



Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра математических методов прогнозирования

ДИПЛОМНАЯ РАБОТА

**Методы вычисления морфологического
спектра изображений на основе
медиального представления**

Выполнил:
студент 517 группы
Ломов Никита Александрович

Научный руководитель:
д. т. н., профессор
Местецкий Леонид Моисеевич

Москва, 2015

Содержание

Введение	4
1 Основные понятия и постановка задачи	6
1.1 Морфология Серра	6
1.2 Скелетное описание формы	7
1.3 Скелетные аналоги операций морфологии Серра	8
1.3.1 Базовые операции	8
1.3.2 Производные операции	9
1.4 Постановка задачи	9
2 Силуэты монотонных рёбер	10
2.1 Бициклы в многоугольных фигурах	11
2.2 Силуэт линейного ребра	12
2.3 Силуэт параболического ребра	14
2.4 Силуэт гиперболического ребра	18
3 Монотонные ветви	21
3.1 Силуэт монотонной ветви	24
3.2 Преобразования формулы включений-исключений	27
3.3 Крайние точки и пересечения силуэтов	32
3.4 Преобразования графа монотонных ветвей	37
4 Оценки вычислительной сложности и эксперименты	40
4.1 Оценки вычислительной сложности	40
4.2 Эксперименты	41
5 Заключение	44
Приложение А. Алгоритм построения графа монотонных ветвей	45
Приложение Б. Алгоритм вычисления площади открытия фигуры	50

Аннотация

В работе рассматривается морфологический спектр фигуры, введённый П. Маргосом, как интегральный дескриптор формы объекта. Предлагается метод расчёта морфологического спектра с использованием непрерывного скелета бинарного изображения. Рассматривается декомпозиция скелета многоугольной фигуры на монотонные ветви, вычисляются площади как отдельных силуэтов ветвей, так и пересечений силуэтов. Метод позволяет получить точное описание морфологического спектра многоугольной фигуры в аналитическом виде. Даны теоретические оценки сложности алгоритма и практические оценки времени его работы.

Введение

Классификация формы объектов изображения требует построения признакового описания объектов, отражающего особенности их формы. Задача генерации классификационных признаков для объектов переменной формы, таких, например, как фигура человека или животного, состоит в построении дескрипторов формы, которые сохраняют инвариантность при деформации объектов.

Распределение ширины объекта часто является инвариантом при деформациях объектов, а также имеет отличительные особенности для различных классов объектов. Поэтому ширина объектов используется для генерации признаков при распознавании формы изображений.

Интегральным описанием формы изображения являются морфологические спектры по масштабу детализации, введённые П. Марагосом [1]. Несмотря на то, что морфологический спектр Марагоса оказался достаточно информативным описанием формы, полезным при решении многих практических задач, его широкому распространению долгое время мешало отсутствие эффективных в вычислительном плане процедур построения, позволяющих получать спектры в реальном времени.

Морфологический спектр формулируется в терминах математической морфологии Ж. Серра [2], поэтому долгое время перспективы ускорения процедуры вычисления спектра связывались с оптимизацией процедур применения базовых морфологических операций. Наиболее эффективный из известных алгоритмов решения этой задачи был предложен в работе [3]. Следует отметить, что все распространённые алгоритмы были предназначены для бинарных или полутоновых изображений, т.е. использовали дискретный подход.

Возможен и другой взгляд на морфологический спектр — как на распределение значений некоторой функции, заданной для точек фигуры. Этой функцией является максимальный радиус круга, принадлежащего фигуре и покрывающего рассматриваемую точку. Легко показать, что для любой точки круг с наибольшим радиусом является максимальным по включению, то есть не содержится ни в каком другом круге фигуры. Геометрическое множество центров таких кругов называется скелетом фигуры.

Скелеты играют важную роль в классификации формы объектов и позволяют строить различные топологические и метрические признаки формы объектов. Также информативным признаком формы является ширина объекта относительно срединных осей. Ширина объекта описывается радиальной функцией скелета, которая каждой точке скелета ставит в соответствие радиус вписанной в фигуру окружности с центром в этой точке. Скелет в совокупности с радиальной функцией даёт полное представление о форме объекта.

В работах Ю. В. Визильтера и С. В. Сидякина [4][5] были использованы методы непрерывной морфологии бинарных изображений, введённой Л. М. Местецким [6], которые позволили значительно сократить затраты времени на вычисление морфологических спектров с дисковым структурным элементом. Однако предложенные алгоритмы также использовали растровые операции: дискретизацию скелета и вписанных кругов медиального представления.

Полностью непрерывный подход был исследован в работе Е. Ю. Макаровой [7]. В работе были получены аналитические формулы для спектров бициклов — областей, связанных с отдельными рёбрами скелета. Однако исследование показало, что спектр всей фигуры нельзя представить как сумму спектров составляющих фигуру бициклов, поскольку открытия бициклов пересекаются между собой. Таким образом, для точного

вычисления морфологического спектра необходим анализ этих пересечений. Этот анализ осложнялся тем, что в работе рассматривались не сами открытия бициклов, а их изменения при бесконечно малом изменении радиуса примитива.

В работе [8] предложена альтернатива спектру Марагоса — медиальный спектр. Отличие медиального спектра заключается в том, что с каждой точкой фигуры связывается не радиус максимального круга, содержащего данную точку, а длина максимальной спицы (отрезка, соединяющего точку скелета и ближайшую к нему точку границы). Такой подход позволяет произвести декомпозицию исходной задачи на подзадачи и точно рассчитать спектр в виде суммы спектров отдельных бициклов. Недостаток подхода заключается в том, что приближение формы объекта многоугольной или циркулярной фигурой оказывает заметное влияние на значение функции ширины, поэтому, в отличие от спектра Марагоса, медиальный спектр не является устойчивым к стрижке скелета и повороту бинарного изображения.

Цель данной работы — развить непрерывный подход к вычислению морфологического спектра. Основным объектом исследования будет открытие многоугольной фигуры, площадь которого используется в определении морфологического спектра. Так как главной проблемой является анализ пересечений, мы постараемся выделить в многоугольной фигуре такие области, открытия которых можно разбить на непересекающиеся области, связанные с рёбрами скелета. Затем мы рассмотрим пересечения этих составных областей. Наконец, отталкиваясь от формулы включений-исключений, покажем, что формула для вычисления площади открытия содержит не экспоненциальное, а линейное по числу рёбер число слагаемых.

1 Основные понятия и постановка задачи

1.1 Морфология Серра

В классической морфологии Серра [2] изображение рассматривается как множество точек двумерной плоскости.

Для определения операций морфологии Серра нам необходим *перенос множества* $X \in \mathbb{R}^2$ на вектор z : $X_z = \{y \mid x \in X, y = x + z\}$.

Базовые операции морфологии Серра:

Эрозия множества X : $X \ominus B = \{z \mid B_z \in X\}$. На рис. 1 X — вся фигура, B — круг, $X \ominus B$ — закрашенная область.

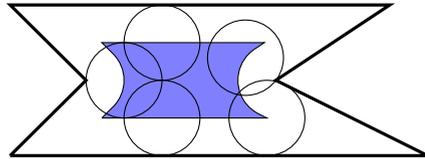


Рис. 1: Эрозия множества X

Дилатация множества X : $X \oplus B = \{x + b \mid x \in X, b \in B\}$. На рис. 2 X — закрашенная область, B — круг, $X \oplus B$ — вся фигура.

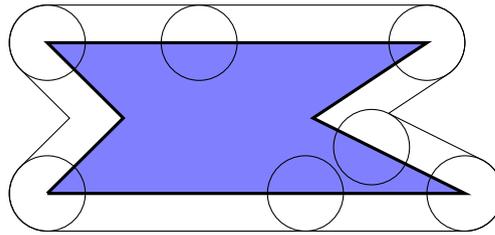


Рис. 2: Дилатация множества X

В этих операциях множество B называется *структурным элементом* или *примитивом*. Мы будем рассматривать в качестве структурного элемента только круги различного радиуса с центром в начале координат: $B(r) = \{b \mid \|b\| \leq r\}$.

Кроме того, в морфологии Серра определены следующие операции:

Открытие множества X : $X \circ B = (X \ominus B) \oplus B$. На рис. 3 граница X обозначена жирной линией, граница $X \ominus B$ — пунктиром, $X \circ B$ — закрашенная область.

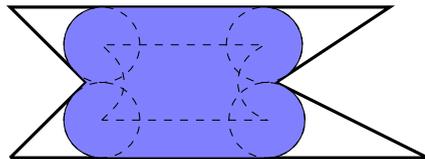


Рис. 3: Открытие множества X

Закрытие множества X : $X \bullet B = (X \oplus B) \ominus B$. На рис. 4 граница обозначена жирной линией, граница $(X \oplus B)$ — пунктиром, $X \bullet B$ — закрашенная область.

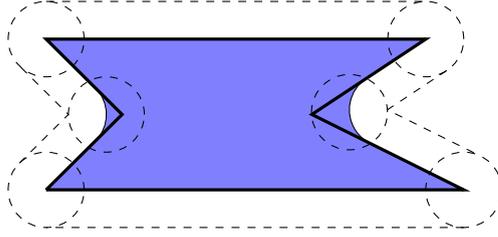


Рис. 4: Закрытие множества X

На основе операции открытия множества определяется также *морфологический спектр Марсагоса множества X* [1]:

$$\begin{aligned} PS_X(r) &= -\partial S(X \circ B(r))/\partial r, \quad r \geq 0, \\ PS_X(-r) &= \partial S(X \bullet B(r))/\partial r, \quad r > 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $S(X)$ — площадь фигуры X .

На рис. 5 X — вся фигура. Темно-синим закрашено множество $X \setminus (X \circ B(r))$, светло-синим — множество $(X \circ B(r)) \setminus (X \circ B(r + \Delta r))$ для некоторых $r > 0$ и $\Delta r > 0$. Спектр фигуры описывает изменение площади открытия при небольших изменениях размера примитива, то есть вклад примитивов каждого размера в форму изображения.

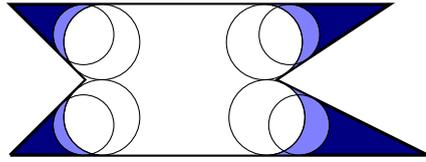


Рис. 5: Открытие фигуры X с использованием примитивов разного радиуса

1.2 Скелетное описание формы

Основные понятия и определения в этом разделе взяты из работы [8].

Определение 1. *Фигурой* называется ограниченная замкнутая область на евклидовой плоскости.

Определение 2. *Пустым кругом* фигуры называется круг, целиком лежащий в фигуре.

Определение 3. Пустой круг называется *вписанным кругом* фигуры, если он является максимальным, т.е. не содержится ни в каком другом пустом круге.

Определение 4. *Скелетом* фигуры называется множество точек-центров всех вписанных кругов фигуры.

Определение 5. *Радиальная функция* определена в точках скелета и ставит в соответствие точке скелета радиус вписанного круга с центром в этой точке.

На рис. 6 скелет фигуры выделен красным, круги со сплошным контуром — вписанные круги, круги с пунктирным контуром — пустые, но не вписанные.

Границу многоугольной фигуры можно представить в виде множества сайтов-точек (вершин фигуры) и сайтов-сегментов (сторон фигуры). Для этого множества сайтов

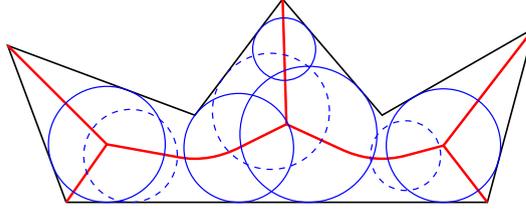


Рис. 6: Скелет, пустые и вписанные круги фигуры

определена так называемая диаграмма Вороного линейных сегментов. Мы будем называть часть этой диаграммы Вороного, лежащую внутри фигуры, диаграммой Вороного (ДВ) многоугольной фигуры.

ДВ многоугольной фигуры представляет собой геометрический граф, рёбрами которого являются отрезки прямых линий и квадратичных парабол.

Пусть G — многоугольная фигура, $Vor(G) = \langle V, E \rangle$ — ДВ фигуры G . Здесь V — множество вершин, E — множество рёбер ДВ. С каждым ребром ДВ связана пара сайтов, для которых линия ребра является бисектором — общей границей их ячеек Вороного. Рассмотрим подграф ДВ $\langle V', E' \rangle$, образованный из $Vor(G)$ путём отсечения части терминальных вершин и рёбер, инцидентных этим вершинам. Как известно, если отсечь вершины и рёбра $Vor(G)$, инцидентные вогнутым вершинам многоугольной фигуры, то объединение рёбер полученного подграфа образует скелет фигуры, т.е. $S = \bigcup_{e \in E'} e$. В работе [9] показано, что скелет многоугольной фигуры можно рассматривать как подграф ДВ $S = \langle V', E' \rangle$, $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$.

1.3 Скелетные аналоги операций морфологии Серра

В работе [7] были определены морфологические операции с дисковым структурным элементом как операции над скелетами и радиальными функциями и доказана их эквивалентность операциям морфологии Серра. В формулировках теорем используются следующие обозначения:

$Sk(A)$ — скелет фигуры A ,

$\rho(s)$ — значение радиальной функции в точке s , где $s \in Sk(A)$,

$B_s(r)$ — круг радиуса r с центром в точке s .

1.3.1 Базовые операции

Скелетная эрозия фигуры X обозначается $X \ominus_{sk} B$ и определяется как

$$X \ominus_{sk} B = \bigcup_{s \in Sk(X) : \rho(s) \geq r} B_s(\rho(s) - r).$$

Теорема 1. Пусть структурный элемент является кругом радиуса r . Тогда $X \ominus B(r) \equiv X \ominus_{sk} B(r)$.

Теорема 2. Скелет эрозии фигуры X с примитивом $B(r)$ — подграф скелета фигуры X , состоящий из точек, в которых радиальная функция больше r :

$$Sk(X \ominus_{sk} B(r)) = \{s \in Sk(X) : \rho(s) \geq r\} \subset Sk(X).$$

Скелетная дилатация фигуры X обозначается $X \oplus_{sk} B$ и определяется как

$$X \oplus_{sk} B = \bigcup_{s \in Sk(X)} B_s(\rho(s) + r).$$

Теорема 3. Пусть структурный элемент является кругом радиуса r . Тогда $X \oplus B(r) \equiv X \oplus_{sk} B(r)$.

Замечание. Если многоугольная фигура X не является выпуклой, $Sk(X)$ не обязательно является подмножеством $Sk(X \oplus B(r))$ и не обязательно содержит $Sk(X \oplus B(r))$.

Доказательства теорем 1–3 можно найти в работе [7].

1.3.2 Производные операции

Открытие является результатом последовательного применения эрозии и дилатации. Следовательно, скелетное открытие можно определить как последовательное применение скелетных эрозии и дилатации. Так как скелетные эрозия и дилатация эквивалентны классическим, скелетное открытие также будет эквивалентно классическому:

$$X \circ B(r) = (X \ominus B(r)) \oplus B(r) = \bigcup_{s \in Sk(X): \rho(s) \geq r} B_s(\rho(s)).$$

Так как скелет дилатации отличается от скелета исходной фигуры, то объединение кругов при последующей эрозии происходит по скелету дилатации. Поэтому скелетное представление закрытия выглядит следующим образом:

$$X \bullet B(r) = (X \oplus B(r)) \ominus B(r) = \bigcup_{s \in Sk(X \oplus B(r)): \rho(s) \geq r} B_s(\rho(s)).$$

1.4 Постановка задачи

В качестве входных данных мы будем использовать многоугольные фигуры (многоугольники с многоугольными дырами). Наша конечная цель — расчёт морфологического спектра многоугольной фигуры.

Выбор такого рода фигур обусловлен несколькими причинами. Во-первых, фигуры с нелинейной границей, а также растровые дискретные изображения можно с высокой точностью аппроксимировать многоугольными фигурами. Морфологический спектр является устойчивым к подобному приближению. Во-вторых, скелеты многоугольных фигур хорошо изучены, и для их построения существуют высокоэффективные алгоритмы.

Отметим одну из главных особенностей предлагаемого подхода. Так как морфологический спектр является производной функции — площади открытия фигуры — можно заниматься исследованием самой функции, а не её производной. При наличии точных формул, выражающих зависимость площади открытия от радиуса примитива, точные формулы для спектра легко получить непосредственным дифференцированием. Для расчёта дескриптора объекта на основе морфологического спектра достаточно построить дискретную разностную гистограмму функции площади.

Нас будет интересовать вид областей, которые получаются в результате открытия частей многоугольной фигуры, а также пересечение этих областей. Поэтому нам будет удобнее работать с площадью открытия фигуры, а не со спектром непосредственно. Задачи работы заключаются в следующем:

1. Разработать непрерывный метод вычисления площади открытия многоугольной фигуры в аналитическом виде.

2. Доказать корректность работы алгоритма.
3. Получить оценки вычислительной сложности для алгоритма.
4. Провести эксперименты, используя один из распространённых наборов данных, содержащих бинарные изображения. Сравнить непрерывный и дискретный подходы к вычислению спектра.

2 Силуэты монотонных рёбер

Наша основная задача — вычислить морфологический спектр Марагоса многоугольной фигуры по формуле (1), используя скелетное представление фигуры.

Для вычисления площади открытия многоугольной фигуры G можно воспользоваться скелетным аналогом операции открытия:

$$G \circ B(r) = (G \ominus B(r)) \oplus B(r) = \bigcup_{s \in Sk(G): \rho(s) \geq r} B_s(\rho(s)). \quad (2)$$

Для произвольной фигуры X введём определения.

Определение 6. *Полным силуэтом* множества $S \subseteq Sk(X)$ будем называть объединение всех вписанных кругов с центрами в точках множества S :

$$G_S = \bigcup_{s \in S} B_s(\rho(s)).$$

На рис. 7 приведён пример полного силуэта для случая, когда множество S образовано точками, лежащими на подграфе скелета. Силуэт закрашен светло-синим, рёбра подграфа выделены сплошной красной линией, а рёбра скелета, не принадлежащие подграфу, обозначены пунктиром.

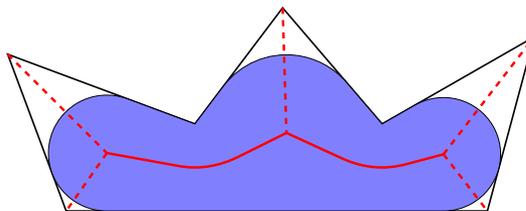


Рис. 7: Полный силуэт подграфа скелета

Определение 7. *Силуэтом ширины z* множества $S \subseteq Sk(X)$ будем называть объединение пустых кругов с центрами в точках множества S с радиальной функцией не меньше z :

$$G_S(z) = \bigcup_{s \in S: \rho(s) \geq z} B_s(\rho(s)).$$

С учётом данных определений открытие многоугольной фигуры G с примитивом $B(z)$ можно рассматривать как силуэт ширины z скелета фигуры.

Пусть скелет фигуры X представлен в виде объединения своих подмножеств:

$$Sk(X) = \bigcup_{i=1}^n S_i.$$

Тогда сама фигура является объединением полных силуэтов этих подмножеств:

$$X = \bigcup_{i=1}^n G_{S_i}.$$

А открытие фигуры с кругом радиуса z является объединением силуэтов ширины z подмножеств скелета фигуры.

$$X \circ B(z) = G_{Sk(X)}(z) = \bigcup_{i=1}^n G_{S_i}(z).$$

Поэтому для площади открытия справедлива формула включений-исключений:

$$\begin{aligned} S(X \circ B(z)) = S\left(\bigcup_{i=1}^n G_{S_i}(z)\right) &= \sum_i G_{S_i}(z) - \sum_{i<j} S(G_{S_i}(z) \cap G_{S_j}(z)) + \\ &+ \sum_{i<j<k} S(G_{S_i}(z) \cap G_{S_j}(z) \cap G_{S_k}(z)) - \dots + \\ &+ (-1)^{n-1} S(G_{S_1}(z) \cap G_{S_2}(z) \cap \dots \cap G_{S_n}(z)). \end{aligned} \quad (3)$$

Вычислять площадь открытия многоугольной фигуры в зависимости от радиуса примитива z мы будем, отталкиваясь именно от этой формулы. Множества S_i логично подобрать таким образом, чтобы площади силуэтов, а также площади их пересечений легко вычислялись. Естественно предположить, что при работе со сложными многоугольными фигурами число таких множеств окажется большим. Поэтому более серьёзной проблемой является то, что формула включений-исключений содержит экспоненциально зависящее от n число слагаемых. Как будет показано далее, медиальное представление многоугольной фигуры обладает свойствами, позволяющими значительно преобразовать формулу и оставить в ней число слагаемых, линейное по n .

Из графового описания скелета многоугольной фигуры следует, что скелет как множество точек можно представить в виде объединения линий — рёбер графа. Вычисление площади открытия многоугольной фигуры мы начнём с изучения силуэтов отдельных рёбер.

2.1 Бициклы в многоугольных фигурах

Определение 8. *Спицей* называется отрезок прямой, соединяющий точку скелета с ближайшей точкой границы фигуры.

Определение 9. *Бициклом* ребра скелета $e \in E$ называется объединение всех вписанных кругов с центрами на ребре e . Ребро e называется *осью* бицикла.

Иначе говоря, бицикл ребра e является его полным силуэтом.

Определение 10. *Собственной областью* называется объединение всех спиц, инцидентных точкам ребра e и линейным ребрам границы фигуры.

Собственная область лежит целиком в бицикле. Граница собственной области состоит из двух сайтов и двух спиц. Собственные области полностью покрывают многоугольную фигуру и могут пересекаться только по граничным спицам (рис. 8). Круги с центрами в вершинах, инцидентных ребру, называются концевыми кругами бицикла. Каждый концевой круг разбивается граничными спицами на два сектора — внутренний и внешний. Внешний сектор опирается на дугу концевой круга, входящую в границу бицикла, а внутренний сектор представляет собой дополнение внешнего сектора в концевом круге.

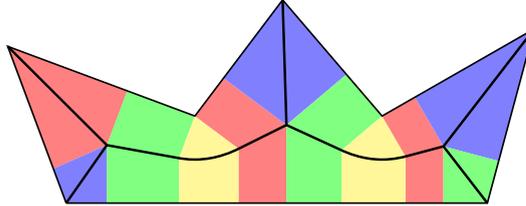


Рис. 8: Собственные области в многоугольной фигуре

Различаются три типа рёбер и их бициклов в зависимости от пары образующих сайтов: сегмент-сегмент, сегмент-точка и точка-точка. В бицикле сегмент-сегмент ось бицикла является прямой линией, такой бицикл называется линейным. В бицикле сегмент-точка ось бицикла является отрезком параболы, поэтому такой бицикл будем называть параболическим.

Введём для бицикла с сайтами точка-точка местную систему прямоугольных декартовых координат, в которой начало координат расположено посередине между сайтами-точками, а ось ординат проходит через сайты-точки. Центры пустых кругов этого бицикла лежат на оси абсцисс. Пусть q — расстояние между сайтами. Тогда радиус пустого круга с центром в точке $(x, 0)$ определяется как $\rho = \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + x^2}$. Это уравнение в системе координат (x, ρ) описывает гиперболу, поэтому бицикл такого типа будем называть гиперболическим.

Определение 11. Ребро называется *монотонным*, если при движении от одного конца ребра к другому радиальная функция изменяется монотонно.

Мы хотим получить в явном виде формулы для вычисления площадей силуэтов $\mathcal{S}_{lin}(z)$, $\mathcal{S}_{par}(z)$ и $\mathcal{S}_{hyp}(z)$ для рёбер всех трёх типов в зависимости от ширины силуэта z . При этом бицикл задаётся только лишь радиусами своих концевых кругов r и R и расстоянием между центрами этих кругов l . Будет показано, что площади силуэтов монотонных рёбер складываются из площадей простых геометрических фигур. Формулы для вычисления площадей силуэтов немонотонных рёбер имеют более сложный вид. Поэтому мы выведем эти формулы только для монотонных рёбер, а впоследствии получим представление скелета фигуры, использующее только монотонные рёбра.

2.2 Силуэт линейного ребра

На рис. 9 представлен линейный бицикл и связанные с ним точки.

AB — ось бицикла, A, B — центры меньшего и большего концевых кругов,

A_1B_1, A_2B_2 — проекции оси бицикла на сайты-сегменты.

Радиальная функция любого линейного бицикла изменяется монотонно от точки A к точке B .

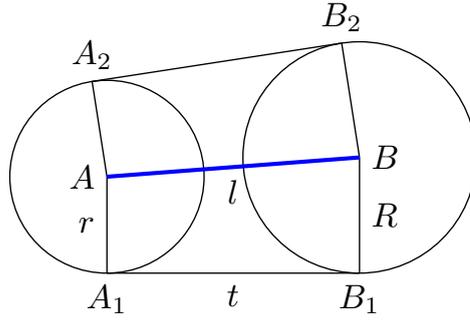


Рис. 9: Линейный бицикл

Теорема 4. Площадь силуэта ширины z линейного ребра описывается уравнением

$$\mathcal{S}_{lin}(z) = \begin{cases} t(r + R) + \arccos\left(\frac{R-r}{l}\right)(r^2 - R^2) + \pi R^2 & \text{при } z \leq r \\ (z + R) \cdot \frac{t(R-z)}{(R-r)} + \arccos\left(\frac{R-r}{l}\right)(z^2 - R^2) + \pi R^2 & \text{при } r < z \leq R \\ 0 & \text{при } z > R, \end{cases} \quad (4)$$

где $t = \sqrt{l^2 - (R - r)^2}$.

Доказательство. Применим к оси бицикла определение силуэта ширины z :

$$G(z) = \bigcup_{P \in AB: \rho(P) \geq z} B_P(\rho(P)).$$

Для начала рассмотрим случай $z > R$. Тогда множество $\{P \in AB : \rho(P) \geq z\}$ пусто, и силуэт ширины z также является пустым множеством.

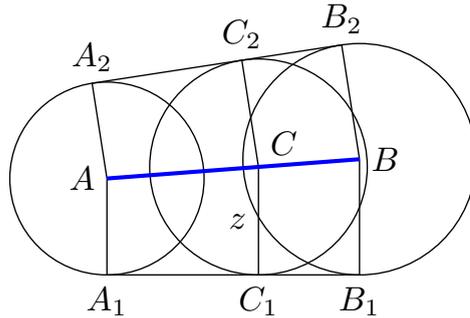


Рис. 10: К доказательству теоремы 4

Пусть $r < z \leq R$. В этом случае на оси бицикла найдётся точка C , являющаяся центром пустого круга с радиусом z (рис. 10). Пусть C_1 и C_2 — проекции C на сайты-сегменты. Точки оси бицикла с радиальной функцией не меньше z лежат на отрезке CB , а силуэт представляет собой фигуру, ограниченную отрезками C_1B_1 , C_2B_2 и дугами окружностей C_2CC_1 и B_1BB_2 . Площадь $G(z)$ складывается из площадей двух конгруэнтных трапеций CC_1B_1B и C_2CBB_2 , а также площадей секторов C_2CC_1 и B_1BB_2 .

Площадь трапеции

$$\mu(C_1CBB_1) = \frac{(CC_1 + BB_1) \cdot C_1B_1}{2}.$$

Из пропорции $\frac{C_1B_1}{BB_1 - CC_1} = \frac{A_1B_1}{BB_1 - AA_1}$ получаем

$$C_1B_1 = \frac{A_1B_1}{BB_1 - AA_1} \cdot (BB_1 - CC_1).$$

Поскольку $A_1B_1 = t$, $BB_1 = R$, $AA_1 = r$, $CC_1 = z$, имеем

$$\mu(C_1CBB_1) = \frac{z + R}{2} \cdot \frac{t(R - z)}{(R - r)}.$$

Теперь рассмотрим внешние сектора концевых кругов отрезка CB . Так как угол наклона спиц к оси одинаковый во всех её точках, углы при внешних секторах в сумме дают 2π .

$$\angle ABB_1 = \arccos\left(\frac{R - r}{l}\right),$$

$$\angle C_2CC_1 = 2\angle ABB_1 = 2\arccos\left(\frac{R - r}{l}\right),$$

$$\angle B_1BB_2 = 2\pi - \angle C_2CC_1 = 2\left(\pi - \arccos\left(\frac{R - r}{l}\right)\right).$$

$$\begin{aligned} \mu(G(z)) &= \mu(C_1CBB_1) + \mu(C_2CB_2B) + \mu(C_2CC_1) + \mu(B_1BB_2) = \\ &= \frac{z + R}{2} \cdot \frac{t(R - z)}{(R - r)} + \frac{z + R}{2} \cdot \frac{t(z - r)}{(R - r)} + \\ &+ 2\arccos\left(\frac{R - r}{l}\right) \frac{r^2}{2} + 2\left(\pi - \arccos\left(\frac{R - r}{l}\right)\right) \frac{R^2}{2} = \\ &= (z + R) \cdot \frac{t(z - r)}{(R - r)} + \arccos\left(\frac{R - r}{l}\right) (z^2 - r^2) + \pi R^2. \end{aligned}$$

В случае, если $z \leq r$, силуэт ширины z является полным силуэтом, т.е. самым бициклом. Площадь исходного бицикла, как и в предыдущем случае, складывается из площадей двух трапеций и двух секторов, и ее можно найти, подставив в предыдущую формулу r вместо z . ■

2.3 Силуэт параболического ребра

На рис. 11 представлен параболический бицикл.

AB — отрезок параболы — ось бицикла, A, B — центры меньшего и большего концевых кругов,

A_1, B_1 — проекции оси бицикла на сайт-сегмент,

C — сайт-точка параболического бицикла,

r, R — радиусы концевых кругов бицикла, $r \leq R$,

l — расстояние между их центрами,

$t = \sqrt{l^2 - (R - r)^2}$ — длина проекции оси бицикла на директрису параболы.

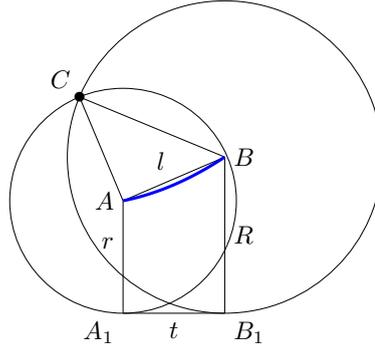


Рис. 11: Параболический бицикл

Ось бицикла представляет собой отрезок параболы. При этом вершина параболы может лежать как на оси бицикла, так и вне её. Положение вершины параболы относительно оси имеет важное значение, поскольку позволяет определить, является ли ось бицикла монотонным ребром, а для нас представляют интерес в первую очередь монотонные рёбра.

Лемма 1. Если $t > 2 \cdot \sqrt{r \cdot (R - r)}$, то радиальная функция изменяется на оси бицикла монотонно, иначе радиальная функция имеет локальный минимум в вершине параболы.

Доказательство. При движении от вершины параболы радиальная функция возрастает, при движении к вершине — убывает. Если вершина параболы является внутренней точкой оси бицикла, при прохождении через вершину характер изменения радиальной функции меняется с убывающего на возрастающий, следовательно, вершина является точкой локального минимума. В противном случае движение происходит только по одной ветви параболы, и радиальная функция изменяется монотонно.

Условие, позволяющее определить положение вершины параболы относительно оси параболического бицикла, известно из статьи [8]. Если $t > 2 \cdot \sqrt{r \cdot (R - r)}$, то вершина параболы является внутренней точкой оси бицикла, если $t = 2 \cdot \sqrt{r \cdot (R - r)}$, вершина совпадает с центром меньшего концевой круга, если $t < 2 \cdot \sqrt{r \cdot (R - r)}$, вершина лежит вне оси бицикла.

Из этого условия напрямую следует условие монотонности оси бицикла. ■

Также в статье [8] показано, что фокальный параметр p параболы можно найти по формуле

$$p = \frac{t^2}{2l^2} \left(R + r + \sqrt{(R + r)^2 - l^2} \right).$$

Теорема 5. Площадь силуэта ширины z монотонного параболического ребра описывается уравнением

$$\mathcal{S}_{par}(z) = \begin{cases} \frac{p+R}{2} \sqrt{2p \left(R - \frac{p}{2} \right)} - \frac{p+r}{2} \sqrt{2p \left(R - \frac{p}{2} \right)} + \\ \quad + \left(\arcsin \left(\frac{p-r}{r} \right) + \frac{\pi}{2} \right) \frac{r^2}{2} + \left(\frac{3\pi}{2} - \arcsin \left(\frac{p-R}{R} \right) \right) \frac{R^2}{2} & \text{при } z \leq r \\ \frac{p+R}{2} \sqrt{2p \left(R - \frac{p}{2} \right)} - \frac{p+z}{2} \sqrt{2p \left(z - \frac{p}{2} \right)} + \\ \quad + \left(\arcsin \left(\frac{p-z}{z} \right) + \frac{\pi}{2} \right) \frac{z^2}{2} + \left(\frac{3\pi}{2} - \arcsin \left(\frac{p-R}{R} \right) \right) \frac{R^2}{2} & \text{при } r < z \leq R \\ 0 & \text{при } z > R. \end{cases} \quad (5)$$

Доказательство. По определению силуэта ширины z (AB обозначает отрезок параболы)

$$G(z) = \bigcup_{P \in AB: \rho(P) \geq z} B_P(\rho(P)).$$

Для начала рассмотрим случай $z > R$. Тогда множество $\{P \in AB : \rho(P) \geq z\}$ пусто, и силуэт ширины z также является пустым множеством.

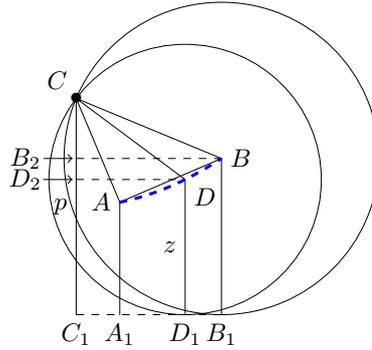


Рис. 12: К доказательству теоремы 5

Пусть $r < z \leq R$. В этом случае на оси бицикла найдётся точка D , являющаяся центром пустого круга с радиусом z (12). Пусть C_1 и D_1 — проекции точек C и D на сайт-сегмент, а B_2 и D_2 — проекции точек B и D на отрезок CC_1 . Точки оси бицикла с радиальной функцией не меньше z лежат на отрезке параболы DB , а открытие бицикла представляет собой фигуру, ограниченную отрезком D_1B_1 и дугами окружностей CDD_1 и B_1BC . Площадь $G(z)$ складывается из площади многоугольника D_1DCBB_1 , а также площадей секторов CDD_1 и B_1BC .

Площадь многоугольника D_1DCBB_1 можно представить как разность площадей трапеций C_1CBB_1 и C_1CDD_1 . Площадь первой трапеции

$$\mu(C_1CBB_1) = \frac{(CC_1 + BB_1) \cdot C_1B_1}{2}.$$

Из уравнения параболы имеем

$$(BB_2)^2 = 2p \cdot \left(BB_1 - \frac{p}{2} \right),$$

$$BB_2 = \sqrt{2p \cdot \left(BB_1 - \frac{p}{2} \right)}.$$

Поскольку $C_1B_1 = BB_2$, $CC_1 = p$, $BB_1 = R$, получаем

$$\mu(D_1DCBB_1) = \frac{(p + R) \cdot \sqrt{2p \cdot \left(R - \frac{p}{2} \right)}}{2}.$$

Площадь второй трапеции

$$\mu(C_1CDD_1) = \frac{(CC_1 + DD_1) \cdot C_1D_1}{2}.$$

Из уравнения параболы имеем

$$(DD_2)^2 = 2p \cdot \left(DD_1 - \frac{p}{2} \right),$$

$$DD_2 = \sqrt{2p \cdot \left(DD_1 - \frac{p}{2} \right)}.$$

С учётом того, что $C_1D_1 = DD_2$, $DD_1 = z$, получаем

$$\mu(C_1CDD_1) = \frac{(p+z) \cdot \sqrt{2p \cdot \left(z - \frac{p}{2} \right)}}{2}.$$

Таким образом

$$\begin{aligned} \mu(D_1DCBB_1) &= \mu(C_1CBB_1) - \mu(C_1CDD_1) = \\ &= \frac{(p+R) \cdot \sqrt{2p \cdot \left(R - \frac{p}{2} \right)}}{2} - \frac{(p+z) \cdot \sqrt{2p \cdot \left(z - \frac{p}{2} \right)}}{2}. \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим внешние сектора концевых кругов отрезка параболы DC . Определим углы при этих секторах.

$$\begin{aligned} \angle CDD_1 &= \angle CDD_2 + \angle D_2DD_1 = \angle CDD_2 + \frac{\pi}{2}, \\ \angle CDD_2 &= \arcsin\left(\frac{CD_2}{CD}\right) = \arcsin\left(\frac{CC_1 - DD_1}{CD}\right) = \arcsin\left(\frac{p-z}{z}\right), \\ \angle CDD_1 &= \arcsin\left(\frac{p-z}{z}\right) + \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \angle B_1BC &= 2\pi - \angle CBB_1 = 2\pi - (\angle CBB_2 + \angle B_2BB_1) = 2\pi - \left(\angle CBB_2 + \frac{\pi}{2}\right), \\ \angle CBB_2 &= \arcsin\left(\frac{CB_2}{CB}\right) = \arcsin\left(\frac{CC_1 - BB_1}{CB}\right) = \arcsin\left(\frac{p-R}{R}\right), \\ \angle B_1BC &= \frac{3\pi}{2} - \angle CBB_2 = \frac{3\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{p-R}{R}\right). \end{aligned}$$

В итоге

$$\begin{aligned} \mu(G(z)) &= \mu(D_1DCBB_1) + \mu(CDD_1) + \mu(B_1BC) = \\ &= \frac{(p+R) \cdot \sqrt{2p \cdot \left(R - \frac{p}{2} \right)}}{2} - \frac{(p+z) \cdot \sqrt{2p \cdot \left(z - \frac{p}{2} \right)}}{2} + \\ &+ \left(\arcsin\left(\frac{p-z}{z}\right) + \frac{\pi}{2} \right) \frac{z^2}{2} + \left(\frac{3\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{p-R}{R}\right) \right) \frac{R^2}{2}. \end{aligned}$$

В случае, если $z \leq r$, силуэт ширины z совпадает с самим бициклом. Площадь исходного бицикла, как и в предыдущем случае, складывается из площади многоугольника, которую можно найти как разность площадей двух трапеций, и площадей двух секторов. Искомую площадь можно вычислить, подставив в предыдущую формулу r вместо z . ■

2.4 Силуэт гиперболического ребра

На рис. 13 представлен гиперболический бицикл. Здесь отрезок AB — это ось бицикла, r, R ($r \leq R$) — радиусы концевых кругов с центрами в точках A и B , l — расстояние между центрами концевых кругов, C, D — образующие сайты-точки бицикла. Точку пересечения прямой CD с прямой AB будем называть центром гиперболического бицикла.

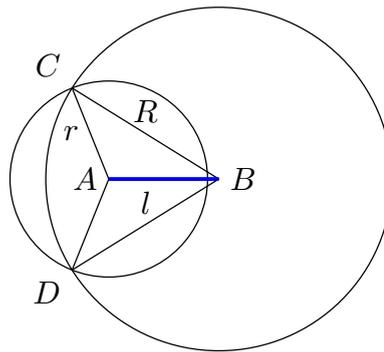


Рис. 13: Гиперболический бицикл

В зависимости от соотношения величин r, R, l точки A и B могут находиться по одну сторону от прямой CD или по разные стороны от неё. В первом случае центр лежит вне оси бицикла, а во втором — на оси. От положения центра в гиперболическом бицикле зависит, является ли его ось монотонным ребром.

Лемма 2. Если $l^2 + r^2 > R^2$, радиальная функция изменяется монотонно при движении по оси бицикла, иначе радиальная функция имеет локальный минимум в центре бицикла.

Доказательство. При движении по оси от центра бицикла радиальная функция возрастает, при движении к центру — убывает. Если центр бицикла является внутренней точкой его оси, при прохождении через центр характер изменения радиальной функции меняется с убывающего на возрастающий, следовательно, центр является точкой локального минимума. В противном случае движение происходит в одном и том же направлении относительно центра, и радиальная функция изменяется монотонно.

Положение центра гиперболического бицикла относительно его оси определяется следующим условием, из которого и следует условие монотонности бицикла.

Если $l^2 + r^2 > R^2$, то центр является внутренней точкой оси параболического бицикла, если $l^2 + r^2 = R^2$, центр бицикла совпадает с центром меньшего концевых кругов, если $l^2 + r^2 < R^2$, центр лежит вне оси бицикла. ■

Параметр гиперболического бицикла с радиусами концевых кругов r, R и длиной оси l равен

$$q = \frac{1}{l} \sqrt{[(l + R)^2 - R^2] \cdot [R^2 - (l - r)^2]}.$$

Доказательства этих утверждений можно найти в работе [8].

Теорема 6.

Площадь силуэта ширины z монотонного гиперболического ребра описывается уравнением

$$S_{hyp}(z) = \begin{cases} \frac{q}{2} \left(\sqrt{R^2 - \left(\frac{q}{2}\right)^2} - \sqrt{r^2 - \left(\frac{q}{2}\right)^2} \right) + \\ \quad + \arcsin\left(\frac{q}{2r}\right)r^2 + \left(\pi - \arcsin\left(\frac{q}{2R}\right)\right)R^2 & \text{при } z \leq r \\ \frac{q}{2} \left(\sqrt{R^2 - \left(\frac{q}{2}\right)^2} - \sqrt{z^2 - \left(\frac{q}{2}\right)^2} \right) + \\ \quad + \arcsin\left(\frac{q}{2z}\right)z^2 + \left(\pi - \arcsin\left(\frac{q}{2R}\right)\right)R^2 & \text{при } r < z \leq R \\ 0 & \text{при } z > R. \end{cases} \quad (6)$$

Доказательство.

По определению силуэта ширины z

$$G(z) = \bigcup_{P \in AB: \rho(P) \geq z} B_P(\rho(P)).$$

Для начала рассмотрим случай $z > R$. Тогда множество $\{P \in AB : \rho(P) \geq z\}$ пусто, и силуэт ширины z также является пустым множеством.

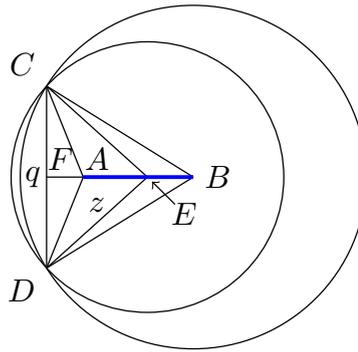


Рис. 14: К доказательству теоремы 6

Пусть $r < z \leq R$. В этом случае на оси бицикла найдётся точка E , являющаяся центром пустого круга с радиусом z (рис. 14). Точки оси бицикла с радиальной функцией не меньше z лежат на отрезке EB , а открытие бицикла представляет собой фигуру, ограниченную дугами окружностей CED и DBC . Площадь $G(z)$ складывается из площади четырёхугольника $ECBD$, а также площадей секторов CED и DBC .

Площадь четырёхугольника $ECBD$ складывается из суммы площадей равных треугольников ECB и EBD . Обозначим центр бицикла F и рассмотрим один из треугольников.

$$\begin{aligned}
\mu(ECB) &= \frac{EB \cdot FC}{2}, \\
EB &= FB - FE, \\
FB &= \sqrt{(BC)^2 - (FC)^2} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{q}{2}\right)^2}, \\
FE &= \sqrt{(EC)^2 - (FC)^2} = \sqrt{z^2 - \left(\frac{q}{2}\right)^2}, \\
EB &= \sqrt{R^2 - \left(\frac{q}{2}\right)^2} - \sqrt{z^2 - \left(\frac{q}{2}\right)^2}.
\end{aligned}$$

Поскольку $FC = \frac{q}{2}$, получаем

$$\begin{aligned}
\mu(ECB) &= \frac{\left(\sqrt{R^2 - \left(\frac{q}{2}\right)^2} - \sqrt{z^2 - \left(\frac{q}{2}\right)^2}\right) \cdot \frac{q}{2}}{2}, \\
\mu(ECBD) &= 2 \cdot \mu(ECB) = \frac{q}{2} \left(\sqrt{R^2 - \left(\frac{q}{2}\right)^2} - \sqrt{z^2 - \left(\frac{q}{2}\right)^2}\right).
\end{aligned}$$

Теперь рассмотрим внешние сектора концевых кругов отрезка EB . Определим углы при этих секторах.

$$\begin{aligned}
\angle CED &= 2 \cdot \angle CEF = 2 \arcsin\left(\frac{FC}{EC}\right) = 2 \arcsin\left(\frac{q}{2z}\right), \\
\angle DBC &= 2\pi - \angle CBD = 2\pi - 2 \cdot \angle CBF = \\
&= 2 \left(\pi - \arcsin\left(\frac{FC}{BC}\right)\right) = 2 \left(\pi - \arcsin\left(\frac{q}{2R}\right)\right).
\end{aligned}$$

В итоге

$$\begin{aligned}
\mu(G(z)) &= \mu(ECBD) + \mu(CED) + \mu(DBC) = \\
&= \frac{q}{2} \left(\sqrt{R^2 - \left(\frac{q}{2}\right)^2} - \sqrt{z^2 - \left(\frac{q}{2}\right)^2}\right) + 2 \arcsin\left(\frac{q}{2z}\right) \frac{z^2}{2} + 2 \left(\pi - \arcsin\left(\frac{q}{2R}\right)\right) \frac{R^2}{2}.
\end{aligned}$$

В случае, если $z \leq r$, силуэт ширины z совпадает с самим бициклом. Площадь исходного бицикла, как и в предыдущем случае, складывается из площадей двух равных треугольников и площадей двух секторов, и её можно вычислить, подставив в предыдущую формулу r вместо z . ■

Определение 12. В том случае, если вершина параболы или центр гиперболического бицикла лежит на оси бицикла, будем называть такую точку *минимальной точкой* бицикла.

3 Монотонные ветви

Определение 13. *Ветвью* скелета фигуры назовём непрерывную линию без самопересечений, состоящую из точек скелета.

Определение 14. *Монотонной ветвью* назовём ветвь, при движении по которой радиальная функция изменяется монотонно.

Если ветвь не является монотонной, то при любой её параметризации радиальная функция, выраженная через параметр, будет иметь локальный экстремум. Обобщая понятие локального экстремума на скелет, будем считать точку локальным экстремумом радиальной функции для скелета, если она является локальным экстремумом для одной из его ветвей. Далее нам будет удобно работать с этим определением в несколько иной формулировке.

Определение 15. *Локальным минимумом* радиальной функции будем называть такую точку скелета, для которой существуют два направления, при движении в одном из которых радиальная функция возрастает, а при движении в другом — не убывает. Кроме того, к локальным минимумам будем относить терминальные вершины скелета, поскольку в них радиальная функция равна нулю и возрастает при движении в единственном возможном направлении.

Определение 16. Аналогично, *локальным максимумом* радиальной функции будем называть такую точку скелета, для которой существуют два направления, при движении в одном из которых радиальная функция убывает, а при движении в другом — не возрастает. При проведении дальнейших рассуждений мы будем неявно предполагать, что вершины границы многоугольной фигуры находятся в общем положении: никакие четыре из них не лежат на одной окружности. Если это условие выполняется, скелет фигуры не содержит вершин степени более 3. Это позволяет сделать выкладки более компактными, хотя все дальнейшие утверждения легко обобщаются на тот случай, когда такие вершины есть.

Теорема 7. Локальные минимумы радиальной функции, не являющиеся терминальными вершинами скелета, расположены в минимальных точках параболических и гиперболических бициклов. Локальные максимумы расположены в вершинах скелета степени 3.

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку скелета, не являющуюся терминальной вершиной, и движение из этой точки по оси соответствующего бицикла. Проведём из этой точки пару спиц к образующим сайтам бицикла. В случае сайта-точки спица соединяет точку скелета с самим сайтом, для сайта-сегмента спица является перпендикуляром, опущенным на сайт. Характер изменения радиальной функции при движении в рассматриваемом направлении тесно связан с величиной угла α , образованного этими спицами (внутренней областью угла считаем ту, в которой происходит движение).

Для линейного ребра радиальная функция:

- убывает, если $\alpha < \pi$;
- остаётся постоянной, если $\alpha = \pi$;
- возрастает, если $\alpha > \pi$.

Для параболического или гиперболического ребра радиальная функция:

- убывает, если $\alpha < \pi$;
- возрастает, если $\alpha \geq \pi$.

Отметим, что число внутренних углов в точке равно числу возможных направлений, и сумма этих углов равна 2π . Анализируя возможные комбинации значений внут-

ренных углов, приходим к выводу, что точка является локальным минимумом тогда и только тогда, когда она имеет ровно два возможных направления и оба её внутренних угла равны π . При этом движение в направлении возрастания радиальной функции может происходить только по параболическому или гиперболическому ребру, а сама точка должна совпадать с вершиной параболы (если ребро параболическое) или центром гиперболического бицикла (если ребро гиперболическое). Возможны следующие ситуации:

1. Точка является внутренней для параболического или гиперболического ребра.
2. Точка является центром концевой окружности, общего для корневого параболического и корневого гиперболического бициклов.
3. Точка является центром концевой окружности, общего для корневого параболического (гиперболического) бицикла и линейного бицикла с постоянной радиальной функцией.

Во всех этих случаях точка является минимальной для параболического/гиперболического бицикла или для двух таких бициклов сразу.

Локальные максимумы могут быть расположены только в вершинах степени 3, поскольку сумма внутренних углов для двух направлений из определения локального максимума получается меньше, чем 2π . При этом любая вершина степени 3 является локальным максимумом, поскольку для этой вершины может существовать не более одного угла не меньше, чем π . ■

Таким образом, любая часть скелета, заключённая между двумя ближайшими локальными экстремумами, является монотонной ветвью, поскольку не содержит локальных экстремумов в качестве внутренних точек. Такая монотонная ветвь может не быть максимальной по включению, поскольку локальные максимумы для одних немонотонных ветвей могут быть внутренними точками других монотонных ветвей. Тем не менее, использование ветвей, соединяющих два ближайших локальных экстремума, позволяет добиться очень удобного для наших целей представления скелета.

Определение 17. Графом монотонных ветвей называется геометрический граф $\langle \mathfrak{V}, \mathfrak{E} \rangle$, где \mathfrak{V} — множество локальных экстремумов радиальной функции, \mathfrak{E} — множество монотонных ветвей, заключённых между ближайшими локальными экстремумами. Рёбрам графа присвоено направление, совпадающее с направлением роста радиальной функции.

Отметим, что граф монотонных ветвей описывает то же множество точек, что и скелет, меняется лишь способ группировки этих точек. Поэтому в качестве отправного пункта для построения этого графа естественно взять графовое представление скелета многоугольной фигуры. Однако, нетрудно заметить, что не все вершины графа монотонных ветвей являются вершинами исходного скелета. Кроме того, нельзя полностью отнести к каким-либо монотонным ветвям те параболические и гиперболические рёбра, которые содержат свои минимальные точки и не являются монотонными. Поэтому в процессе построения графа монотонных ветвей нам потребуется процедура вычисления координат минимальных точек, принадлежащих немонотонным рёбрам, и разбиения этих рёбер на пару монотонных.

Для обозначения координат какой-либо точки будем использовать обозначение этой точки в качестве нижнего индекса координаты. Например, координаты точки A будем обозначать (x_A, y_A) .

Лемма 3. Вершина F параболического бицикла, образованного сайтом-точкой C и сайтом-сегментом с концами G и H , имеет координаты

$$\left(\frac{x_C + x_G + \alpha(x_H - x_G)}{2}, \frac{y_C + y_G + \alpha(y_H - y_G)}{2} \right),$$

где

$$\alpha = \frac{(x_H - x_G)(x_C - x_G) + (y_H - y_G)(y_C - y_G)}{(x_H - x_G)(x_H - x_G) + (y_H - y_G)(y_H - y_G)}.$$

Доказательство. Определим координаты точки C_1 — проекции фокуса параболы на директрису. Директриса содержит отрезок GH и точку C_1 , поэтому

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{GH}, \overrightarrow{GC_1}) &= (\overrightarrow{GH}, \overrightarrow{GC_1}) = (\overrightarrow{GH}, \alpha \overrightarrow{GH}) = \alpha |\overrightarrow{GH}|^2, \\ \alpha &= \frac{(\overrightarrow{GH}, \overrightarrow{GC_1})}{|\overrightarrow{GH}|^2} = \frac{(x_H - x_G)(x_C - x_G) + (y_H - y_G)(y_C - y_G)}{(x_H - x_G)(x_H - x_G) + (y_H - y_G)(y_H - y_G)}. \end{aligned}$$

Откладывая вектор $\alpha |\overrightarrow{GH}|$ от точки G , получаем

$$(x_{C_1}, y_{C_1}) = (x_G + \alpha(x_H - x_G), y_G + \alpha(y_H - y_G)). \quad (7)$$

Вершина параболы является серединой отрезка, соединяющего фокус и его проекцию на директрису. Поэтому:

$$\begin{aligned} (x_F, y_F) &= \left(\frac{x_C + x_{C_1}}{2}, \frac{y_C + y_{C_1}}{2} \right) \\ &= \left(\frac{x_C + x_G + \alpha(x_H - x_G)}{2}, \frac{y_C + y_G + \alpha(y_H - y_G)}{2} \right). \end{aligned}$$

Лемма 4. Пусть образующие сайты-точки гиперболического бицикла имеют координаты (x_C, y_C) и (x_D, y_D) . Тогда центр бицикла F имеет координаты $\left(\frac{x_C + x_D}{2}, \frac{y_C + y_D}{2} \right)$. ■

Доказательство. Очевидно, поскольку центр бицикла расположен на отрезке CD и равноудалён от его концов. ■

Описание алгоритма, осуществляющего преобразование скелетного графа в граф монотонных ветвей, приведено в приложении А. Работа алгоритма включает в себя два основных этапа:

1. Получение графа монотонных рёбер. Для каждого параболического или гиперболического рёбра, содержащего минимальную точку, вычисляются её координаты, после чего такое ребро разбивается этой точкой на пару монотонных.

2. Обход графа монотонных рёбер с выделением последовательностей сонаправленных рёбер и объединением их в монотонные ветви. В итоге монотонная ветвь задаётся множеством рёбер, упорядоченных по росту их радиальной функции.

Процесс получения графа монотонных ветвей показан на рис. 15. Жирными красными точками в случае (а) обозначены все вершины скелета, в случаях (б) и (с) — вершины, добавленные в граф в результате подразбиения на монотонные рёбра.

Далее мы будем рассматривать ветвь скелета как простую цепь в графе монотонных рёбер. Дополнительно будем предполагать, что монотонные ветви получены в результате работы алгоритма 1 и не содержат внутренних вершин степени 3.

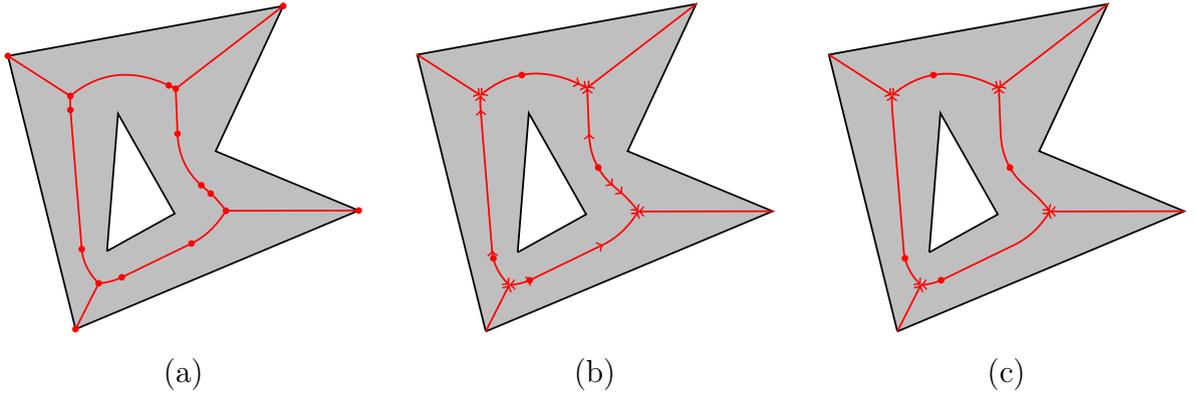


Рис. 15: (a) Скелет многоугольной фигуры, (b) скелет с ориентированными монотонными рёбрами, (c) граф монотонных ветвей

3.1 Силуэт монотонной ветви

Теперь, после того как получено представление монотонной ветви в виде объединения рёбер скелета, естественно поставить вопрос о вычислении площади силуэта ширины z всей монотонной ветви. Очевидно, что эта площадь не является суммой площадей силуэтов относящихся к ветви рёбер, так как силуэты пересекаются между собой.

Тем не менее достаточно перейти от площади силуэта ширины z к площади чуть более сложной области, чтобы можно было рассчитать площадь силуэта всей ветви, учитывая вклад каждого ребра независимо. Обозначим C_e большой концевой круг бицикла ребра e .

Определение 18. Шлейфом ширины z ребра e будем называть разность множеств: силуэта ширины z ребра и большего концевой круга бицикла ребра:

$$H_e(z) = G_e(z) \setminus C_e. \quad (8)$$

Определение 19. Аналогично, разность множеств: полного силуэта ребра e и большего концевой круга бицикла ребра будем называть *полным шлейфом* ребра e и обозначать H_e .

Формулы для вычисления площади шлейфа ширины z в зависимости от типа ребра легко получить из формул для вычисления площади силуэта той же ширины.

Лемма 5. Площадь шлейфа ширины z описывается уравнениями:

а) Для линейного ребра

$$\mathcal{F}_{lin}(z) = \begin{cases} t(r + R) + \arccos\left(\frac{R-r}{l}\right) (r^2 - R^2) & \text{при } z \leq r \\ (z + R) \cdot \frac{t(R-z)}{(R-r)} + \arccos\left(\frac{R-r}{l}\right) (z^2 - R^2) & \text{при } r < z \leq R \\ 0 & \text{при } z > R, \end{cases} \quad (9)$$

где $t = \sqrt{l^2 - (R - r)^2}$.

б) Для параболического ребра

$$\mathcal{F}_{par}(z) = \begin{cases} \frac{p+R}{2} \sqrt{2p \left(R - \frac{p}{2}\right)} - \frac{p+r}{2} \sqrt{2p \left(R - \frac{p}{2}\right)} + \\ \quad + \left(\arcsin\left(\frac{p-r}{r}\right) + \frac{\pi}{2}\right) \frac{r^2}{2} - \left(\arcsin\left(\frac{p-R}{R}\right) + \frac{\pi}{2}\right) \frac{R^2}{2} & \text{при } z \leq r \\ \frac{p+R}{2} \sqrt{2p \left(R - \frac{p}{2}\right)} - \frac{p+z}{2} \sqrt{2p \left(z - \frac{p}{2}\right)} + \\ \quad + \left(\arcsin\left(\frac{p-z}{z}\right) + \frac{\pi}{2}\right) \frac{z^2}{2} - \left(\arcsin\left(\frac{p-R}{R}\right) + \frac{\pi}{2}\right) \frac{R^2}{2} & \text{при } r < z \leq R \\ 0 & \text{при } z > R. \end{cases} \quad (10)$$

с) Для гиперболического ребра

$$\mathcal{F}_{hyp}(z) = \begin{cases} \frac{q}{2} \left(\sqrt{R^2 - \left(\frac{q}{2}\right)^2} - \sqrt{r^2 - \left(\frac{q}{2}\right)^2} \right) + \\ \quad + \arcsin\left(\frac{q}{2r}\right) r^2 - \arcsin\left(\frac{q}{2R}\right) R^2 & \text{при } z \leq r \\ \frac{q}{2} \left(\sqrt{R^2 - \left(\frac{q}{2}\right)^2} - \sqrt{z^2 - \left(\frac{q}{2}\right)^2} \right) + \\ \quad + \arcsin\left(\frac{q}{2z}\right) z^2 - \arcsin\left(\frac{q}{2R}\right) R^2 & \text{при } r < z \leq R \\ 0 & \text{при } z > R. \end{cases} \quad (11)$$

Доказательство. Если $z \leq R$, силуэт ребра полностью включает в себя больший концевой круг, иначе силуэт является пустым множеством. Поэтому площадь шлейфа можно представить как разность площадей силуэтов ребра и центра большего концевой круга. Площадь силуэта точки, радиальная функция в которой равна R , определяется формулой

$$\mathcal{S}_{dot}(z) = \begin{cases} \pi R^2 & \text{при } z \leq R \\ 0 & \text{при } z > R. \end{cases}$$

Вычитая эту функцию из функций площади силуэтов рёбер (теоремы 4, 5, 6), получаем необходимые формулы. ■

Примечание. Зависимость площади шлейфа от ширины z выражается непрерывной функцией в отличие от площади силуэта ширины z , функция которой имеет скачок в точке R равный πR^2 .

Введём обозначения:

\mathfrak{M} — монотонная ветвь,

$e_i, i = 1, \dots, n$ — монотонные рёбра, образующие ветвь, упорядоченные по возрастанию радиальной функции,

C_i — большой концевой круг бицикла ребра e_i ,

$C_{\mathfrak{M}}$ — большой концевой круг ветви (большой концевой круг бицикла ребра e_n),

$B_{\mathfrak{M}}$ — центр этого круга,

P_i — собственная область бицикла ребра e_i ,

D_i^{11}, D_i^{12} — внутренний и внешний сектора меньшего концевой круга бицикла ребра e_i ,

D_i^{21}, D_i^{22} — внутренний и внешний сектора большего концевой круга бицикла ребра e_i ,

Теорема 8. Площадь силуэта ширины z монотонной ветви равна сумме площадей: шлейфов ширины z образующих ветвь рёбер и силуэта ширины z большего концевой круга ветви:

$$\mathcal{S}_{\mathfrak{M}}(z) = \sum_{i=1}^n \mathcal{F}_{e_i}(z) + \mathcal{S}_{B_{\mathfrak{M}}}(z). \quad (12)$$

Доказательство. Рассмотрим полный силуэт монотонной ветви. Его можно представить в виде объединения областей: собственных областей составляющих ветвь рёбер и внешних секторов концевых кругов ветви:

$$G_{\mathfrak{M}} = D_1^{12} \cup P_1 \cup \dots \cup P_n \cup D_n^{22}.$$

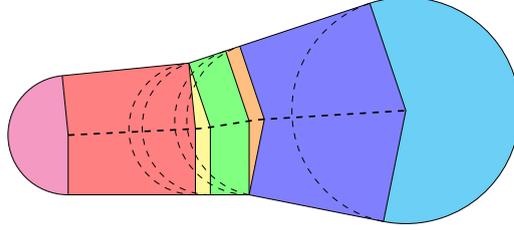


Рис. 16: Покрытие силуэта монотонной ветви собственными областями рёбер и внешними секторами концевых кругов

Собственные области рёбер ветви могут пересекаться как между собой, так и с внешними секторами концевых кругов ветви только по своим граничным спицам. А сами эти сектора не могут пересекаться между собой, поскольку тогда на границе силуэта ветви нашлась бы пара смежных отрезков, угол между которыми меньше π . Так как эти отрезки относятся к границе многоугольной фигуры, из общей вершины отрезков должно выходить ребро скелета, не относящееся к ветви, но проходящее через собственные области её рёбер. Получаем противоречие. Таким образом, собственные области и сектора концевых кругов пересекаются между собой только по общим границам (рис. 16).

Полный шлейф ребра e_i можно представить в виде:

$$H_i = (P_i \cup D_i^{12}) \setminus D_i^{21}.$$

Так как вершины степени 3 могут быть только концами монотонной ветви,

$$\begin{aligned} D_i^{21} \cup D_{i+1}^{11} &= C_i, & i &= 1, \dots, n-1 \\ D_i^{21} &= D_i^{12}, \end{aligned} \quad (13)$$

т.е. внутренний сектор большего концевой круга бицикла ребра e_i является внешним сектором меньшего концевой круга бицикла ребра e_{i+1} .

$$\begin{aligned} G_{\mathfrak{M}} &= D_1^{12} \cup P_1 \cup \dots \cup P_n \cup D_n^{22} = \\ &= ((D_1^{12} \cup P_1) \setminus D_1^{21}) \cup ((D_2^{12} \cup P_2) \setminus D_2^{21}) \cup \dots \cup ((D_n^{12} \cup P_n) \setminus D_n^{21}) \cup D_n^{21} \cup D_n^{22} = \\ &= H_1 \cup \dots \cup H_n \cup C_{\mathfrak{M}}. \end{aligned} \quad (14)$$

Можно заметить, что полные шлейфы и концевой круг ветви вообще не пересекаются между собой, поэтому мы имеем дело с разбиением полного силуэта ветви (рис. 17).

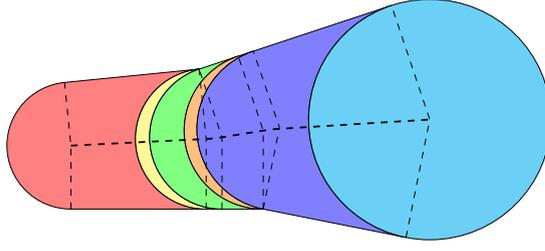


Рис. 17: Разбиение силуэта монотонной ветви на шлейфы рёбер и большой концевой круг

Обозначим радиус меньшего концевой круга ветви за r , радиус большего круга — за R , радиусы соответствующих кругов ребра e_i — за r_i и R_i . Рассмотрим вычисление площади силуэта ветви ширины z при конкретном значении ширины.

Рассмотрим случай $z > R$. Тогда силуэт ветви является пустым множеством, как и все области, площади которых используются в формуле (12).

При $z \leq r$ силуэт ширины z является полным силуэтом ветви. Так как мы представили полный силуэт в виде разбиения, его площадь можно найти в виде суммы площадей составляющих разбиение областей.

Если $r < z \leq R$, среди рёбер e_1, \dots, e_n найдётся единственное ребро e_k , для которого $r_k < z \leq R_k$. Тогда шлейфы рёбер e_1, \dots, e_{k-1} являются пустыми множествами, и силуэт ширины z ветви можно представить в виде разбиения на максимальный пустой круг, полные шлейфы рёбер e_{k+1}, \dots, e_n и шлейф ширины z ребра e_k . Все упомянутые шлейфы совпадают со шлейфами ширины z своих рёбер, а максимальный круг является силуэтом ширины z своего центра. Поэтому между площадями областей и слагаемыми в формуле (12) есть взаимно однозначное соответствие, а площадь силуэта равна сумме площадей, так как мы имеем дело с разбиением. ■

Определение 20. Шлейфом ширины z монотонной ветви \mathfrak{M} будем называть разность множеств: силуэта ширины z ветви и её большего концевой круга:

$$H_{\mathfrak{M}}(z) = G_{\mathfrak{M}}(z) \setminus C_{\mathfrak{M}}. \quad (15)$$

Очевидно, что площадь шлейфа ширины z монотонной ветви \mathfrak{M} можно найти по формуле

$$\mathcal{F}_{\mathfrak{M}}(z) = \sum_{i=1}^n \mathcal{F}_{e_i}(z). \quad (16)$$

3.2 Преобразования формулы включений-исключений

Теорема 9. В цепи ветвей (не обязательно монотонных) $\mathfrak{B}_1, \dots, \mathfrak{B}_m$, полученных из скелета односвязной многоугольной фигуры, верно равенство

$$\bigcap_{i=1}^m G_i(z) = \begin{cases} \emptyset & \text{при } \exists k : \max_{s \in \mathfrak{B}_k} \rho(s) < z \\ G_1(z) \cap G_m(z) & \text{иначе.} \end{cases} \quad (17)$$

Доказательство. В работе [7] показано, что пересечение различных бициклов \mathfrak{b}_1 и

\mathbf{b}_2 , принадлежащих одной и той же многоугольной фигуре, обладает следующим свойством:

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_1 \cap \mathbf{b}_2 &\subseteq C_1^1 \cup C_1^2, \\ \mathbf{b}_1 \cap \mathbf{b}_2 &\subseteq C_2^1 \cup C_2^2.\end{aligned}\tag{18}$$

Таким образом, можно считать, что $\mathbf{b}_1 \cap \mathbf{b}_2 = (C_1^1 \cup C_1^2) \cap (C_2^1 \cup C_2^2)$. Покажем, что это свойство сохраняется и после подразделения рёбер скелета на монотонные рёбра.

Пусть \mathbf{b}_0 — немонотонное ребро, \mathbf{b}_1 и \mathbf{b}_2 — рёбра, полученные из \mathbf{b}_0 в результате подразделения. Обозначим

C_0 — общий концевой круг бициклов \mathbf{b}_1 и \mathbf{b}_2 (круг с центром в минимальной точке),

C_1 — общий концевой круг бициклов \mathbf{b}_0 и \mathbf{b}_1

C_2 — общий концевой круг бициклов \mathbf{b}_0 и \mathbf{b}_2 .

Для бициклов \mathbf{b}_1 и \mathbf{b}_2 свойство (18), очевидно, выполняется. Заметим, что

$$\mathbf{b}_i \cap (C_1 \cup C_2) \subseteq C_i \cup C_0, \quad i = 1, 2,$$

поэтому для любого бицикла \mathbf{b}_k , отличного от \mathbf{b}_0 , \mathbf{b}_1 и \mathbf{b}_2

$$\mathbf{b}_i \cap \mathbf{b}_k \subseteq C_i \cup C_0, \quad i = 1, 2.\tag{19}$$

Таким образом, свойство 18 справедливо и для бициклов монотонных рёбер.

Рассмотрим произвольную цепь рёбер скелета односвязной многоугольной фигуры. Упорядочим рёбра цепи по возрастанию их радиальной функции и обозначим их бициклы $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$, меньший концевой круг бицикла \mathbf{b}_1 обозначим C_0 , больший концевой круг бицикла \mathbf{b}_i — C_i . Покажем, что

$$\mathbf{b}_i \cap \mathbf{b}_j = C_i \cap C_{j-1}, \quad i < j.$$

Если это не так, то либо $(C_{i-1} \cup C_i) \cap (C_j \setminus C_{j-1}) \neq \emptyset$, либо $(C_j \cup C_{j-1}) \cap (C_{i-1} \setminus C_i) \neq \emptyset$. Не ограничивая общности, будем считать, что мы имеем дело с первой ситуацией, причём $C_{i-1} \cap (C_j \setminus C_{j-1}) \neq \emptyset$, иначе $C_i \cap (C_j \setminus C_{j-1}) \neq \emptyset$ и можно рассмотреть бициклы \mathbf{b}_{i+1} и \mathbf{b}_j . Из геометрических соображений ясно, что $C_{i-1} \cap (C_j \setminus C_{j-1}) \neq \emptyset$ возможно только в том случае, если часть границы полного силуэта цепи принадлежит внутреннему контуру фигуры. Следовательно, фигура не является односвязной, что противоречит условию теоремы.

Таким образом, справедливо свойство

$$C_i \cap C_j \subseteq \mathbf{b}_i \cap \mathbf{b}_j = C_i \cap C_{j-1}.$$

Тогда, если $i \leq k \leq j$,

$$C_i \cap C_j \subseteq C_k.$$

Переходя от кругов к бициклам, получаем, что пересечение бициклов наиболее отдалённых рёбер в цепи вложено в больший концевой круг любого промежуточного бицикла, откуда следует равенство

$$\bigcap_{i=1}^n \mathbf{b}_i = \mathbf{b}_1 \cap \mathbf{b}_n.$$

Наконец, можно перейти от бициклов к силуэтам. Силуэт ширины z i -го ребра цепи будем обозначать $G_i(z)$. Так как $G_i(z) \cap G_j(z) \subseteq \mathbf{b}_i \cap \mathbf{b}_j$,

$$G_i(z) \cap G_j(z) \subseteq C_k,$$

при любом z , если $i \leq k < j$.

Это означает, что пересечение силуэтов крайних рёбер в цепи также вложено в больший концевой круг любого из промежуточных бициклов. Силуэт ширины z либо содержит больший концевой круг бицикла, либо является пустым множеством, поэтому

$$\bigcap_{i=1}^n G_i(z) = G_1(z) \cap G_n(z),$$

если ни один из силуэтов не пропал полностью, иначе пересечение всех силуэтов группы пусто.

Для завершения доказательства достаточно рассмотреть вместо бициклов ветви скелета и заметить, что для их концевых кругов выполнены все доказанные выше свойства. ■

Следствие. Пересечение силуэтов подмножества рёбер цепи пусто, если среди силуэтов есть пустые множества, иначе совпадает с пересечением силуэтов пары наиболее удалённых рёбер из подмножества.

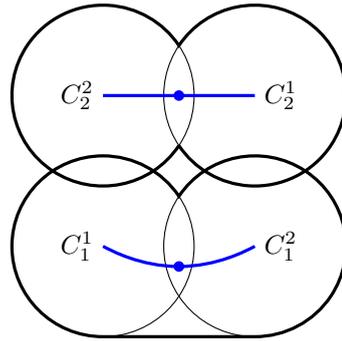


Рис. 18: Пересечение бициклов по двум парам концевых кругов

С бициклами в многосвязной многоугольной фигуре ситуация более сложная, так как скелет фигуры содержит циклы и понятие наиболее удалённых бициклов теряет смысл. Рассмотрим пару бициклов \mathbf{b}_1 и \mathbf{b}_2 рёбер из цикла и обозначим их концевые круги C_1^1 , C_1^2 и C_2^1 , C_2^2 таким образом, чтобы движение от центра круга C_i^1 к центру круга C_i^2 происходило по часовой стрелке. На рис. 18 показана ситуация, при которой:

$$\mathbf{b}_1 \cap \mathbf{b}_2 = (C_1^1 \cap C_2^2) \cup (C_1^2 \cap C_2^1).$$

Однако можно заметить, что это возможно лишь в том случае, если бициклы \mathbf{b}_1 и \mathbf{b}_2 — гиперболические или параболические и содержат свои минимальные точки. После подразделения рёбер скелета на монотонные проблема исчезает, и оказывается, что

$$\mathbf{b}_i \cap \mathbf{b}_j = \begin{cases} C_i^1 \cap C_j^2 \\ C_i^2 \cap C_j^1. \end{cases}$$

Это же утверждение справедливо и для монотонных ветвей.

Теорема 10. В группе монотонных ветвей $\mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{M}_r$, принадлежащих одному и тому же циклу скелета многосвязной многоугольной фигуры, найдутся такие ветви \mathfrak{M}_p и \mathfrak{M}_q , что

$$\bigcap_{i=1}^r G_i(z) = \begin{cases} \emptyset & \text{при } \exists k : \max_{s \in \mathfrak{M}_k} \rho(s) < z \\ G_p(z) \cap G_q(z) & \text{иначе.} \end{cases} \quad (20)$$

Доказательство.

Рассмотрим бициклы всех рёбер, образующих цикл. Пронумеруем бициклы в порядке их обхода по часовой стрелке $\mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_n$ и условимся считать, что $\mathfrak{b}_i \equiv \mathfrak{b}_{i+kn}, k \in \mathbb{Z}$. Выделим группу бициклов, дающих непустое пересечение, и обозначим их $\mathfrak{b}_{i_1}, \dots, \mathfrak{b}_{i_m}$ также в соответствии с порядком обхода по часовой стрелке.

Считая, что $i_{m+1} = i_1 + n$, рассмотрим пару бициклов $\mathfrak{b}_{i_j}, \mathfrak{b}_{i_{j+1}}$. Если $\mathfrak{b}_{i_j} \cap \mathfrak{b}_{i_{j+1}} = C_{i_j}^2 \cap C_{i_{j+1}}^1$, то это пересечение совпадает с пересечением всех бициклов, расположенных от \mathfrak{b}_{i_j} до $\mathfrak{b}_{i_{j+1}}$ по часовой стрелке:

$$\mathfrak{b}_{i_j} \cap \mathfrak{b}_{i_{j+1}} = \bigcap_{t=i_j}^{i_{j+1}} \mathfrak{b}_t,$$

иначе пересечение совпадает с пересечением всех бициклов, расположенных от \mathfrak{b}_{i_j} до $\mathfrak{b}_{i_{j+1}}$ против часовой стрелки:

$$\mathfrak{b}_{i_j} \cap \mathfrak{b}_{i_{j+1}} = \bigcap_{t=i_{j+1}}^{i_j+n} \mathfrak{b}_t.$$

Среди пар бициклов $\mathfrak{b}_{i_j}, \mathfrak{b}_{i_{j+1}}$ найдётся такая, для которой промежуточные бициклы берутся против часовой стрелки. Если такой пары нет,

$$\bigcap_{j=1}^m \mathfrak{b}_{i_j} = \bigcap_{t=1}^n \mathfrak{b}_t.$$

Но пересечение бициклов всех рёбер цикла пусто, а $\bigcap_{j=1}^m \mathfrak{b}_{i_j}$ мы условились считать непустым. Обозначим найденную пару $\mathfrak{b}_{i_k}, \mathfrak{b}_{i_{k+1}}$. Можно рассматривать группу бициклов $\mathfrak{b}_{i_1}, \dots, \mathfrak{b}_{i_m}$ как подмножество всех бициклов цепи, взятых от \mathfrak{b}_{i_k} до $\mathfrak{b}_{i_{k+1}}$ по пути против часовой стрелки, бициклы \mathfrak{b}_{i_k} и $\mathfrak{b}_{i_{k+1}}$ будут для этой цепи крайними. С учётом результатов предыдущей теоремы, получаем

$$\bigcap_{j=1}^m \mathfrak{b}_{i_j} = \mathfrak{b}_{i_k} \cap \mathfrak{b}_{i_{k+1}}.$$

$$\bigcap_{j=1}^m G_{i_j}(z) = G_{i_k}(z) \cap G_{i_{k+1}}(z),$$

если ни один из силуэтов не пропал полностью, иначе пересечение всех силуэтов группы пусто. Таким образом, пересечение силуэтов любого подмножества рёбер цикла сводится к пересечению лишь пары силуэтов.

Для завершения доказательства теоремы достаточно провести аналогичные рассуждения не для рёбер, а для монотонных ветвей. ■

Результаты последних теорем позволяют значительно сократить число слагаемых в основной формуле исследования (3).

Теорема 11. Рассматриваем набор множеств A_1, \dots, A_n и граф $G = \langle V, E \rangle$, в котором каждому ребру $e_i \in E$ соответствует множество A_i . Пусть граф обладает следующими свойствами:

1. Если $A_i \cap A_j \neq \emptyset$, рёбра e_i и e_j принадлежат одной и той же связной компоненте.
2. Для любой группы рёбер, принадлежащих одной и той же цепи, но не принадлежащих циклу, пересечение множеств, соответствующих рёбрам, равно пересечению пары множеств, соответствующих крайним рёбрам в группе.
3. Для любой группы рёбер, принадлежащих одному и тому же циклу, пересечение множеств, соответствующих рёбрам, равно пересечению одной из пар множеств, соответствующих рёбрам, следующим в цикле друг за другом.
4. Пересечение множеств, соответствующих всем рёбрам цикла, пусто.

Пусть для множеств введена A_1, \dots, A_n введена мера μ . Тогда

$$\mu \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i) + \sum_{J: |J| \geq 2, (\bigcap_{j \in J} e_j \neq \emptyset)} (-1)^{n-1} \mu \left(\bigcap_{j \in J} A_j \right). \quad (21)$$

Иначе говоря, достаточно учесть только пересечения множеств, соответствующих группам рёбер, имеющих общую вершину.

Доказательство. Рассмотрим произвольное подмножество рёбер графа $E' = \{e_{i_1}, \dots, e_{i_k}\}$. Множество E' назовём неприводимым, если не существует такого подмножества рёбер графа $E'' = \{e_{j_1}, \dots, e_{j_l}\}$, $E'' \subset E'$ (вложение строгое), что $\mu(\bigcap_i A_i) = \mu(\bigcap_j A_j)$. Неприводимое множество E^* назовём минимальным, если нет такого E'' , которое было бы приводимо к E^* .

Будем рассматривать только те подмножества рёбер, которым соответствуют множества A_i , имеющие непустое пересечение, поскольку только такие множества имеют значение для формулы включений-исключений.

Из условия теоремы получаем, что при любых A_i , удовлетворяющих условию теоремы, неприводимыми являются те множества, в которых никакие три ребра не лежат на одной цепи. Это очевидно, поскольку в противном случае из множества можно было бы удалить промежуточное ребро.

Минимальными заведомо являются множества, состоящие из одного элемента, а также те множества в которых рёбра имеют общую вершину. Пусть пара рёбер множества E' не имеет общей вершины. Тогда рёбра лежат на одной цепи, но не являются смежными, и между ними существует ребро, добавив которое, получим множество E'' , приводимое к E' .

Для каждого приводимого множества E'' существует единственное неприводимое множество E' , к которому приводится E'' . Достаточно удалить из E'' каждое ребро, которое лежит между парой других. Множество таких рёбер определяется однозначно, так как однозначно определяются крайние рёбра в любом цикле.

Проанализируем формулу включений-исключений для множеств A_i :

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_i \mu(A_i) - \sum_{i<j} \mu(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} \mu(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots + (-1)^{n-1} \mu(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n). \quad (22)$$

Заметим, что в этой формуле слагаемые, соответствующие приводимым множествам, можно заменить слагаемыми, соответствующими неприводимым. Определим коэффициенты при этих слагаемых. Для минимального множества E^* коэффициент равен $-1^{|E^*|}$, поскольку никакие другие множества к нему не приводятся. Для неприводимого, но не минимального множества E' коэффициент равен 0. Докажем это.

Множество E^+ всех рёбер, которые не принадлежат E' и которые можно добавить к E' и получить приводимое к нему множество, непусто. Кроме того, добавив к E' любое подмножество E^+ , мы также получим приводимое к E' множество. Пусть $|E^+| = k$, тогда все подмножества E^+ можно закодировать булевым вектором длины k , где 1 в i -й позиции означает, что мы добавляем к E' i -е ребро. Всего таких множеств 2^k . Заметим, что знак, с которым слагаемое войдёт в формулу (22), зависит от чётности вектора. Так как число чётных и число нечётных наборов в булевом кубе размерности $n \geq 1$ совпадает, после приведения подобных получим коэффициент при слагаемом, равный нулю.

Таким образом, в формуле остаются только слагаемые, соответствующие минимальным подмножествам — группам рёбер, имеющих общую вершину. В сокращённую формулу слагаемые входят с теми же коэффициентами, что и в исходную. ■

3.3 Крайние точки и пересечения силуэтов

Если теорему 11 применить к силуэтам монотонных ветвей, окажется, что для расчёта площади силуэта всей фигуры нам достаточно знать только площади пересечений силуэтов ветвей, имеющих общую инцидентную вершину. Напомним, что граф монотонных ветвей является ориентированным, а все его нетерминальные вершины можно разделить на три типа:

- 1) Имеющие две исходящие ветви,
- 2) Имеющие три входящие ветви,
- 3) Имеющие две входящие ветви и одну исходящую.

Рассмотрим пересечения силуэтов инцидентных ветвей для каждого типа вершин.

Определение 21. *Крайней точкой ширины z ребра e будем называть точку ребра с минимальным значением радиальной функции, не превышающим z :*

$$E_e(z) = \operatorname{Arg} \min_{C \in e: \rho(C) \geq z} \rho(C). \quad (23)$$

Снова будем рассматривать бициклы, используя обозначения: AB — ось бицикла, A, B — центры меньшего и большего концевых кругов, r, R — их радиусы.

Отметим, что крайняя точка ребра определена только для значений $z \leq R$, поскольку в противном случае минимум берётся по пустому множеству. В случае $z \leq r$ крайней точкой, очевидно, является точка A (для линейного бицикла с одинаковыми радиусами концевых кругов мы также будем считать крайней именно эту точку). Интереснее

рассмотреть случай $r < z \leq R$. В этом случае на оси бицикла найдётся точка E , радиальная функция в которой равна z , эта точка является крайней. Определим координаты этой точки.

Лемма 6. Крайняя точка ширины z ($r < z \leq R$) линейного ребра имеет координаты

$$(x_A + \alpha(x_B - x_A), y_A + \alpha(y_B - x_A)),$$

где $\alpha = \frac{z-r}{R-r}$.

Доказательство. Радиальная функция изменяется линейно при движении по оси бицикла, поэтому

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AE} &= \alpha \overrightarrow{AB}, \\ \alpha &= \frac{z-r}{R-r}. \end{aligned}$$

Откладывая вектор \overrightarrow{AE} от точки A , получаем

$$(x_E, y_E) = (x_A + \alpha(x_B - x_A), y_A + \alpha(y_B - x_A)).$$

Для вычисления координат крайней точки параболического бицикла нам будет удобно ввести местную систему координат бицикла. Обозначим C — сайт-точку, G, H — концы сайта-сегмента, F — вершину параболы. Началом координат будет точка F . Определим единичные векторы осей OX' и OY' .

Единичный вектор оси ординат проведём в направлении от проекции сайта-точки на сайт-сегмент C_1 (её координаты известны из формулы (7)) к сайту-точке C :

$$\overrightarrow{OY'} = \frac{\overrightarrow{C_1C}}{|\overrightarrow{C_1C}|}.$$

Тогда единичный вектор оси абсцисс должен быть параллелен директрисе параболы, на которой лежит отрезок GH , поэтому его можно представить в следующем виде:

$$\overrightarrow{OX'} = \alpha \frac{\overrightarrow{GH}}{|\overrightarrow{GH}|},$$

где $\alpha = +1$ или -1 .

Единичный вектор оси абсцисс удобно задать таким образом, чтобы концы ребра имели неотрицательные абсциссы. В этом случае абсцисса возрастает при движении от центра меньшего концевоего круга к центру большего, и

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{OX'}, \overrightarrow{AB}) &> 0 \\ \left(\alpha \frac{\overrightarrow{GH}}{|\overrightarrow{GH}|}, \overrightarrow{AB} \right) &> 0 \\ \alpha &= \operatorname{sgn}(\overrightarrow{GH}, \overrightarrow{AB}) > 0. \end{aligned}$$

В итоге получаем

$$\overrightarrow{OX'} = \alpha \frac{\overrightarrow{GH}}{|\overrightarrow{GH}|} = \operatorname{sgn}(\overrightarrow{GH}, \overrightarrow{AB}) \frac{\overrightarrow{GH}}{|\overrightarrow{GH}|}.$$

Пример задания системы координат для параболического бицикла приведён на рис. 19.

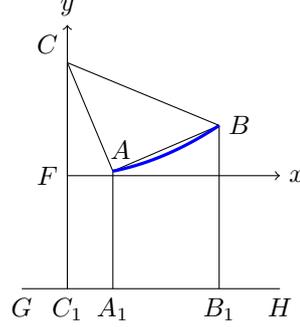


Рис. 19: Местная система координат параболического бицикла

Лемма 7. Крайняя точка ширины z ($r < z \leq R$) параболического ребра имеет координаты:

$$\begin{aligned} x_E &= x_F + \sqrt{2p(z-r)}x_{OX'} + (z-r)x_{OY'}, \\ y_E &= y_F + \sqrt{2p(z-r)}y_{OX'} + (z-r)y_{OY'}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OY'} &= \frac{\overrightarrow{C_1C}}{|\overrightarrow{C_1C}|}, \\ \overrightarrow{OX'} &= \alpha \frac{\overrightarrow{GH}}{|\overrightarrow{GH}|} = \operatorname{sgn}(\overrightarrow{GH}, \overrightarrow{AB}) \frac{\overrightarrow{GH}}{|\overrightarrow{GH}|}. \end{aligned}$$

Доказательство. Будем использовать местную систему координат бицикла, рассмотренную ранее. В этой системе координат абсцисса и ордината связаны с радиальной функцией следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} y' &= z - r, \\ x'^2 &= 2py'. \end{aligned}$$

Поэтому абсцисса точки с радиальной функцией r вычисляется по формуле

$$x' = \sqrt{2p(z-r)}.$$

Откладывая от точки F вектор $x'\overrightarrow{OX'} + y'\overrightarrow{OY'}$, получаем:

$$\begin{aligned}x_E &= x_F + \sqrt{2p(z-r)}x_{OX'} + (z-r)x_{OY'} \\y_E &= y_F + \sqrt{2p(z-r)}y_{OX'} + (z-r)y_{OY'}.\end{aligned}$$

■

В гиперболическом бицикле достаточно задать только ось OX' . Началом координат будет центр бицикла F (лемма 4), единичный вектор оси проведём в направлении от точки A к точке B :

$$\overrightarrow{OX'} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}.$$

Лемма 8. Крайняя точка ширины z ($r < z \leq R$) гиперболического ребра имеет координаты

$$(x_F + \sqrt{z^2 - \left(\frac{q}{2}\right)^2} x_{OX'}, y_F + \sqrt{z^2 - \left(\frac{q}{2}\right)^2} y_{OX'}),$$

где $\overrightarrow{OX'} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$.

Доказательство. В местной системе координат бицикла ордината всех точек оси равна нулю, а с абсциссой радиальная функция связана следующим уравнением:

$$\rho = \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + x'^2}.$$

Поэтому абсцисса точки с радиальной функцией z вычисляется по формуле

$$x' = \sqrt{z^2 - \left(\frac{q}{2}\right)^2}.$$

Откладывая от точки F вектор $x'\overrightarrow{OX'}$, получаем:

$$\begin{aligned}x_E &= x_F + \sqrt{z^2 - \left(\frac{q}{2}\right)^2} x_{OX'} \\y_E &= y_F + \sqrt{z^2 - \left(\frac{q}{2}\right)^2} y_{OX'}.\end{aligned}$$

■

Определение 22. Крайней точкой монотонной ветви \mathfrak{M} , соответствующей радиусу z , мы будем называть точку ветви с минимальным значением радиальной функции, не превышающим z :

$$E_{\mathfrak{M}}(z) = \underset{C \in \mathfrak{M}; \rho(C) \geq z}{\text{Arg min}} \rho(C).$$

Крайняя точка монотонной ветви определена только для значений $z \leq R$, где R — радиус большего концевой круга ветви. Если крайняя точка ширины z не определена, силуэт ширины z является пустым множеством. В том случае, если известен список бициклов монотонной ветви, и бициклы в этом списке расположены по возрастанию их радиальной функции, определение крайней точки ширины z монотонной ветви становится

элементарным. Нужно лишь найти в списке первый бицикл, для которого $\rho(B) \leq z$ и определить крайнюю точку этого бицикла.

Пересечением смежных монотонных ветвей, имеющих общий меньший концевой круг, является этот самый круг. Пересечением силуэтов ширины z таких ветвей является пересечение меньших концевых кругов силуэта — кругов с центрами в крайних точках.

Теорема 12. Пусть монотонные ветви \mathfrak{M}_1 и \mathfrak{M}_2 имеют общее начало. Тогда площадь пересечения их силуэтов ширины z равна

$$\mathcal{P}_{\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2}(z) = \begin{cases} 0, & \text{если } z > R_1 \text{ или } z > R_2 \\ 0, & \text{если } l \leq 2z \\ 2 \arcsin\left(\frac{h}{2q}\right) q^2 - \frac{lh}{2}, \quad h = 2\sqrt{q^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2}, & \text{если } r > R_1, \end{cases} \quad (24)$$

где R_1 и R_2 — радиусы вписанных кругов с центрами в концах ветвей, r — радиус круга с центром в их общем начале, $q = \max(z, r)$, l — расстояние между крайними точками ветвей в том случае, если эти точки существуют.

Доказательство. Если $z > R_1$ или $z > R_2$, одна из силуэтов является пустым множеством, поэтому пересечение силуэтов также пусто. Если силуэты непусты, их пересечением является пересечение их крайних кругов (кругов с центрами в крайних точках). При $l \leq 2z$, концевые круги пересекаются не более чем в одной точке, иначе пересечение является линзой — фигурой, ограниченной двумя дугами окружностей. Радиусы этих окружностей равны $q = \max(z, r)$, поскольку радиус концевого круга силуэта меняется только при $z > r$. Площадь линзы складывается из площадей двух круговых сегментов, заключённых между хордой, равной

$$h = 2\sqrt{q^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2}$$

и дугой величины

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{h}{2q}\right).$$

В итоге площадь линзы равна

$$S = 2 \left(\alpha q^2 - \frac{l h}{2} \right) = 2 \arcsin\left(\frac{h}{2q}\right) q^2 - \frac{lh}{2}. \quad \blacksquare$$

Пересечением силуэтов ширины z любого подмножества рёбер, имеющих общую инцидентную вершину степени $k \geq 3$, является силуэт ширины z этой вершины.

При этом силуэт вершины войдёт в формулу, аналогичную (22), с коэффициентом, равным

$$\sum_{i=2}^k (-1)^{i-1} C_k^i = C_k^0 - C_k^1 = 1 - k.$$

Будем рассматривать не силуэты монотонных ветвей, а их шлейфы. Вершина, имеющая одну исходящую ветвь, будет концом для $k - 1$ ветви. Поэтому площадь силуэта вершины мы вычтем необходимое число раз — $k - 1$.

Если же вершина не имеет исходящих ветвей, мы вычтем площадь силуэта вершины лишний раз, поэтому нужно добавить в формулу слагаемое для этой площади.

Подведём итоги. Для вычисления площади силуэта ширины z многоугольной фигуры нам понадобятся слагаемые трёх видов:

1. Площади шлейфов монотонных ветвей.
2. Площади пересечений силуэтов пар ветвей, имеющих общее начало.
3. Площади силуэтов вершин без исходящих ветвей.

Пусть

$\mathfrak{G} = \langle \mathfrak{V}, \mathfrak{E} \rangle$ — граф монотонных ветвей многоугольной фигуры,

$\mathfrak{E} = \{\mathfrak{M}_i\}$ — монотонные ветви,

\mathfrak{V}^* — множество вершин графа, не имеющих исходящих ветвей,

I — множество пар индексов ветвей, имеющих общее начало.

Тогда площадь силуэта ширины z фигуры вычисляется по формуле:

$$\mathcal{S}(z) = \sum_i \mathcal{F}_{\mathfrak{M}_i}(z) - \sum_{\{i,j\} \in I} \mathcal{P}_{\mathfrak{M}_i, \mathfrak{M}_j}(z) + \sum_{v \in \mathfrak{V}^*} \mathcal{S}_v(z). \quad (25)$$

3.4 Преобразования графа монотонных ветвей

До сих пор мы не принимали во внимание то, что пересечение силуэтов в цепи или цикле может быть пустым. Из-за этого может возникнуть ситуация, когда для монотонных ветвей \mathfrak{M}_1 , \mathfrak{M}_3 и заключённой между ними ветви \mathfrak{M}_2 при некотором z выполнены равенства

$$G_{\mathfrak{M}_1}(z) \cap G_{\mathfrak{M}_2}(z) \cap G_{\mathfrak{M}_3}(z) = \emptyset,$$

но

$$G_{\mathfrak{M}_1}(z) \cap G_{\mathfrak{M}_3}(z) \neq \emptyset.$$

В результате перестает выполняться условие 2 или 3 теоремы 11. Для решения проблемы требуется преобразование графа монотонных ветвей, например, стягивание ребра \mathfrak{M}_2 .

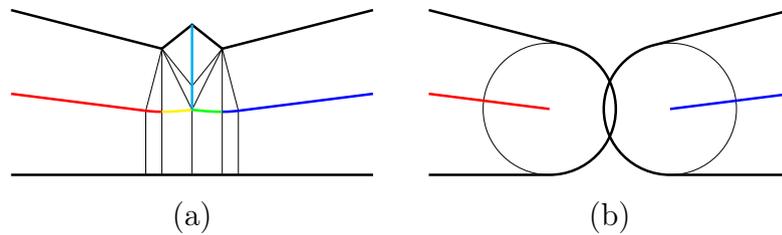


Рис. 20: Появление пересечений ветвей, несмежных в исходном графе. Исходный граф монотонных ветвей (a) и новые пересекающиеся силуэты (b).

Ситуацию иллюстрирует рисунок 20: после того как силуэты промежуточных ветвей стали пустыми, возникло новое пересечение пары силуэтов, не вложенное ни в какое другое. Может ли возникнуть новое пересечение тройки силуэтов? Ответ на этот вопрос даёт следующая теорема.

Теорема 13. После исчезновения силуэтов монотонных ветвей не может возникнуть новых тройных пересечений силуэтов.

Доказательство. Рассмотрим монотонную ветвь \mathfrak{M} . Обозначим её конечную точку O и радиальную функцию в ней R . Точка O является вершиной скелета степени 3 и касается границы в трёх точках — A , B и D . Из каждой такой точки выходит пара отрезков, принадлежащих границе многоугольной фигуры (отрезки могут лежать на одном и том же сайте-сегменте). Обозначим эти отрезки AA_B , AA_D , BB_A , BB_D , DD_A , и DD_B . Они образуют три коридора, через каждый из которых проходит ветвь скелета.

Так как силуэт ветви \mathfrak{M} стал пустым множеством, мы рассматриваем силуэты ширины z , где $z > R$. Новое тройное пересечение силуэтов может получиться только из пересечения кругов с центрами в крайних точках ширины z трёх ветвей — по одной в каждом из коридоров. Обозначим крайние точки ширины z этих ветвей A^z , B^z и D^z , вписанный круг с центром в точке P будем обозначать $C(P)$.

Определим оптимальное с точки зрения пересечения вписанных кругов положение крайних точек радиуса R . Возможны две ситуации.

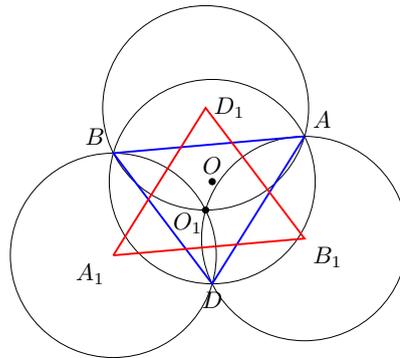


Рис. 21: Ближайшие возможные круги радиуса r для точки, не имеющей исходящих ветвей

1) Радиальная функция убывает по всем ветвям (рис. 21). В этом случае все углы в треугольнике ABD меньше $\frac{\pi}{2}$. Рассмотрим коридор, образованный отрезками AA_D и BB_D . A и B не могут быть внутренними точками круга $C(D^R)$, поэтому $AD^R \leq R$ и $BD^R \leq R$. Очевидно, пересечение кругов $C(O)$ и $C(D^R)$ является максимальным по включению, когда $AD^R = R$, $BD^R = R$ и D^R не совпадает с O .

Обозначим оптимальное положение точки D^R как D_1 . Можно сказать, что в этом случае точка D_1 является отражением точки O относительно отрезка AB . Проведя такие же рассуждения для двух других ветвей, получим оптимальное положение точек A_1 и B_1 . Обозначим середины отрезков AB , BD и DA за D_0 , A_0 и B_0 соответственно. Из подобия треугольников ABD и B_0A_0D получаем

$$A_0B_0 = \frac{1}{2}AB,$$

а из подобия треугольников OA_0B_0 и OA_1B_1 имеем

$$A_1B_1 = 2 \cdot A_0B_0 = AB.$$

После таких же рассуждений для двух других сторон треугольника $A_1B_1D_1$ получим, что он равен треугольнику ABD . Так как все углы треугольника меньше $\frac{\pi}{2}$, а

радиус его описанной окружности равен R , круги радиуса R с центрами в вершинах треугольника пересекаются в единственной точке O_1 . С учётом того, что

$$C(A^z) \cap C(B^z) \cap C(D^z) \subset C(A^R) \cap C(B^R) \cap C(D^R) \subset C(A_1) \cap C(B_1) \cap C(D_1),$$

получаем

$$C(A^z) \cap C(B^z) \cap C(D^z) = \emptyset.$$

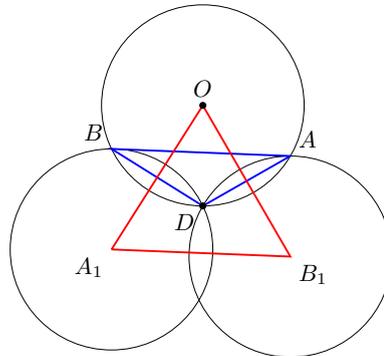


Рис. 22: Ближайшие возможные круги радиуса r для точки, имеющей исходящую ветвь

2) Существует ветвь, по которой радиальная функция не убывает (рис. 22). Тогда в треугольнике ABD один из углов не меньше $\frac{\pi}{2}$. Не ограничивая общности, будем считать, что это угол BDA . Тогда крайняя точка радиуса z ветви, проходящей через коридор между отрезками AA_D и BB_D может быть расположена сколь угодно близко к точке O , поэтому можно считать, что в данном случае точка D_1 совпадает с точкой O . Оптимальные положения двух других ветвей, как и в прошлый раз получим отражением точки O относительно сторон треугольника ABD . Рассмотрим треугольник A_1B_1O . Снова обозначим середины отрезков AB , BD и DA за D_0 , A_0 и B_0 , а точки пересечения отрезков OB_1 и OA_1 с отрезком AB обозначим B_2 и A_2 . Отрезки AO и B_1D симметричны относительно точки B_0 , следовательно, равны и параллельны. Отрезки BO и A_1D симметричны относительно точки A_0 и также равны и параллельны. Поэтому равны треугольники AOB и B_1DA_1 . Таким образом, в треугольнике A_1B_1O расстояния всех вершин до точки D равны R . Рассмотрим углы в треугольниках ABD и A_1B_1O . Введём обозначения:

$$\begin{aligned} \angle BAD &= \alpha, \\ \angle DBA &= \beta, \\ \angle ADB &= \gamma \geq \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\angle BOA &= 2(\pi - \angle ADB) = 2(\pi - \gamma), \\
\angle A_1OB_1 &= \frac{1}{2}\angle BOA = \pi - \gamma \leq \frac{\pi}{2}, \\
\angle OB_1A_1 &= \angle B_0B_2A = \pi - \angle AB_0B_2 - \angle B_2AB_0 = \pi - \frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{\pi}{2} - \alpha < \frac{\pi}{2}, \\
\angle B_1A_1O &= \angle BA_2A_0 = \pi - \angle A_2A_0B - \angle A_0BA_2 = \pi - \frac{\pi}{2} - \beta = \frac{\pi}{2} - \beta < \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Таким образом, все углы в треугольнике A_1B_1O не превосходят $\frac{\pi}{2}$, а радиус описанной окружности равен R . Поэтому круги радиуса R с центрами в вершинах треугольника пересекаются в единственной точке D . С учётом того, что

$$C(A^z) \cap C(B^z) \cap C(D^z) \subset C(A^R) \cap C(B^R) \cap C(D^R) \subset C(A_1) \cap C(B_1) \cap C(O),$$

вновь получаем

$$C(A^z) \cap C(B^z) \cap C(D^z) = \emptyset.$$

■

Теорема 13 позволяет сделать вывод о том, что по мере исчезновения силуэтов общий вид формулы (25) остаётся прежним. Нам осталось понять, каким образом нужно производить преобразование графа монотонных рёбер. Сигналом к началу преобразования можно считать подачу на вход такого аргумента z , который впервые превышает радиус вписанного круга с центром в одной из вершин v . Тогда граф монотонных ветвей нужно перестроить в окрестности этой вершины.

Очевидно, что из графа нужно исключить все ветви, для которых v является концом. При этом стягивание имеет смысл производить только в том случае, когда круг $C(u)$ ветви $\{u, v\}$ пересекается с $C(v)$, так как если после исчезновения ветвей возникает новое непустое пересечение силуэтов, минимальное по включению, оно должно быть вложено в круг $C(v)$ согласно теоремам 9–10. В результате стягивания вершину u можно отождествить с вершиной v . Преобразование следует продолжать до тех пор, пока у вершины v не останется входящих ветвей. Таким образом, преобразование графа в окрестности каждой вершины производится единственный раз в ходе работы алгоритма.

Подробное описание алгоритма вычисления площади открытия многоугольной фигуры в зависимости от радиуса примитива z приведено в приложении Б.

4 Оценки вычислительной сложности и эксперименты

4.1 Оценки вычислительной сложности

Обозначим n число рёбер в многоугольной фигуре. Оценим сложность этапов алгоритма 1:

1. Построение скелета многоугольной фигуры — $O(n \log n)$.

2. Предобработка рёбер — $O(n)$, так как для обработки любого ребра необходимо константное число операций, и рёбра обрабатываются независимо. После подразделения рёбер на монотонные их число остаётся равным $O(n)$.
3. Выделение монотонных ветвей — $O(n)$, так как каждое ребро просматривается один раз.

Таким образом, первая часть решения нашей задачи выполняется за $O(n \log n)$ операций, причём эта сложность обусловлена необходимостью построения скелета фигуры.

Будем считать, что на вход алгоритму 1 подаётся результат работы алгоритма 2. Для этапов алгоритма 2 получаем следующую оценку сложности:

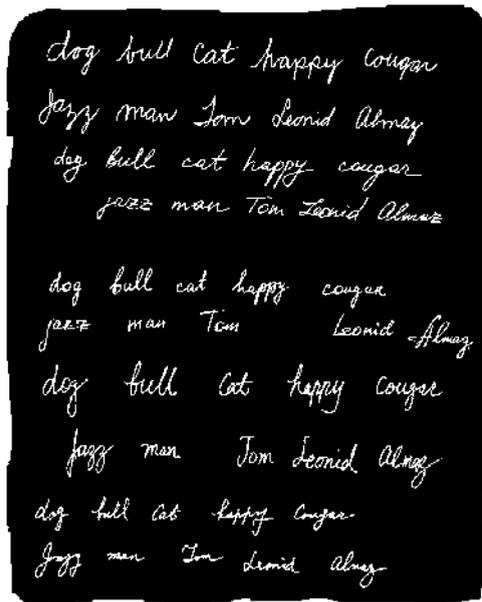
1. Вычисление площади открытия для заданного радиуса — $O(n)$, так как число слагаемых в формуле (25) составляет $O(n)$. Действительно, число слагаемых, соответствующих рёбрам, равно $O(n)$. Число слагаемых, соответствующих вершинам, также равно $O(n)$, согласно формуле Эйлера. Наконец, число слагаемых, соответствующих попарным пересечениям равно $O(n)$, поскольку изначально каждая ветвь участвует не более чем в одном таком пересечении, а после преобразования графа может участвовать не более чем в двух.
2. Преобразование графа монотонных ветвей — $O(n)$ в течение всей работы алгоритма. Преобразование в окрестности каждой вершины производится единственный раз, причём число соседей вершины может увеличиться только после преобразования. Таким образом, при преобразовании для каждой вершины рассматривается не более трёх соседей.

Естественно потребовать от алгоритма возможности вычислять морфологический спектр с любой желаемой точностью. Поэтому можно считать, что на вход алгоритму может быть подана любая последовательность упорядоченных значений аргумента, совсем не обязательно совпадающая с радиусами концевых кругов бициклов. Пусть число значений аргумента равно m . Тогда алгоритм сделает на каждой из m итераций $O(n)$ операций, а общая сложность алгоритма 2 составит $O(mn)$.

4.2 Эксперименты

Алгоритм реализован на языке C++ в среде Visual Studio на базе алгоритма построения непрерывного скелета бинарного изображения, подробное описание которого можно найти в книге [6]. Общая структура алгоритма включает в себя следующие этапы:

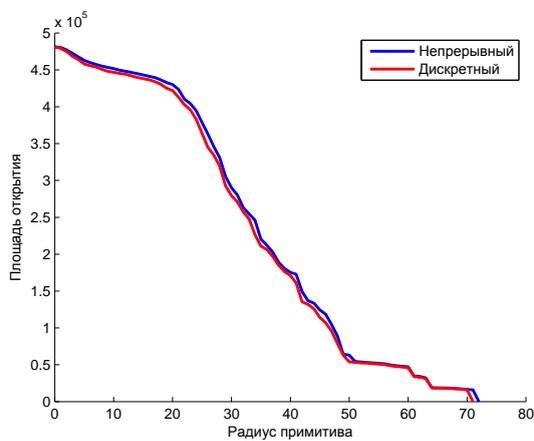
- построение аппроксимирующей многоугольной фигуры для бинарного растрового изображения;
- построение внутренней части диаграммы Вороного для множества линейных сегментов, составляющих границу аппроксимирующей многоугольной фигуры;
- преобразование скелета в граф монотонных ветвей согласно алгоритму 1;
- вычисление площади открытия полученной многоугольной фигуры для различных радиусов примитива с помощью алгоритма 2.



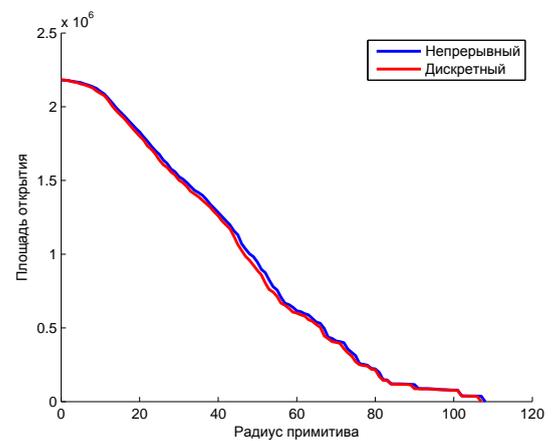
(a)



(b)



(c)



(d)

Рис. 23: Результаты непрерывного и дискретного подходов к вычислению площади открытия. Графики в нижнем ряду соответствуют изображениям в верхнем.

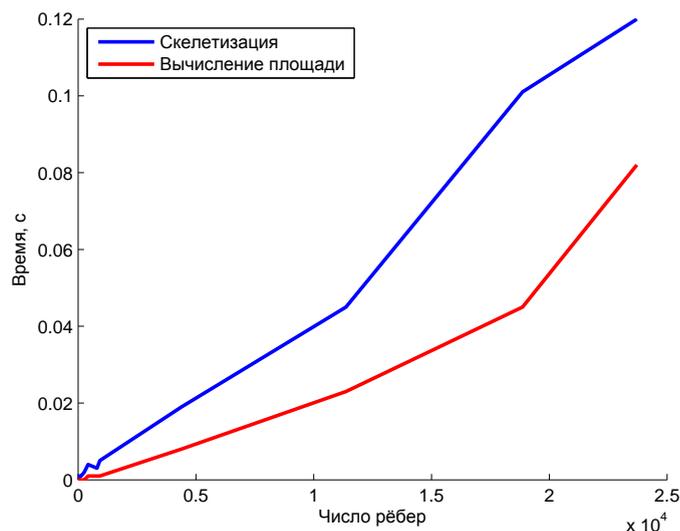


Рис. 24: Время, затраченное на скелетизацию и вычисление площади открытия

Эксперименты проводились на вычислительной машине с процессором Intel® Core™ i5-750 CPU @ 2.66GHz.

На рис. 23 показаны результаты работы алгоритма для сложных бинарных изображений, которые приближаются набором многоугольных фигур, скелеты которых содержат в общей сложности несколько тысяч рёбер. Непрерывный алгоритм вычисления площади открытия сравнивался с растровым алгоритмом, реализованным в среде MATLAB. Из-за особенностей растрового алгоритма площади были вычислены для целых значений радиуса примитива. Непрерывный и дискретный подходы к вычислению спектра дают очень близкие результаты, наблюдаемая разница между графиками достаточно мала, чтобы её можно было объяснить погрешностью аппроксимации бинарного изображения и растеризации примитивов.

На рис. 24 отражена зависимость времени, затраченного на аппроксимацию бинарного изображения многоугольными фигурами с их последующей скелетизацией и времени вычисления морфологического спектра от числа рёбер в скелете. Эксперимент проведён для набора бинарных изображений разной сложности. Можно заметить, что временные затраты на вычисление спектра сопоставимы с затратами на скелетизацию в том случае, если площади открытия вычисляются с достаточно большим шагом (в нашем случае шаг равен 1).

Непрерывный метод работает на порядки быстрее дискретного, поэтому в графиках, иллюстрирующих сравнение методов по времени, нет необходимости. Справедливости ради, стоит отметить, что рассмотренная реализация дискретного метода является далеко не самой эффективной.

5 Заключение

Предложенный метод открывает новые возможности по применению высокоэффективных алгоритмов вычислительной геометрии в анализе и распознавании растровых дискретных изображений. Известные подходы к вычислению дескрипторов для ширины фигур на основе морфологического спектра имеют высокую вычислительную сложность, поскольку используют многократную растеризацию графических примитивов. Переход к непрерывной модели на основе многоугольных фигур до сих пор не позволял провести декомпозицию исходной задачи на независимые подзадачи.

Разработанный алгоритм является первым, позволяющим получить точное аналитическое представление морфологического спектра многоугольной фигуры. Таким образом, погрешность в вычислении спектра возникает только на этапе аппроксимации фигуры. Высокая эффективность предлагаемого метода позволяет сравнивать и измерять сходство фигур по их ширине в системах реального времени.

Приложение А. Алгоритм построения графа монотонных ветвей

Algorithm 1 Алгоритм построения графа монотонных ветвей (часть 1)

Require: На вход алгоритму подаётся медиальное представление многоугольной фигуры, имеющее формат взвешенного графа:

$S = \langle V, E \rangle$ — скелет фигуры,

V — множество вершин графа,

$v = (x_v, y_v, r_v)$ — вершина графа,

x_v, y_v — координаты вершины,

r_v — значение радиальной функции в вершине,

E — множество ребер графа,

$e = (u_e, v_e, r_e, R_e, l_e, k_e)$ — ребро графа,

u_e, v_e — вершины, инцидентные ребру,

r_e — радиус меньшего круга ребра,

R_e — радиус большего круга ребра,

l_e — расстояние между центрами кругов ребра,

k_e — тип ребра (*lin* — линейное, *par* — параболическое, *hyp* — гиперболическое).

Кроме того, будем считать, что для элементов графа определены следующие операции:

1) $NextNode(v, e)$ — переход к вершине, смежной с v по ребру e . Предполагается, что вершина v инцидентна ребру e .

2) $NextBone(e, v)$ — переход к ребру, имеющему с e общую инцидентную вершину v . Предполагается, что вершина v имеет ровно два инцидентных ребра, одно из которых e .

3) $deg(v)$ — степень вершины v .

4) E_v — множество рёбер, инцидентных вершине v .

Координаты образующих сайтов каждого ребра также считаются известными.

Ensure: На выходе алгоритма получаем граф монотонных ветвей $\mathfrak{G} = \langle \mathfrak{V}, \mathfrak{E} \rangle$,

\mathfrak{V} — список вершин графа,

\mathfrak{E} — список дуг графа,

$\mathfrak{B} = (u_{\mathfrak{B}}, v_{\mathfrak{B}}, \mathfrak{L}_{\mathfrak{B}})$ — дуга графа (монотонная ветвь),

$u_{\mathfrak{B}}$ — начальная вершина дуги (вершина с меньшим значением радиальной функции),

$v_{\mathfrak{B}}$ — конечная вершина дуги (вершина с большим значением радиальной функции),

$\mathfrak{L}_{\mathfrak{B}}$ — список монотонных рёбер, составляющих ветвь, расположенных в порядке возрастания радиальной функции.

Так как список рёбер монотонной ветви является упорядоченным, нам потребуются операции добавления ребра в начало и в конец списка. Добавление элемента e в начало списка \mathfrak{L} будем условно обозначать как $\mathfrak{L} := e \cup \mathfrak{L}$, а добавление элемента в конец — как $\mathfrak{L} := \mathfrak{L} \cup e$.

Algorithm 1 Алгоритм построения графа монотонных ветвей (часть 2)

```
1: function Vertex(e)
2:     ▷ Вычисление координат минимальной точки параболического бицикла
3:     (x1, y1) := e.p                                     ▷ Координаты сайта-точки
4:     (x2, y2) := e.l.p1
5:     (x3, y3) := e.l.p2                               ▷ Координаты концов сайта-сегмента
6:      $\alpha := \frac{(x_3-x_2)(x_1-x_2)+(y_3-y_2)(y_1-y_2)}{(x_3-x_2)(x_3-x_2)+(y_3-y_2)(y_3-y_2)}$ 
7:     return  $\left( \frac{x_1+x_2+\alpha(x_3-x_2)}{2}, \frac{y_1+y_2+\alpha(y_3-y_2)}{2} \right)$ 
8: end function
9: function Centre(e)
10:    ▷ Вычисление координат минимальной точки гиперболического бицикла
11:    (x1, y1) := e.p1
12:    (x2, y2) := e.p2                                 ▷ Координаты сайтов-точек
13:    return  $\left( \frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2} \right)$ 
14: end function
15: function ComeRound(v)
16:    ▷ Процедура обхода графа с выделением монотонных ветвей
17:    add := true                                         ▷ Нужно ли добавлять вершину в список вершин графа
    МОНОТОННЫХ ВЕТВЕЙ
18:    for all e ∈ Ev do
19:        if se = false then                         ▷ Ребро ещё не было рассмотрено
20:            if v = ue then
21:                ▷ v — центр меньшего круга, значит, радиальная функция возрастает
22:                trend := up
23:                 $\mathfrak{B} := (v, NA, \emptyset)$            ▷ NA — неопределённое значение
24:            else
25:                trend := down
26:                 $\mathfrak{B} := (NA, v, \emptyset)$ 
27:            end if
28:            stop := false
29:            while stop = false do
30:                if trend = up then
31:                     $\mathcal{L}_{\mathfrak{B}} := \mathcal{L}_{\mathfrak{B}} \cup e$ 
32:                else
33:                     $\mathcal{L}_{\mathfrak{B}} := e \cup \mathcal{L}_{\mathfrak{B}}$ 
34:                end if
35:                se := true
36:                v := NextNode(v, e)
37:                if Deg(v) <> 2 then
38:                    if trend = up then
39:                        v $\mathfrak{B}$  := v
40:                    else
41:                        u $\mathfrak{B}$  := v
42:                    end if
43:                stop := true
```

Algorithm 1 Алгоритм построения графа монотонных ветвей (часть 3)

```
44:         else
45:              $e := NextBone(v, e)$ 
46:             if  $trend = down$  and  $v = u_e$  or  $trend = up$  and  $v = v_e$  or  $s_e = true$ 
then
47:                  $\triangleright$  Ориентация ребра не совпадает с ориентацией ветви, поэтому
ветвь нельзя продолжить
48:                 if  $trend = down$  then
49:                      $\triangleright$  Найдена точка минимума
50:                      $u_{\mathfrak{B}} := v$ 
51:                      $\mathfrak{E} := \mathfrak{E} \cup \mathfrak{B}$ 
52:                     if  $s_e = false$  then
53:                          $\mathfrak{B} := (v, NA, \emptyset)$ 
54:                          $\mathfrak{V} := \mathfrak{V} \cup v$ 
55:                     end if
56:                 else
57:                      $\triangleright$  Найдена точка максимума
58:                      $v_{\mathfrak{B}} := v$ 
59:                      $\mathfrak{E} := \mathfrak{E} \cup \mathfrak{B}$ 
60:                     if  $s_e = false$  then
61:                          $\mathfrak{B} := (NA, v, \emptyset)$ 
62:                          $\mathfrak{V} := \mathfrak{V} \cup v$ 
63:                     end if
64:                 end if
65:             end if
66:              $stop = s_e$ 
67:         end if
68:     end while
69:     if  $Deg(v) > 2$  then
70:          $ComeRound(v)$ 
71:     end if
72: else
73:      $add := false$ 
74: end if
75: end for
76: if  $add = true$  then
77:      $\mathfrak{V} := \mathfrak{V} \cup v$ 
78: end if
79: end function
80: for all  $e \in E$  do
81:      $s_e := false$ 
82:     if  $k_e = lin$  then
83:          $t_e := \sqrt{l_e^2 - (R_e - r_e)^2}$ 
84:     end if
85: end for
86:  $\triangleright$  Предобработка, подготовка параметров для всех бициклов
87:  $\triangleright$  Ребро пока не отнесено к монотонной ветви
```

Algorithm 1 Алгоритм построения графа монотонных ветвей (часть 4)

```
84:   else if  $k_e = par$  then
85:      $t_e := \sqrt{l_e^2 - (R_e - r_e)^2}$ 
86:      $p_e := \frac{t_e^2}{2l_e^2}(R_e + r_e + \sqrt{(R_e + r_e)^2 - l_e^2})$     ▷ Параметр параболического бицикла
87:      $c_e := Vertex(e)$                                           ▷ Координаты вершины параболы
88:      $TopPos := (t_e > \sqrt{r_e \cdot (R_e - r_e)})$                 ▷ Является ли вершина параболы
      внутренней точкой ребра: true — да, false — нет
89:     if  $TopPos = true$  then
90:       ▷ Создаём новую вершину в минимальной точке и добавляем её в список
      вершин
91:        $v^* := (x_{c_e}, y_{c_e}, \frac{p_e}{2})$ 
92:        $V := V \cup v^*$ 
93:        $l := \sqrt{(x_{u_e} - x)^2 + (y_{u_e} - y)^2}$ 
94:        $l^* := \sqrt{(x_{v_e} - x)^2 + (y_{v_e} - y)^2}$     ▷ Разбиваем немонотонное ребро на пару
      МОНОТОННЫХ
95:        $e^* := (v^*, v_e, \frac{p_e}{2}, r_{v_e}, l^*, par)$ 
96:        $e := (v^*, u_e, \frac{p_e}{2}, r_{u_e}, l, par)$ 
97:        $E := E \cup e^*$ 
98:     end if
99:   else
100:     $q_e := \frac{1}{l_e} \sqrt{[(l_e + r_e)^2 - R_e^2] \cdot [R_e^2 - (l_e - r_e)^2]}$     ▷ Параметр гиперболического
      бицикла
101:     $c_e := Centre(e)$                                           ▷ Координаты центра бицикла
102:     $TopPos := (l_e^2 + r_e^2 > R_e^2)$     ▷ Является ли центр внутренней точкой ребра:
      true — да, false — нет
103:    if  $TopPos = true$  then
104:       $v^* := (x_{c_e}, y_{c_e}, \frac{q_e}{2})$ 
105:       $V := V \cup v^*$ 
106:       $l := \sqrt{(x_{u_e} - x)^2 + (y_{u_e} - y)^2}$ 
107:       $l^* := \sqrt{(x_{v_e} - x)^2 + (y_{v_e} - y)^2}$ 
108:       $e^* := (v^*, v_e, \frac{q_e}{2}, r_{v_e}, l^*, hyp)$ 
109:       $e := (v^*, u_e, \frac{q_e}{2}, r_{u_e}, l, hyp)$ 
110:       $E := E \cup e^*$ 
111:    end if
112:  end if
113:  if  $r_{u_e} > r_{v_e}$  then
114:    ▷ Упорядочиваем вершины, тем самым превращая граф в ориентированный
115:     $v := u_e$ 
116:     $u_e := v_e$ 
117:     $v_e := v$ 
118:    ▷ Созданные рёбра не рассматриваются, поскольку уже ориентированы
      верно
119:  end if
120: end for
```

Algorithm 1 Алгоритм построения графа монотонных ветвей (часть 5)

121: $\mathfrak{V} := \emptyset$

122: $\mathfrak{E} := \emptyset$

123: Найти в списке V терминальную вершину v

124: $ComeRound(v)$

Приложение Б. Алгоритм вычисления площади открытия фигуры

Algorithm 2 Алгоритм вычисления площади открытия фигуры (часть 1)

Require: На вход алгоритму подаётся медиальное представление многоугольной фигуры в формате графа монотонных ветвей, полученное в результате работы алгоритма 1:

- $\mathfrak{G} = \langle \mathfrak{V}, \mathfrak{E} \rangle$ — преобразованный скелет фигуры,
- \mathfrak{V} — список вершин графа,
- \mathfrak{E} — список дуг графа,
- $\mathfrak{B} = (u_{\mathfrak{B}}, v_{\mathfrak{B}}, \mathfrak{L}_{\mathfrak{B}})$ — дуга графа (монотонная ветвь),
- $u_{\mathfrak{B}}$ — начальная вершина дуги (вершина с меньшим значением радиальной функции),
- $v_{\mathfrak{B}}$ — конечная вершина дуги (вершина с большим значением радиальной функции),
- $\mathfrak{L}_{\mathfrak{B}}$ — список монотонных рёбер, составляющих ветвь, расположенных в порядке возрастания радиальной функции,
- $e = (u_e, v_e, r_e, R_e, l_e, k_e)$ — монотонное ребро,
- u_e, v_e — вершины исходного скелета, инцидентные ребру,
- r_e — радиус меньшего круга ребра,
- R_e — радиус большего круга ребра,
- l_e — расстояние между центрами кругов ребра,
- k_e — тип ребра (*lin* — линейное, *par* — параболическое, *hyp* — гиперболическое).

Ребро имеет дополнительные параметры в зависимости от своего типа. Для линейного ребра известна величина t_e — длина проекции ребра на сайты-сегмента. Для параболического (гиперболического) ребра известны параметр бицикла p_e (q_e) и минимальная точка бицикла c_e .

Кроме того, будем считать, что для вершины графа v определены следующие операции:

- 1) $deg(v)$ — степень вершины,
- 2) $deg^+(v)$ — полустепень захода,
- 3) $deg^-(v)$ — полустепень исхода,
- 4) \mathfrak{E}_v — множество инцидентных рёбер.

Ensure: $\{F_0, F_1, \dots, F_N\}$ — массив значений площади открытия фигуры $F_i = \mathcal{F}(r_i)$ в некотором заранее определённом наборе значений аргумента $\{r_0, r_1, \dots, r_N\}$, $0 \leq r_0 < r_1 < \dots < r_N$. В качестве такого набора значений аргумента может быть использована, например, последовательность целых чисел $\{0, 1, \dots, N\}$, т.е. $r_i = i$.

1: **function** *BoneSquare*(e, z) ▷ Площадь непрерывной области ширины z

2: **if** $k_e = \textit{lin}$ **then**

3:

▷ Для параболического ребра

$$4: \quad S := \begin{cases} t_e(r_e + R_e) + \arccos\left(\frac{R_e - r_e}{l_e}\right) (r_e^2 - R_e^2) & \text{при } z \leq r_e \\ (z + R_e) \cdot \frac{t_e(R_e - z_e)}{(R_e - r_e)} + \arccos\left(\frac{R_e - r_e}{l_e}\right) (z^2 - R_e^2) & \text{при } r_e < z \leq R_e \\ 0 & \text{при } z > R_e \end{cases}$$

Algorithm 2 Алгоритм вычисления площади открытия фигуры (часть 2)

```

5:   else if  $k_e = par$  then
6:                                     ▷ Для параболического ребра
7:    $S := \begin{cases} \frac{p_e+R_e}{2} \sqrt{2p_e (R_e - \frac{p_e}{2})} - \frac{p_e+r_e}{2} \sqrt{2p_e (R_e - \frac{p_e}{2})} \\ \quad + \left( \arcsin \left( \frac{p_e-r_e}{r_e} \right) + \frac{\pi}{2} \right) \frac{r_e^2}{2} - \left( \arcsin \left( \frac{p_e-R_e}{R_e} \right) + \frac{\pi}{2} \right) \frac{R_e^2}{2} & \text{при } z \leq r_e \\ \frac{p_e+R_e}{2} \sqrt{2p_e (R_e - \frac{p_e}{2})} - \frac{p_e+z}{2} \sqrt{2p_e (z - \frac{p_e}{2})} \\ \quad + \left( \arcsin \left( \frac{p_e-z}{z} \right) + \frac{\pi}{2} \right) \frac{z^2}{2} - \left( \arcsin \left( \frac{p_e-R_e}{R_e} \right) + \frac{\pi}{2} \right) \frac{R_e^2}{2} & \text{при } r_e < z \leq R_e \\ 0 & \text{при } z > R_e \end{cases}$ 
8:   else
9:                                     ▷ Для гиперболического ребра
10:   $S := \begin{cases} \frac{q_e}{2} \left( \sqrt{R_e^2 - \left( \frac{q_e}{2} \right)^2} - \sqrt{r_e^2 - \left( \frac{q_e}{2} \right)^2} \right) \\ \quad + \arcsin \left( \frac{q_e}{2r_e} \right) r_e^2 - \arcsin \left( \frac{q_e}{2R_e} \right) R_e^2 & \text{при } z \leq r_e \\ \frac{q_e}{2} \left( \sqrt{R_e^2 - \left( \frac{q_e}{2} \right)^2} - \sqrt{z^2 - \left( \frac{q_e}{2} \right)^2} \right) \\ \quad + \arcsin \left( \frac{q_e}{2z} \right) z^2 - \arcsin \left( \frac{q_e}{2R_e} \right) R_e^2 & \text{при } r_e < z \leq R_e \\ 0 & \text{при } z > R_e \end{cases}$ 
11:  end if
12:  return  $S$ 
13: end function
14: function  $PointSquare(v, z)$ 
15:                                     ▷ Вычисление площади силуэта ширины  $z$  в точке
16:   $S := \begin{cases} \pi R_v^2 & \text{при } z \leq R_v \\ 0 & \text{при } z > R_v \end{cases}$ 
17:  return  $S$ 
18: end function
19: function  $ExtrBone(e, z)$ 
20:                                     ▷ Вычисление координат крайней точки ширины  $z$  ребра
21:  if  $z \leq r_e$  then
22:    return  $(x_u, y_u)$ 
23:  end if
24:  if  $k_e = lin$  then
25:                                     ▷ Для линейного ребра
26:     $\alpha := \frac{z-r_e}{R_e-r_e}$ 
27:    return  $(x_u + \alpha(x_v - x_u), y_u + \alpha(y_v - y_u))$ 
28:  else if  $k_e = par$  then
29:                                     ▷ Для параболического ребра
30:     $x := x_c + \sqrt{2p_e(z - r_e)}x_{OX_e} + (z - r_e)x_{OY_e}$ 
31:     $y := y_c + \sqrt{2p_e(z - r_e)}y_{OX_e} + (z - r_e)y_{OY_e}$ 
32:    return  $(x, y)$ 

```

Algorithm 2 Алгоритм вычисления площади открытия фигуры (часть 3)

```
33:   else
34:                                     ▷ Для гиперболического ребра
35:      $x := x_c + \sqrt{z^2 - \left(\frac{q_e}{2}\right)^2} x_{OX_e}$ 
36:      $y := y_c + \sqrt{z^2 - \left(\frac{q_e}{2}\right)^2} y_{OX_e}$ 
37:     return  $(x, y)$ 
38:   end if
39: end function
40: function ExtrBranch( $\mathfrak{B}, z$ )
41:     ▷ Вычисление координат крайней точки ширины  $z$  монотонной ветви
42:     Найти первое ребро  $e$  из  $\mathfrak{L}_{\mathfrak{B}}$ , для которого  $z \leq R_e$ 
43:     return ExtrBone( $e, z$ )
44: end function
45: function PairSquare( $\mathfrak{B}, \mathfrak{D}, z$ )
46:     ▷ Вычисление площади пересечения пары силуэтов ширины  $z$  монотонных
    ветвей
47:     if  $z > r_{v_{\mathfrak{B}}}$  or  $z > r_{v_{\mathfrak{D}}}$  then
48:         return 0
49:     end if
50:      $(x_1, y_1) := \text{ExtrBranch}(\mathfrak{B}, z)$ 
51:      $(x_2, y_2) := \text{ExtrBranch}(\mathfrak{D}, z)$ 
52:      $l := \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ 
53:      $q := \max(z, r_{u_{\mathfrak{B}}})$ 
54:     if  $l \leq 2z$  then
55:         return 0
56:     else
57:          $h := 2\sqrt{q^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2}$ 
58:         return  $2 \arcsin\left(\frac{h}{2q}\right) q^2 - \frac{lh}{2}$ 
59:     end if
60: end function
61: function Rebuild( $v$ )
62:                                     ▷ Преобразование графа в окрестности точки  $v$ 
63:     while  $\text{deg}^+(v) > 0$  do
64:         for all  $\mathfrak{B} \in \mathfrak{E}_v$  do
65:             if  $v_{\mathfrak{B}} = v$  then                                     ▷ Ветвь направлена к вершине  $v$ 
66:                  $\mathfrak{E} := \mathfrak{E} \setminus \mathfrak{B}$ 
67:                 if  $(x_{u_{\mathfrak{B}}} - x_v)^2 + (y_{u_{\mathfrak{B}}} - y_v)^2 < (r_{v_{\mathfrak{B}}} + r_v)^2$  then
68:                     for all  $\mathfrak{D} \in \mathfrak{E}_{u_{\mathfrak{B}}}$  do
69:                         if  $u_{\mathfrak{D}} = u_{\mathfrak{B}}$  then
70:                              $u_{\mathfrak{D}} := v$ 
71:                         else
72:                              $v_{\mathfrak{D}} := v$ 
73:                         end if
74:                     end for
```

Algorithm 2 Алгоритм вычисления площади открытия фигуры (часть 4)

```
75:         end if
76:     end if
77: end for
78: end while
79:  $d_e := true$  ▷ Вершина участвовала в перестроении
80: end function
81: ▷ Предобработка, подготовка параметров для всех бициклов
82: for all  $e \in E$  do
83:     if  $k_e = par$  then
84:          $(x_1, y_1) := e.p$  ▷ Координаты сайта-точки
85:          $(x_2, y_2) := e.l.p_1$ 
86:          $(x_3, y_3) := e.l.p_2$  ▷ Координаты концов сайта-сегмента
87:          $\beta := \frac{(x_3-x_2)(x_1-x_2)+(y_3-y_2)(y_1-y_2)}{(x_3-x_2)(x_3-x_2)+(y_3-y_2)(y_3-y_2)}$ 
88:          $(x_4, y_4) := (x_2 + \beta(x_3 - x_2), y_2 + \beta(y_3 - y_2))$ 
89:          $h := \sqrt{(x_1 - x_4)^2 + (y_1 - y_4)^2}$ 
90:         ▷ Вычисляем координаты единичных векторов осей
91:          $OY_e := (\frac{x_1-x_4}{h}, \frac{y_1-y_4}{h})$ 
92:          $d := \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}$ 
93:          $\alpha := \text{sgn}((x_3 - x_2)(x_v - x_u) + (y_3 - y_2)(y_v - y_u))$ 
94:          $OX_e := \alpha(\frac{x_3-x_2}{d}, \frac{y_3-y_2}{d})$ .
95:     else if  $k_e = hyp$  then
96:          $OX_e := (\frac{x_{v_e}-x_{u_e}}{l_e}, \frac{y_{v_e}-y_{u_e}}{l_e})$ 
97:     end if
98: end for
99: for all  $v \in \mathfrak{V}$  do
100:      $d_v := false$ 
101: end for
102: for  $i \in \{0, 1, \dots, N\}$  do
103:      $F_i := 0$ 
104:     for all  $v \in \mathfrak{V}$  do
105:         if  $r_v < r_i$  and  $d_v = false$  then
106:              $Rebuild(v)$ 
107:              $d_v := true$ 
108:         end if
109:     end for
110:     for all  $\mathfrak{B} \in \mathfrak{E}$  do
111:         for all  $e \in \mathfrak{L}_{\mathfrak{B}}$  do
112:              $s := BoneSquare(e, r_i)$ 
113:             if  $s = 0$  then
114:                  $\mathfrak{L}_{\mathfrak{B}} = \mathfrak{L}_{\mathfrak{B}} \setminus e$ 
115:             else
116:                  $F_i := F_i + s$ 
117:             end if
118:         end for
119:     end for
```

Algorithm 2 Алгоритм вычисления площади открытия фигуры (часть 5)

```
120:   for all  $v \in \mathfrak{V}$  do
121:     if  $\text{deg}(v) = 0$  then
122:        $\mathfrak{V} = \mathfrak{V} \setminus v$ 
123:     else if  $\text{deg}^-(v) = 0$  then
124:        $F_i = F_i + \text{PointSquare}(v, r_i)$ 
125:     else if  $\text{deg}^-(v) \geq 2$  then
126:       for all  $(\mathfrak{B}, \mathfrak{D}) : u_{\mathfrak{B}} = u_{\mathfrak{D}} = v, \mathfrak{B} \neq \mathfrak{D}$  do
127:          $F_i = F_i - \text{PairSquare}(\mathfrak{B}, \mathfrak{D}, r_i)$ 
128:       end for
129:     end if
130:   end for
131: end for
```

Список литературы

- [1] *Maragos P.* Pattern Spectrum and Multiscale Shape Representation. — IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence, Vol. 11, № 7, pp. 701–716, 1989.
- [2] *Serra J.* Image Analysis and Mathematical Morphology. — London: Academic Press, 1982.
- [3] *Urbach, E.R., Wilkinson, M.H.F.* Efficient 2-D Grayscale Morphological Transformations With Arbitrary Flat Structuring Elements. — IEEE Transactions on Image Processing, Volume 17, № 1, pp. 1–8, 2008.
- [4] *Визильтер Ю. В., Сидякин С. В.* Морфологические спектры. — Техническое зрение в системах управления – 2012. Труды научно-технической конференции. М.: ИКИ РАН, с. 234–241, 2012.
- [5] *Визильтер Ю. В., Сидякин С. В.* Использование морфологических спектров для классификации двумерных фигур и бинарных изображений. — Вестник компьютерных и информационных технологий, № 7, с. 20–28, 2013.
- [6] *Местецкий Л. М.* Непрерывная морфология бинарных изображений. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009.
- [7] *Макарова Е. Ю.* Непрерывные алгоритмы морфологического анализа и сравнения листьев растений. — Дипломная работа, МГУ, ВМК, 2012.
- [8] *Местецкий Л. М.* Медиальная ширина фигуры — дескриптор формы изображений. — Машинное обучение и анализ данных, том 1, № 9, с. 1291–1318, 2014.
- [9] *Местецкий Л. М.* Скелет многоугольной фигуры — представление плоским прямолинейным графом. — Труды 20-й международной конференции «Графикон-2010». СПб, ИТМО, с. 222–229, 2010.