Быстрые алгоритмы. Представление проекта.

Екатерина Карацуба

Вычислительный Центр им. А.А. Дородницына РАН

9 Октября, 2014

♡ Константа π

▷ Date Completed: October 16, 2011

▷ Who: Shigeru Kondo and Alexander Yee

▷ Decimal Digits: 10,000,000,000,050

▷ Compute Time: Compute: 371 days. Verify: 45 hours

▷ Comments: World Record Size Computation

▷ Computer: 2 x Intel Xeon X5680 @ 3.33 GHz

▷ 96 GB DDR3 @ 1066 MHz 24 x 2 TB

! Note: December 28, 2013: The record has been improved to 12 trillion digits

♡♡ Константа e.

▷ Date Completed: July 5, 2010

▷ Who: Shigeru Kondo

▷ Decimal Digits: 1,000,000,000,000

▷ Compute Time: Compute: 224 hours (9.3 days). Verify: 219 hours (9.1 days).

▷ Comments: World Record Size Computation

▷ Computer: Intel Core i7 980X @ 3.33 GHz
12 GB DDR3
2 TB (Boot + Output)
8 x 1 TB (Computation)

♡♡♡ Константа Каталана

▷ Date Completed: April 16, 2009

▷ Who: Alexander Yee and Raymond Chan

▷ Decimal Digits: 31,026,000,000

▷ Compute Time: Compute: Compute: 178 hours (7.4 days). Verify: 221 hours (9.2 days)

▷ Comments: World Record Size Computation

▷ Computer: "Nagisa"; Processors: Dual 3.2 GHz Intel Quad-core Xeon X5482 Harpertown
Memory: 64 GB DDR2 FB-DIMM @ 800 MHz (quad channel)
Motherboard: Tyan Tempest S5397

♡♡♡♡ Константа Эйлера γ.

▷ Date Completed: December 22, 2013

▷ Who: Alexander Yee

▷ Decimal Digits: 119,377,958,182

▷ Compute Time: Compute: 50 days. Verify: 39 days

▷ Comments: World Record Size Computation

▷ Computer: "Nagisa"; Hard Drives: 750 GB SATA II Seagate (Boot drive);
4 x 1 TB SATA II Seagate (No raiding)
Operating System: 64-bit Windows Vista Ultimate SP1

Опр. 1. Запись знаков 0, 1, плюс, минус, скобка; сложение, вычитание и умножение двух битов назовём одной элементарной или битовой операцией.

Пусть $y = f(x)$ вещественная функция вещественного переменного x, $a \le x \le b$, и пусть $f(x)$ удовлетворяет на (a, b) условию Липшица порядка α, $0 < \alpha < 1$, так что для $x_1, x_2 \in (a, b) : |f(x_1) - f(x_2)| \le |x_1 - x_2|^\alpha$.
n – натуральное число, "основной параметр", $n \to +\infty$.

Опр. 2. Вычислить функцию $y = f(x)$ в точке $x = x_0 \in (a, b)$ с точностью до n знаков, значит найти такое число A, что $|f(x_0) - A| \le 2^{-n}$.
Опр. 3. Количество битовых операций, достаточное для вычисления функции $f(x)$ в точке $x = x_0$ с точностью до n знаков посредством данного алгоритма, называется сложностью вычисления $f(x)$ в точке $x = x_0$.

Быстрое умножение.

$$M(n) = O\left(n^{\log_2 3}\right).$$

$$M(n) = O\left(n \log n \log\log n\right).$$

$$s_f(n) = O\left(M(n) \log^c n\right),$$

где $c = \text{const}$.

$$n \ < \ s_f(n) \ < \ c_1 n \log^{c+1} n \log\log n \ < \ n^{1+\varepsilon} \ ,$$

для любого $\varepsilon \ > \ 0$ и $n \ > \ n_1(\varepsilon)$.

Вычисление $n!$

Шаг 1.

$$a_1(1) = n(n-1), \;\; a_2(1) = (n-2)(n-3), \; \ldots, \;\; a_{\frac{n}{2}}(1) = 2*1;$$

Шаг 2.

$$a_1(2) = a_1(1)a_2(1), \quad a_2(2) = a_3(1)a_4(1), \ldots,$$

$$a_{\frac{n}{4}}(2) = a_{\frac{n}{2}}(1)a_{\frac{n}{2}-1}(1);$$

И.т.д. …
Шаг k, последний.

$$a_1(k) = a_1(k-1)a_2(k-1).$$

Результат: $n!$

$$O\left(\frac{n}{2}M(\log n)+\frac{n}{4}M(2\log n)+\frac{n}{8}M(4\log n)+\right.$$
$$\left.+\cdots+M(n\log n)\right)=O\left(n\log^3 n\log\log n\right).$$

Вычисление константы e.

$m = 2^k$, $k \geq 1$,

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{(m-1)!} + R_m,$$

$m = 2^k$, $k \geq 1$.

Выбираем m, так что $R_m \leq 2^{-n-1}$. Например, при $m \geq \frac{4n}{\log n}$. Т.е. берём $m = 2^k$ так что для k

$$2^k \geq \frac{4n}{\log n} > 2^{k-1}.$$

Вычисляем сумму

$$S = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{(m-1)!} = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{(m-1-j)!}$$

за k шагов.

Шаг 1.

$$S = \left(\frac{1}{(m-1)!} + \frac{1}{(m-2)!}\right) + \left(\frac{1}{(m-3)!} + \frac{1}{(m-4)!}\right) + \dots$$

$$= \frac{1}{(m-1)!}(1+m-1) + \frac{1}{(m-3)!}(1+m-3) + \dots,$$

$$m, m-2, m-4, \dots.$$

$$S = S(1) = \sum_{j=0}^{m_1-1} \frac{1}{(m-1-2j)!} \alpha_{m_1-j}(1),$$

$$\alpha_{m_1-j}(1) = m - 2j, \quad j = 0, 1, \dots, m_1 - 1.$$

$m_1 = \frac{m}{2}, m = 2^k, k \geq 1.$

Шаг $i+1$ $(i+1 \leq k)$.

$$S = S(i+1) = \sum_{j=0}^{m_{i+1}-1} \frac{1}{(m-1-2^{i+1}j)!} \alpha_{m_{i+1}-j}(i+1) \ ,$$

$m_{i+1} = \frac{m_i}{2} = \frac{m}{2^{i+1}}$,

$$\alpha_{m_{i+1}-j}(i+1) = \alpha_{m_i-2j}(i) + \alpha_{m_i-(2j+1)}(i) \frac{(m-1-2^{i+1}j)!}{(m-1-2^i-2^{i+1}j)!},$$

$j = 0, 1, \ldots, m_{i+1}-1, m = 2^k, k \geq i+1.$

Здесь $\frac{(m-1-2^{i+1}j)!}{(m-1-2^i-2^{i+1}j)!}$ –произведение 2^i целых.

И т.д. $\ldots$

Шаг k, последний.
$\alpha_1(k)$, $(m-1)!$, одно деление $\alpha_1(k)$ на $(m-1)!$, с точностью до n знаков.

Сложность

$$O\left(M(m)\log^2 m\right) = O\left(M(n)\log n\right).$$

Вычисление сумм рядов специального вида.

$$f_1 = f_1(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a(j)}{b(j)} z^j,$$

$$f_2 = f_2(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a(j)}{b(j)} \frac{z^j}{j!},$$

$a(j)$, $b(j)$ целые и $|a(j)| + |b(j)| \leq (Cj)^K$; $|z| \ < \ 1$; K=const, C=const, и z –алгебраическое число.

$$s_{f_1}(n) = O\left(M(n)\log^2 n\right),$$

$$s_{f_2}(n) = O\left(M(n)\log n\right).$$

Вычисление константы π.

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3},$$

$$\arctan\frac{1}{2} = \frac{1}{1*2} - \frac{1}{3*2^3} + \cdots + \frac{(-1)^{r-1}}{(2r-1)2^{2r-1}} + R_1,$$

$$\arctan\frac{1}{3} = \frac{1}{1*3} - \frac{1}{3*3^3} + \cdots + \frac{(-1)^{r-1}}{(2r-1)3^{2r-1}} + R_2,$$

$$s_\pi = O(M(n)\log^2 n).$$

Вычисление константы $\zeta(3)$.

$$\zeta(3) = \frac{5}{2}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m^3}\frac{(m!)^2}{(2m!)}.$$

$$s_{\zeta(3)} = O(M(n)\log^2 n).$$

Вычисление константы Каталана.

$$G=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}=1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{7^2}+\dots.$$

$$G=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8^{n-1}((n-1)!)^3}{(2n-1)!!}\left(\frac{6n-3}{((4n-3)!!!!)^2}-\frac{6n-1}{((4n-1)!!!!)^2}\right).$$

$$s_G(n)=O\left(M(n)\log^2 n\right).$$

Вычисление дзета-констант

Для любого целого k, $k \geq 1$, справедливы соотношения

$$\zeta(2k+2) = 1 + \frac{1}{2^{2k+2}} + \frac{1}{3^{2k+2}} + \dots + \frac{1}{k^{2k+2}} +$$

$$+2 \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\binom{2n}{n} n^2} \left(\frac{1}{n^{2k}} + \sum_{m=1}^{k} \frac{(-1)^m A_m}{n^{2(k-m)}} \prod_{q=1}^{m} \sum_{\substack{j_q = j_{q+1}+1 \\ j_{m+1}=0}}^{n-q} \frac{1}{(n-j_q)^2} \right),$$

где $A_m = 1$, если $m = 1, 2, \dots, k-1$; и

$$A_k = 1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{1 + \frac{1}{2n}}{1 - \frac{1}{2n}}.$$

$$\zeta(2k+3) = 1 + \frac{1}{2^{2k+3}} + \frac{1}{3^{2k+3}} + \cdots + \frac{1}{k^{2k+3}} +$$

$$+2\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\binom{2n}{n} n^3} \left(\frac{1}{n^{2k}} + \sum_{m=1}^{k} \frac{(-1)^m \alpha_m}{n^{2(k-m)}} \prod_{q=1}^{m} \sum_{\substack{j_q = j_{q+1}+1 \\ j_{m+1}=0}}^{n-q} \frac{1}{(n-j_q)^2} \right),$$

где $\alpha_m = 1$, если $m = 1, 2, \ldots, k-1$; и

$$\alpha_k = \frac{5}{4}.$$

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\binom{2n}{n} n^2} \frac{10n-3}{4n-2} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\binom{2n}{n} n^2} \left(\frac{5}{2} + \frac{1}{2n-1} \right) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\binom{2n}{n} n^2} \left(1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{2n+1}{2n-1} \right).$$

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} B\left(n, \frac{1}{2}\right)}{n 2^{2n}} \left(\frac{5}{2} + \frac{1}{2n-1} \right),$$

при $n \geq 2$: $B\left(n, \frac{1}{2}\right) < \sqrt{\pi} < 2$, при $n = 1$: $B\left(1, \frac{1}{2}\right) = 2$.

$$\zeta(n) = \frac{(-1)^n}{(n-1)!}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}(i-1)!G_i,$$

где

$$G_i = \sum_{\substack{k_1+k_2+\cdots+k_n=i \\ k_1+2k_2+\cdots+nk_n=n}} \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_n!}\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{J_j}{j!}\right)^{k_j},$$

$$J_j = \int_0^\infty e^{-t}\log^j t dt.$$

При этом, при $r \geq 4N$, $N \geq 2n\log 2n$, $n \geq 2$, $1 \leq j \leq n$,

$$J_j = S_j + \theta 2^{-N}, \quad |\theta| \leq 1,$$

где

$$S_j = \sum_{i=0}^{r}\frac{(-1)^i N^{i+1}}{(i+1)!}\sum_{m=0}^{j}\frac{(-1)^m}{(i+1)^m}\frac{j!}{(j-m)!}\log^{j-m} N.$$

Представление проекта

⋆ Описание всех существующих быстрых алгоритмов.

⋆ ⋆ Сравнение существующих быстрых алгоритмов для отдельного вычисления, путём тестирования основанных на этих алгоритмах программ. По результатам работы создание единого справочника эффективности работы всех быстрых алгоритмов.

⋆ ⋆ ⋆ Усовершенствование программ, основанных на быстрых алгоритмах, с целью расширения пределов применимости быстрых алгоритмов, в том числе, уменьшения нижней границы точности, при которой быстрый алгоритм становится более эффективным, чем обычные методы вычисления.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ Увеличение эффективности работы существующих быстрых алгоритмов, в том числе путём их распараллеливания и внедрения в соответствующие программы для применения на многопроцессорных параллельных машинах. Получение новых рекордов в вычислениях.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ Построение новых быстрых алгоритмов вычислений широкого класса.

Литература

[1] Е.А. Карацуба. Об одном методе быстрого приближения дзета-констант рациональными дробями. Пробл. передачи информ., 50:2, 77–95 (2014).
[2] Е.А. Карацуба. Быстрое вычисление константы Каталана через приближения, полученные преобразованиями типа куммеровских. Дискрет. матем., 25:4, 74–87 (2013).
[3] E.A. Karatsuba. Fast computation of some special integrals of mathematical physics. Scientific Computing, Validated Numerics, Interval Methods, W. Krämer, J.W. von Gudenberg, eds.; 29–41, (2001).
[4] E.A. Karatsuba. Fast computation of $\zeta(3)$ and of some special integrals using the Ramanujan formula and polylogarithms. BIT Numerical Mathematics, 41:4, 722–730 (2001).
[5] E.A Karatsuba. On the computation of the Euler constant γ. J. of Numerical Algorithms, 24:1-2, 83–97 (2000).

[6] Karatsuba Ekatharine A. Fast evaluation of hypergeometric function by FEE. Papamichael, N. (ed.) et al., Singapore: World Scientific. Ser. Approx. Decompos. 11, 303–314 (1999).
[7] Е. А. Карацуба. Быстрое вычисление дзета-функции Гурвица и L-рядов Дирихле. Проблемы передачи информации, 34:4, 342–353 (1998).
[8] Е. А. Карацуба. Быстрое вычисление дзета-функции Римана $\zeta(s)$ для целых значений аргумента s. Проблемы передачи информации, 31:4, 69–80 (1995).
[9] Karatsuba Catherine A. Fast Evaluation of Bessel Functions. Integral Transforms and Special Functions, 1:4, 269–276 (1993).
[10] Е.А. Карацуба. Быстрое вычисление $\zeta(3)$. Проблемы передачи информации, 29:1, 68–73 (1993).

[11] Е.А. Карацуба. Быстрое вычисление трансцендентных функций. Проблемы передачи информации, 27:4, 87–110 (1991).
[12] А.А. Карацуба, Сложность вычислений. Труды Математического института им. Стеклова, 211, с. 169–183 (1995).
[13] А. Карацуба и Ю. Офман, Умножение многозначных чисел на автоматах. Доклады Академии Наук СССР, 145:2, 293–294 (1962).
[14] A.N. Kolmogorov. Various approaches to estimating the difficulty of approximate definition and computation of functions. Proceedings of the international congress of mathematicians 1962 351–356; Six lectures delivered at the International Congress of Mathematicians in Stockholm, 1962; Providence, R.I. : American Mathematical Society, 1963.