $f$  на  $S$  определяется как кусочно-линейная функция  $f(v) = \sum_i f_i \phi_i(v)$ , где  $f_i$  коэффициенты,  $\phi_i(\cdot)$  кусочно-линейные базисные функции, принимающие значение 1 на вершине  $v_i$  и 0 на других вершинах. Дискретный оператор градиента скалярного поля  $f$  на  $S$  определяется как  $\Delta f(v) := \sum_i f_i \Delta \phi_i(v)$  [9]. При помощи данных понятий составляется Пуассоновское уравнение для негибких участков фигуры, заранее заданных пользователем.) Строится триангуляция до внешних границ объекта и используется эта топологическая информация при создании преобразований. Вводится новый контекстный дескриптор формы и добавляется к деформационной структуре, упрощающий деформации, сохраняющие формы, для 2D анатомических иллюстраций.

Предложенная схема строит новую форму, исходя из обучения стиливым формам на эталонных изображениях. Экспериментальные результаты показывают, что визуально правдоподобная деформация может быть быстро сгенерирована из существующего примера.

Другой вариант представления формы объекта - его скелетное представление с радиальной функцией (циркулярный граф). Например, в работе [2] рассматривается представление фигуры объекта жирными кривыми (жирная кривая - след, оставляемый движением кругов различного радиуса вдоль скелета). Такое представление требует построение огибающей после трансформации объекта, что является достаточно трудной задачей.

Так большинство методов используют интерполяцию или скелетные преобразования. И тот и другой метод не лишены недостатков. В работе [5] предложен алгоритм Pose space deformation(PSD), который обобщает и улучшает оба вида преобразований таких, как интерполяция формы и технику изменений скелета, и предоставляет универсальный подход, который применим и к внутренней деформации кожи, и к скелетным изменениям. Этот подход основан на том, что некоторые типы деформаций могут быть универсально представлены как преобразования, определяемые как основополагающим скелетом (или более абстрактной системой параметров), так и расположением в объекте локальных координат структуры. После определения универсального представления до этого различные типы деформаций могут быть обобщены одним универсальным подходом. Преимущества этого алгоритма включают в себя увеличение реалистичности и управление желаемой формой в реальном времени в то время, как производительность сопоставима с традиционной скоростью интерполяции формы.

Для многоэлементных 2D форм в работе [7] представлен метод, который создаёт естественные и интуитивные изменения при помощи прямого воздействия и сглаженной интерполяции. Различные части могут быть преобразованы отдельно и в процессе обработки структурные отношения между частями сохраняются. Заметив, что структурные отношения между различными частями многоэлементной 2D-формы важны для описания семантики изображения, авторы ввели простую структуру под названием feature frame для представления таких отношений. Оптимизация с огра-

ничениями решается при изменении формы для нахождения оптимально изменённой формы с ограничениями, вручную заданными пользователем. Основываясь на feature frame, сохранение локальных свойств и поддержание структурных отношений прямо закодировано в целевой функции.

### 2.3 Формальная постановка задачи

Вход: растровое изображение  $I$ .

Задача: предложить модель представления объекта  $M(I)$ , модель описания деформаций  $D(I)$ , провести деформацию.



Рис. 1: Вход: растровое изображение



Рис. 2: Деформация.



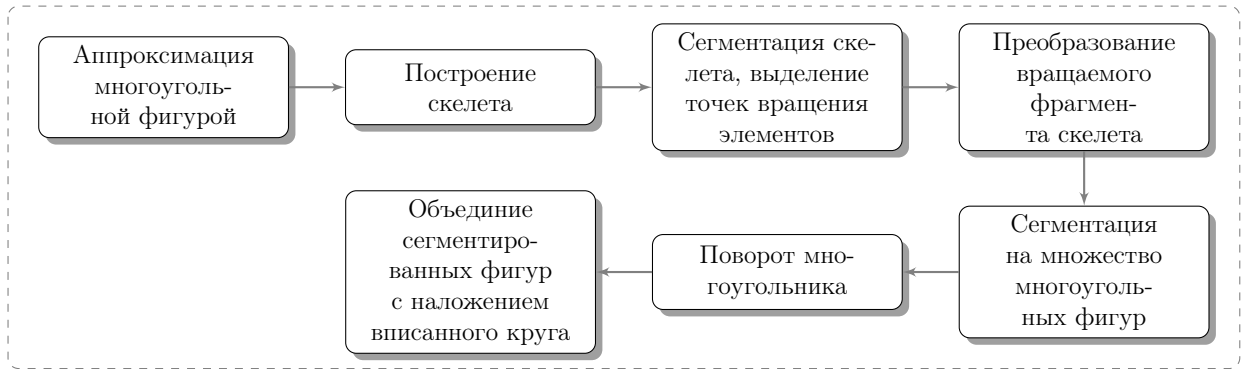
Рис. 3: Выход: преобразованное изображение.

Выход: Преобразованное изображение  $I'$ .

## 3 Решение задачи

*Основная идея подхода:* описание деформаций в виде поворотов частей скелета друг относительно друга в определённых точках (точки вращения). Для этого предлагается механизм выделения этих точек, описание поворотов и реализация деформации.

*Схема алгоритма:* в работе представлен следующий порядок действий.



## 3.1 Модель фигуры

### 3.1.1 Определения и обозначения

В компьютерной графике плоские фигуры могут быть в непрерывной или дискретной формах. Дискретная форма представляет собой бинарное растровое изображение, в котором фон и объекты имеют различные метки (0 или 1). Непрерывное представление может определяться граничной кривой или функцией принадлежности фигуре. В нашей задаче на вход подаётся дискретное представление объектов - растровое изображение.

При введении определений используется терминология книги [1].

*Фигура*  $A$  - замкнутая область плоскости  $\mathbb{R}^2$ , ограниченная конечным числом замкнутых линий конечной длины без самопересечений.

*Граница фигуры*  $\partial A$  - множество точек  $\partial A = \{p: p \in \mathbb{R}^2, S_r(p) \cap A \neq \emptyset \cup S_r(p) \cap \bar{A} \neq \emptyset\}$ , где  $S_r(p) = \{q: q \in \mathbb{R}^2, d(p, q) \leq r, r \geq 0\}$ ,  $\bar{A} = \mathbb{R}^2 \setminus A$ .

*Пустой круг фигуры*  $A$  - круг, не содержащий внутри себя точек границы, т.е. замкнутое множество  $S_r(p) = \{q: q \in \mathbb{R}^2, d(p, q) \leq r, r \geq 0\}$ , такое что  $S_r(p) \subset A$ .

*Максимальные пустой круг* - пустой круг, который не содержится ни в одном другом пустом круге фигуры, т.е. для пустых кругов  $S_r(p)$  - максимальный, если  $\nexists r_1, p_1: S_r(p) \subset S_{r_1}(p_1)$ . Такие круги также будем называть вписанными.

*Скелет фигуры* - множество центров максимальных пустых кругов фигуры.

*Геометрический граф* - совокупность  $G = \langle V, E \rangle$ , где  $V$  - непустое конечное множество точек - вершин,  $E$  - множество непрерывных линий - рёбер. Рёбра не имеют никаких других точек пересечения, кроме точек из множества  $V$ , являющи-





Рис. 4: Фигура.



Рис. 5: Граница.



Рис. 6: Вписанные  
круги.

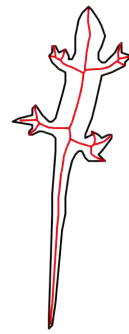
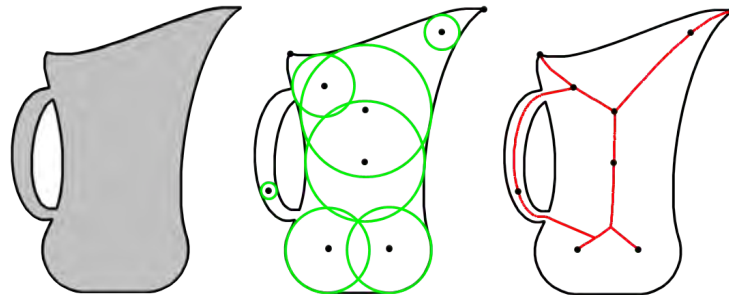


Рис. 7: Скелет.

мися концами рёбер.

Скелет фигуры  $A$  можно рассматривать как плоский граф  $G$ , в котором:

- Множество вершин  $E$  - все центры максимальных пустых кругов, имеющих 3 и более общие точки с границей, или являющихся вырожденными ( $r = 0$ ).
- Рёбра графа - множество центров кругов, касающихся границы ровно в двух точках. Поэтому рёбра часто называют серединным представлением фигуры.

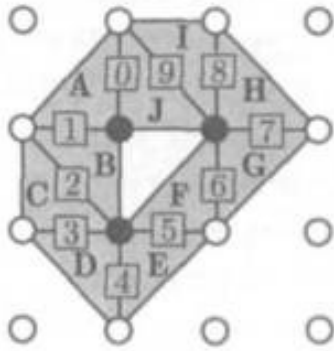


Под *ветвью скелета* будем понимать путь в скелетном графе без повторений вершин и рёбер, в котором все вершины имеют степень 2, кроме начальной и конечной. *Радиальная функция* точки скелета - радиус максимального пустого круга с центром в данной точке.

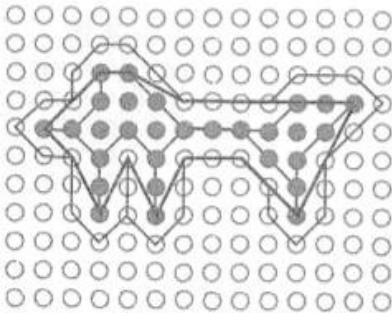
*Медиальным представлением* объекта называется скелет объекта и его радиальная функция. Медиальное представление является эквивалентным граничному описанию, т.к. полностью определяет описание формы фигуры.

### 3.1.2 Медиальное представление

Как уже упоминалось, в задаче на вход подаётся дискретное представление объектов - растровое изображение.



Граничный коридор.



Граничная ломаная минимальной длины.

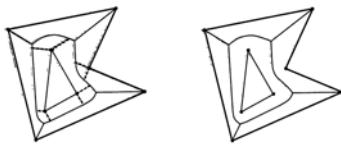


Диаграмма Вороного и полученный из неё скелет.

1. Для деформации объектов удобнее работать с их непрерывным представлением, поэтому для начала проведём аппроксимацию входного изображения многоугольной фигурой.

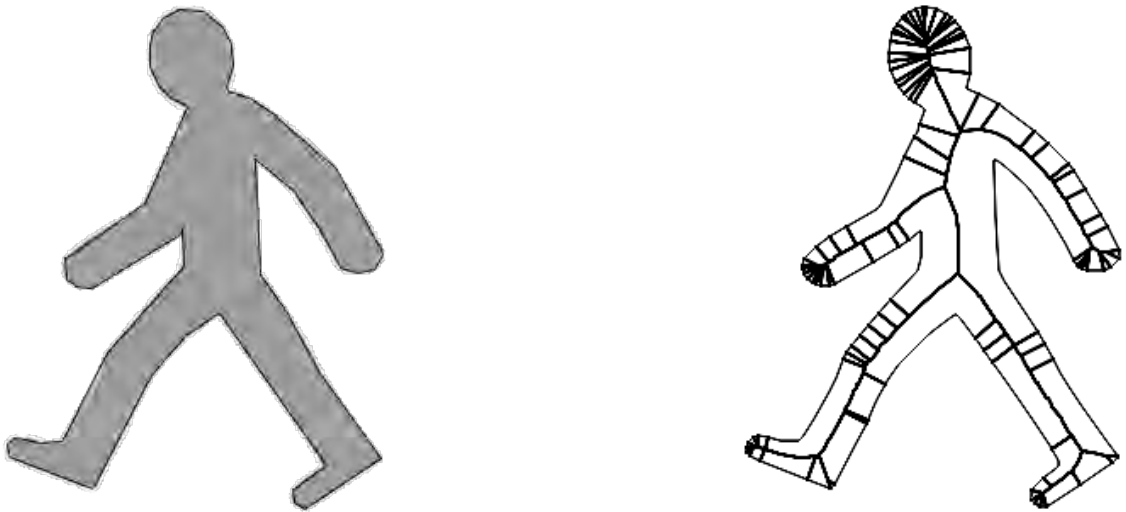
Для этого введём на растровой решётке треугольную систему соседства (структура, граф соседства которой является триангуляцией, а 4-х смежный граф является её подграфом) и определим понятие *граничного коридора*: это объединение попарно смежных граничных треугольников, образующих замкнутую цепочку (граничный треугольник - грань треугольной решётки с разноцветными точками). Любая ломаная, пересекающая по одному разу разноцветные стороны треугольников и лежащая внутри коридора, может считаться границей. Будем строить граничную ломаную линию с минимальной длиной среди всех замкнутых линий, лежащих внутри граничного коридора.

2. Для полученной многоугольной фигуры построим скелет  $S$  с радиальной функцией  $F(S)$ . Для этого введём понятие диаграммы Вороного.

Сайтами многоугольной фигуры будем называть вершины и отрезки её границы. Ячейкой Вороного сайта называется геометрическое место точек, для ко-

торых этот сайт является ближайшим. (Сайт-точка является ближайшей для внутренней точки фигуры, если она является ближайшей граничной точкой. Сайт-сегмент является ближайшим, если ближайшая граничная точка лежит на нём и является ортогональной проекцией внутренней точки на прямую, содержащую этот сайт). Диаграмма Вороного - совокупность границ всех ячеек Вороного. Тогда скелет фигуры является подмножеством диаграммы Вороного, полученным отбрасыванием рёбер, являющихся общей границей соседних сайтов.

3. После построения скелета обычно делается регуляризация - убираются «шумовые» ветви скелета. Т.е. производится стрижка - последовательное удаление отдельных ветвей скелета: для скелетного графа  $G = \langle V, E \rangle$  получение связанного подграфа  $G' = \langle V', E' \rangle : V' \subseteq V, E' \subseteq E, E \setminus E'$  не содержит циклических рёбер графа  $G$ . В данной работе не будем делать стрижку скелета. (Это позволит избежать некоторых трудностей в алгоритме, которые появляются при стрижке.)



Таким образом, моделью фигуры  $M(I)$  является медиальное представление объекта.

## 3.2 Модель деформаций

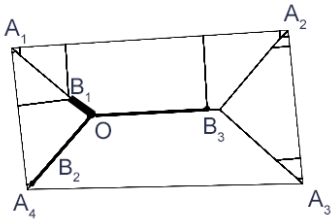
Для многих объектов не актуально произвольное изменение формы. Например, для фигур животных, для пальцев рук свойственно движение только в суставах в одной плоскости. Поэтому для данного класса задач удобно использовать построение скелета.

Теперь необходимо определить деформации. Будем рассматривать преобразования, заключающиеся в повороте фрагментов фигуры. В то время как форма фрагментов должна оставаться неизменной.

Будем руководствоваться следующими принципами:

- Преобразование - поворот фрагмента фигуры вокруг точки
- Точка вращения - вершина скелетного графа

### 3.2.1 Деформация фрагмента скелета



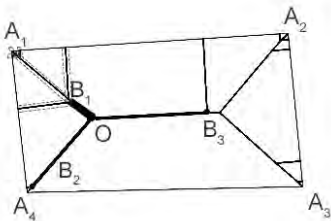
1. Выбор точки вращения.

Выбирается интересующая пользователя вершина  $O$  скелетного графа  $G$ .

2. Выделение вращаемого фрагмента скелета.

Сначала определим основное ребро вращения - это ребро графа скелета с вершиной в точке вращения, которое интересует нас в данный момент. Например, на изображении ребро  $OB_1$ .

Под вращаемым фрагментом скелета  $R_s$  будем понимать поддерево скелетного графа с корнем в точке вращения, являющегося объединением ветвей скелета, содержащих основное ребро вращения. На иллюстрации вращаемый фрагмент скелета выделен пунктиром.



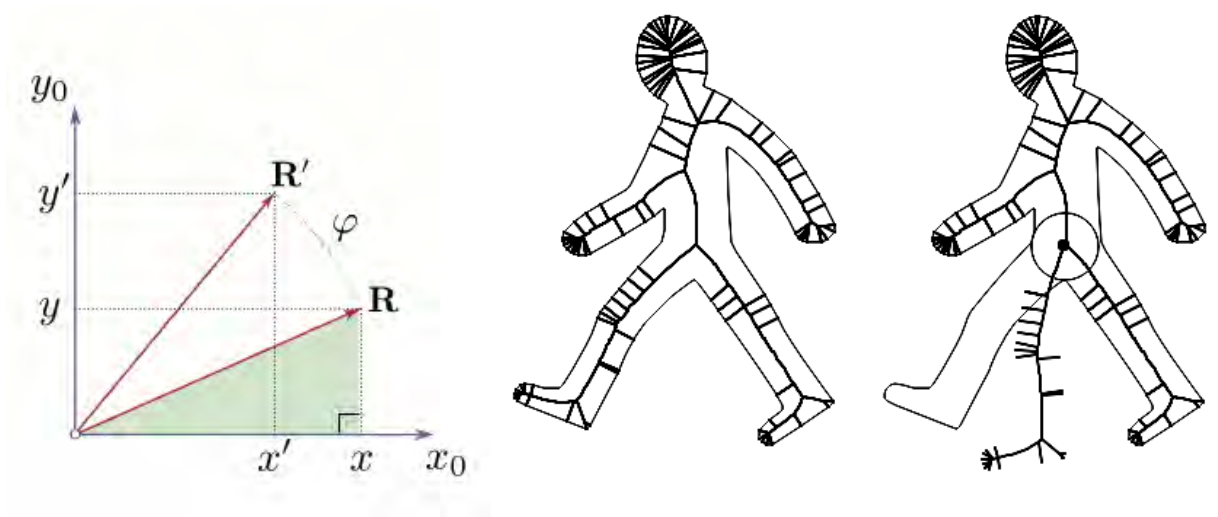
Для его выделения воспользуемся алгоритмом обхода в глубину для графов. Используем чёрно-белую раскраску. Для скелетного графа  $G = \langle V, E \rangle$  в первый момент времени вершина  $u$ , соответствующая точке вращения, окрашена в чёрный, остальные в белый цвет. Для смежной вершины  $v: (u, v) \in E$  выполним  $\text{DFS}(v)$ .

Алгоритм  $\text{DFS}(u)$ :

**Вход:** вершина  $u \in V$  ;

- 1: Перекрасить  $u$  в чёрный цвет
  - 2: для всех  $w : (v, u) \in E$  таких, что  $w$  - белая **do**
  - 3:  $\text{DFS}(w)$ ; // рекурсивно вызываем функцию из новой вершины
3. Для осуществления поворота будем рассматривать вращаемый фрагмент скелета как совокупность векторов. Тогда используя матричные аффинные преобразования, умножим вектора  $R(x, y)$  на матрицу поворота  $A$  на угол  $\phi$  (желаемый угол поворота для фрагмента скелета) :  $R' = AR$ .

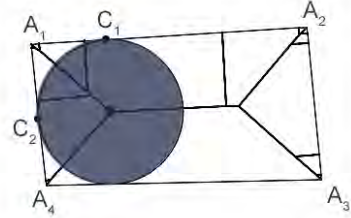
$$A = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} R' = \begin{bmatrix} x\cos(\phi) - y\sin(\phi) \\ x\sin(\phi) + y\cos(\phi) \end{bmatrix}$$



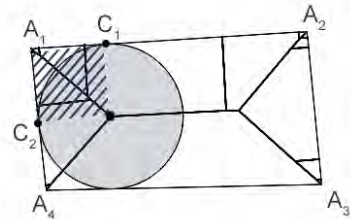
### 3.2.2 Деформация границы

Следующим этапом является выделение той части границы, которая соответствует вращаемому фрагменту скелета.

1. В точке вращения  $O$  определим максимальный пустой круг  $S(O)$ .

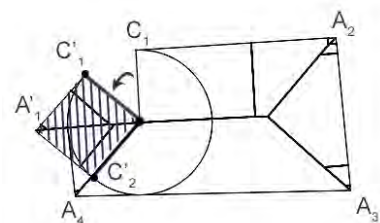


2. Найдём точки касания круга  $S(O)$  с границей фигуры и опустим соответствующие перпендикуляры  $OC_1, OC_2$  на граничные линии.

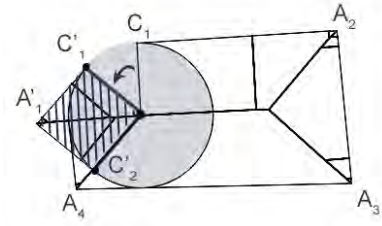


3. Произведём сегментацию: отделим многоугольник вращения  $M_s$ . То есть составим многоугольник  $M_s = A_1C_1OC_2$  из отрезков границы  $A_1C_1$  и  $A_1C_2$ , относящихся к вращаемому фрагменту скелета, и радиусов  $OC_1, OC_2$  вписанного круга. Таким образом, под многоугольником вращения  $M_s$  будем понимать часть фигуры, ограниченную отрезками границы, соответствующих вращаемому фрагменту скелета, и перпендикулярами, опущенными из точки вращения на границу.

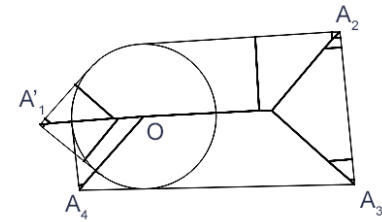
4. Осуществим деформацию многоугольника вращения  $M_s$  аналогично вращаемому фрагменту скелета, т.е. рассмотрим отрезки границы как вектора и найдём их новое положение умножением на матрицу поворота.



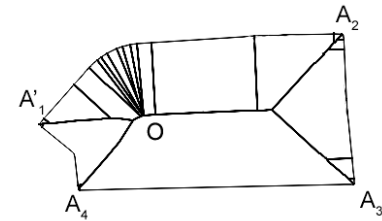
5. Силуэт фигуры - огибающая семейства составляющих его кругов с центрами в каждой точке скелетного графа. То есть теперь осталось наложить максимальный пустой круг с центром в точке вращения для непрерывности границы и корректности математического определения.



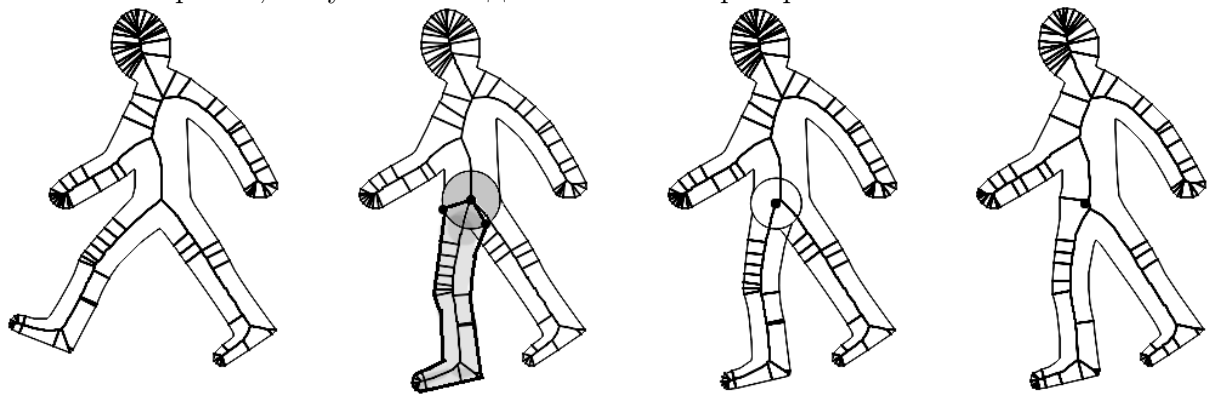
6. Получим преобразованную фигуру, объединив полученные многоугольники с кругом. Полученная фигура является искомой.



7. Для новой фигуры преобразованный скелет старой фигуры не будет являться скелетом, поэтому для осуществления дальнейших преобразований необходимо построить новый скелет.



Таким образом, получим последовательность преобразований.



Модель описания деформаций  $D(I)$  определяется точкой вращения  $O$ , вращаемым фрагментом скелета  $R_s$  и многоугольником вращения  $M_s$ .

### 3.3 Обсуждение и выводы

Таким образом, алгоритм применим для растровых изображений, для которых нужна суставная деформация. Алгоритм имеет высокую скорость работы и прост в реализации. В качестве направления дальнейших исследований можно рассматривать деформации 3D-изображений. Например, в работе [8] предложена схема для преобразования формы for free-form skeletondriven global mesh deformation. По глобальной сетке формы строится скелетная сетка, используя диаграмму Вороного. Далее к скелетной сетке применяются преобразования. Глобальное изменение формы получается путём реконструкции глобальной сетки, соответствующей скелетной.

## 4 Особенности реализации

По описанному выше алгоритму был создан графический редактор. На вход подаётся изображение. Пользователь может загрузить растровую картинку или нарисовать вручную многоугольник. После загрузки изображения программа строит скелет объекта на изображении. Хотя в предложенном алгоритме скелет не подвергается стрижке, на экране для удобства пользователя отображается стриженный скелет. Далее можно последовательно осуществлять преобразования и сохранить результат в виде изображения.

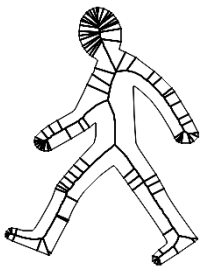


Рис. 8: Полный скелет.

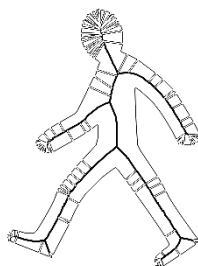


Рис. 9: Выделены ветви для стрижки.

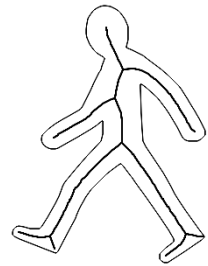


Рис. 10: Стриженный скелет.



## 5 Заключение

Результатами работы являются:

- Предложено медиальное представление для описания объектов изображений в задаче деформации
- Предложен подход к решению задачи осуществлению деформаций
- Разработано программное обеспечение, позволяющее легко преобразовывать фигуру в режиме реального времени

## Список литературы

- [1] МЕСТЕЦКИЙ Л.М.: *Непрерывная морфология бинарных изображений: фигуры, скелеты, циркуляры* Физматлит, 2009.
- [2] MESTETSKII L.M.: *Fat curves and representation of planar figures* Elsevier Science Computers&Graphics 24(2000) 9-21.
- [3] IGARASHI T., MOSCOVICH T., HUGHES J. F.: *Asrigid-as-possible shape manipulation*. In Proceedings of ACM SIGGRAPH (August 2005), pp. 327–340
- [4] WENG Y., XU W., WU Y., ZHOU K., GUO B.: *2D shape deformation using nonlinear least squares optimization*. The Visual Computer 22, 9 (2006), 653–660.
- [5] J. P. LEWIS, MATT CORDNER, NICKSON FONG *Pose Space Deformation: A Unified Approach to Shape Interpolation and Skeleton-Driven Deformation*. Centropolis
- [6] WEI CHEN, XIAO LIANG, ROSS MACIEJEWSKI, DAVID S. EBERT: *Shape Context Preserving Deformation of 2D Anatomical Illustrations*. Volume 0 (1981), Number 0 pp. 1–12 COMPUTER GRAPHICS forum Structure Preserving Manipulation and Interpolation for
- [7] WENWU YANG, JIEQING FENG, XUN WANG *Multi-element 2D Shapes*. Pacific Graphics 2012 C. Bregler, P. Sander, and M. Wimmer (Guest Editors) Volume 31 (2012), Number 7
- [8] SHIN YOSHIZAWAY, ALECANDER G. BELYAEVY, HANS-PETER SEIDELY: *Free-form Skeleton-driven Mesh Deformations.*, SM'03, June 16–20, 2003, Seattle, Washington, USA. Copyright 2003 ACM 1581137060/03/0006
- [9] TONG Y., LOMBEYDA S., HIRANI A. N., DESBRUN M.: *Discrete Multiscale Vector Field Decomposition*, ACM Transactions on Graphics 22, 3 (2003), 445–452.