

*Лекция 2*

# **Языковое моделирование**

**Марковские модели со сглаживанием  
Нейросетевые языковые модели**

*Потапенко Анна Александровна*

*12 сентября 2018*

# Языковое моделирование

This is the ...

house

rat

did

malt

Какова вероятность следующего слова?

$$p(\text{house} \mid \text{this is the}) = ?$$

# Игрушечный корпус

*This is the house that Jack built.*

*This is the malt*

*That lay in the house that Jack built.*

*This is the rat,*

*That ate the malt*

*That lay in the house that Jack built.*

*This is the cat,*

*That killed the rat,*

*That ate the malt*

*That lay in the house that Jack built.*

$p(\text{house} \mid \text{this is the}) =$

# Игрушечный корпус

*This is the house that Jack built.*

*This is the malt*

*That lay in the house that Jack built.*

*This is the rat,*

*That ate the malt*

*That lay in the house that Jack built.*

*This is the cat,*

*That killed the rat,*

*That ate the malt*

*That lay in the house that Jack built.*

$p(\text{house} \mid \text{this is the}) =$

# Игрушечный корпус

***This is the house*** that Jack built.

***This is the malt***

*That lay in the house that Jack built.*

***This is the rat,***

*That ate the malt*

*That lay in the house that Jack built.*

***This is the cat,***

*That killed the rat,*

*That ate the malt*

*That lay in the house that Jack built.*

$p(\text{house} \mid \text{this is the}) =$

# Игрушечный корпус

***This is the house*** that Jack built.

***This is the malt***

*That lay in the house that Jack built.*

***This is the rat,***

*That ate the malt*

*That lay in the house that Jack built.*

***This is the cat,***

*That killed the rat,*

*That ate the malt*

*That lay in the house that Jack built.*

$$p(\text{house} \mid \text{this is the}) = \frac{c(\text{this is the house})}{c(\text{this is the ...})} = \frac{1}{4}$$

# Игрушечный корпус

**This is the house** that Jack built.

**This is the malt**

That lay in the house that Jack built.

**This is the rat,**

That ate the malt

That lay in the house that Jack built.

**This is the cat,**

That killed the rat,

That ate the malt

That lay in the house that Jack built.

4-граммы

$$p(\text{house} \mid \text{this is the}) = \frac{c(\text{this is the house})}{c(\text{this is the ...})} = \frac{1}{4}$$

# Игрушечный корпус

*This is the house **that Jack** built.*

*This is the malt*

*That lay in the house **that Jack** built.*

*This is the rat,*

*That ate the malt*

*That lay in the house **that Jack** built.*

*This is the cat,*

*That killed the rat,*

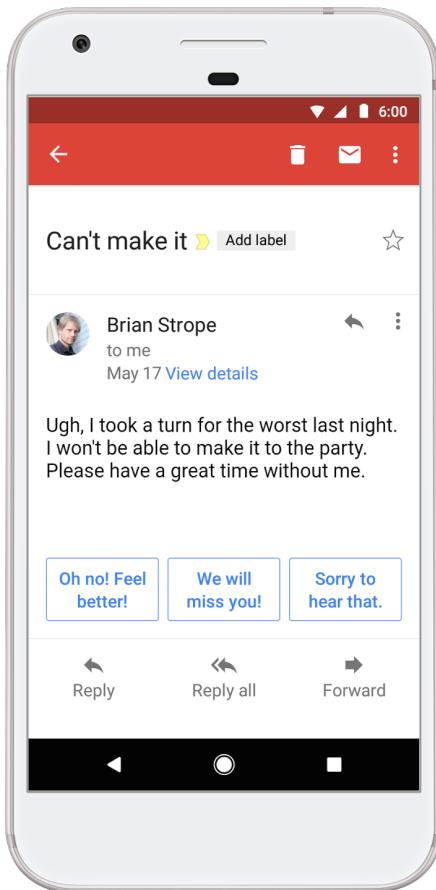
*That ate the malt*

*That lay in the house **that Jack** built.*

биграммы

$$p(Jack \mid that) = \frac{c(that\ Jack)}{c(that\ ...)} = \frac{4}{10}$$

# Где нужны языковые модели?



- Исправление опечаток
- Автоматические ответы
- Машинный перевод
- Распознавание речи
- Распознавание рукописного текста
- ...

Smart Reply / [research.googleblog.com](http://research.googleblog.com)

# Языковое моделирование

house

This is the ...

rat

did

malt

Какова вероятность всей последовательности?

$$p(this \ is \ the \ house) \ = \ ?$$

# Немного математики

Дана последовательность слов:

$$\mathbf{w} = (w_1 w_2 w_3 \dots w_k)$$

# Немного математики

Дана последовательность слов:

$$\mathbf{w} = (w_1 w_2 w_3 \dots w_k)$$

- **Правило условной вероятности:**

$$p(\mathbf{w}) = p(w_1)p(w_2|w_1)\dots p(w_k|w_1\dots w_{k-1})$$

# Немного математики

Дана последовательность слов:

$$\mathbf{w} = (w_1 w_2 w_3 \dots w_k)$$

- **Правило условной вероятности:**

$$p(\mathbf{w}) = p(w_1)p(w_2|w_1) \dots p(w_k | \cancel{w_1 \dots w_{k-1}})$$

- **Предположение Маркова:**

$$p(w_i | w_1 \dots i_{i-1}) = p(w_i | w_{i-n+1} \dots w_{i-1})$$

# Биграммная языковая модель

Для  $n = 2$ :

$$p(\mathbf{w}) = p(w_1)p(w_2|w_1) \dots p(w_k|w_{k-1})$$

# Биграммная языковая модель

Для  $n = 2$ :

$$p(\mathbf{w}) = p(w_1)p(w_2|w_1) \dots p(w_k|w_{k-1})$$

Корпус:

*This is the malt*

*That lay in the house that Jack built.*

$$p(\textit{this is the house}) = p(\textit{this}) p(\textit{is} | \textit{this}) p(\textit{the} | \textit{is}) p(\textit{house} | \textit{the})$$

# Биграммная языковая модель

Для  $n = 2$ :

$$p(\mathbf{w}) = p(w_1)p(w_2|w_1) \dots p(w_k|w_{k-1})$$

Корпус:

*This is the malt*

*That lay in the house that Jack built.*

$$\begin{array}{cccc} 1/12 & 1 & 1 & 1/2 \end{array}$$

$$p(\textit{this is the house}) = p(\textit{this}) p(\textit{is} | \textit{this}) p(\textit{the} | \textit{is}) p(\textit{house} | \textit{the})$$

# Биграммная языковая модель

Для  $n = 2$ :

$$p(\mathbf{w}) = \cancel{p(w_1)} p(w_2|w_1) \dots p(w_k|w_{k-1}) \\ p(w_1|\text{start})$$

Корпус:

*This is the malt*

*That lay in the house that Jack built.*

$$p(\text{this is the house}) = p(\text{this}) \ p(\text{is} | \text{this}) \ p(\text{the} | \text{is}) \ p(\text{house} | \text{the})$$

$1/2$        $1$        $1$        $1/2$

# Биграммная языковая модель

Для  $n = 2$ :

$$p(\mathbf{w}) = \cancel{p(w_1)} p(w_2|w_1) \dots p(w_k|w_{k-1}) \\ p(w_1|\textcolor{teal}{start})$$

# Биграммная языковая модель

Для  $n = 2$ :

$$p(\mathbf{w}) = \cancel{p(w_1)} p(w_2|w_1) \dots p(w_k|w_{k-1}) \\ p(w_1|\text{start})$$

**Неверная нормировка: отдельно по каждой длине!**

$$p(this) + p(that) = 1.0$$

$$p(this\ this) + p(this\ is) + \dots + p(built\ built) = 1.0$$

...

# Биграммная языковая модель

Для  $n = 2$ :

$$p(\mathbf{w}) = \cancel{p(w_1)} p(w_2|w_1) \dots p(w_k|w_{k-1})$$

$p(w_1 | \text{start})$

$p(\text{end} | w_k)$

**Неверная нормировка: отдельно по каждой длине!**

$$p(\text{this}) + p(\text{that}) = 1.0$$

$$p(\text{this this}) + p(\text{this is}) + \dots + p(\text{built built}) = 1.0$$

...

# Проверим нормировку

\_ dog \_

\_ dog cat tiger \_

\_ cat dog cat \_

$p(cat\ dog\ cat) =$

# Проверим нормировку

\_ dog \_

\_ dog cat tiger \_

\_ cat dog cat \_

$$p(cat \ dog \ cat) = p(cat \mid \_)$$

*dog*

*cat*

# Проверим нормировку

\_ dog \_

\_ dog cat tiger \_

\_ cat dog cat \_

$$p(cat \; dog \; cat) = p(cat \mid \_)$$

*dog*

*cat*

# Проверим нормировку

\_ dog \_

\_ dog cat tiger \_

\_ cat dog cat \_

$$p(cat \, dog \, cat) = p(cat \mid \_) \, p(dog \mid cat)$$

*dog*

*cat tiger*

*cat dog*

*cat \_*

# Проверим нормировку

\_ dog \_

\_ dog cat tiger \_

\_ cat dog cat \_

$$p(cat \ dog \ cat) = p(cat \mid \_) \ p(dog \mid cat)$$

*dog*

*cat tiger*

*cat dog*

*cat \_*

# Проверим нормировку

\_ dog \_

\_ dog cat tiger \_

\_ cat dog cat \_

$$p(cat \ dog \ cat) = p(cat \mid \_) \ p(dog \mid cat) \ p(cat \mid dog)$$

dog

cat tiger

cat dog cat

cat dog \_

cat \_

# Проверим нормировку

\_ dog \_

\_ dog cat tiger \_

\_ cat dog cat \_

$$p(cat \ dog \ cat) = p(cat \mid \_) \ p(dog \mid cat) \ p(cat \mid dog)$$

*dog*

*cat tiger*

*cat dog cat*

*cat dog\_*

*cat \_*

# Проверим нормировку

\_ dog \_

\_ dog cat tiger \_

\_ cat dog cat \_

$$p(cat \ dog \ cat) = p(cat \mid \_) \ p(dog \mid cat) \ p(cat \mid dog) \ p(\_ \mid cat)$$

dog

cat tiger

cat dog cat tiger

cat dog cat dog

cat dog cat \_

cat \_

# Проверим нормировку

\_ dog \_

\_ dog cat tiger \_

\_ cat dog cat \_

$$p(cat \ dog \ cat) = p(cat \mid \_) \ p(dog \mid cat) \ p(cat \mid dog) \ p(\_ \mid cat)$$

*dog*

*cat tiger*

*cat dog cat tiger*

*cat dog cat dog*

*cat dog cat \_*

*cat \_*

# Обобщение: n-граммная модель

$$\mathbf{w} = (w_1 w_2 w_3 \dots w_k)$$

**Биграммная модель:**

$$p(\mathbf{w}) = \prod_{i=1}^{k+1} p(w_i | w_{i-1})$$

**N-граммная модель:**

$$p(\mathbf{w}) = \prod_{i=1}^{k+1} p(w_i | w_{i-n+1}^{i-1})$$

$(w_{i-n+1}, \dots, w_{i-1})$



# Обучение

**Максимизация логарифма правдоподобия:**

$$\log p(\mathbf{w}_{\text{train}}) = \sum_{i=1}^{N+1} \log p(w_i | w_{i-n+1}^{i-1}) \rightarrow \max$$

**Оценки на параметры:**

$$p(w_i | w_{i-n+1}^{i-1}) = \frac{c(w_{i-n+1}^i)}{\sum_{w_i} c(w_{i-n+1}^i)} = \frac{c(w_{i-n+1}^i)}{c(w_{i-n+1}^{i-1})}$$

# Генерация Шекспира

## Униграммы:

*To him swallowed confess hear both. Which. Of save on trail  
for are ay device and rote life have. Every enter now severally  
so, let. Hill he late speaks; or! a more to leg less first you  
enter.*

## Биграммы:

*What means, sir. I confess she? then all sorts, he is trim,  
captain. Why dost stand forth thy canopy, forsooth; he is this  
palpable hit the King Henry. Live king. Follow. What we, hath  
got so she that I rest and sent to scold and nature bankrupt,  
nor the first gentleman?*

# Генерация Шекспира

## 3-граммы:

*Sweet prince, Falstaff shall die. Harry of Monmouth's grave.  
This shall forbid it should be branded, if renown made it empty.  
What is't that cried? Indeed the duke; and had a very good  
friend. Fly, and will rid me these news of price. Therefore the  
sadness of parting, as they say, 'tis done.*

## 4-граммы:

*King Henry. What! I will go seek the traitor Gloucester. Exeunt  
some of the watch. A great banquet serv'd in; Will you not tell  
me who I am? It cannot be but so. Indeed the short and the long.  
Marry, 'tis a noble Lepidus. They say all lovers swear more  
performance than they are wont to keep obliged faith.*

# Какая модель лучше?

Выбор  $n$  часто зависит от объема выборки

- биграмм может быть недостаточно
- 7-граммы обычно уникальны

## Внешняя оценка качества:

- Качество приложения: машинного перевода, распознавания речи, исправления опечаток...

## Внутренняя оценка качества:

- Тестовая перплексия

# Оценка качества модели

**Правдоподобие:**

$$\mathcal{L} = p(\mathbf{w}_{\text{test}}) = \prod_{i=1}^{N+1} p(w_i | w_{i-n+1}^{i-1})$$

**Перплексия:**

$$\mathcal{P} = p(\mathbf{w}_{\text{test}})^{-\frac{1}{N}} = \frac{1}{\sqrt[N]{p(\mathbf{w}_{\text{test}})}}$$

Чем меньше перплексия, тем лучше.

# Новые слова (OOV)

## Обучение:

This is the house that Jack built.

## Контроль:

This is the *malt*.

# Новые слова (OOV)

## Обучение:

This is the house that Jack built.

## Контроль:

This is the *malt*.

Какова перплексия биграммной модели?

# Новые слова (OOV)

## Обучение:

This is the house that Jack built.

## Контроль:

This is the *malt*.

Какова перплексия биграммной модели?

$$p(malt|the) = \frac{c(the\ malt)}{c(the)} = 0$$

# Новые слова (OOV)

## Обучение:

This is the house that Jack built.

## Контроль:

This is the *malt*.

Какова перплексия биграммной модели?

$$p(malt|the) = \frac{c(the\ malt)}{c(the)} = 0$$

$$p(\mathbf{w}_{\text{test}}) = 0$$

# Новые слова (OOV)

## Обучение:

This is the house that Jack built.

## Контроль:

This is the *malt*.

Какова перплексия биграммной модели?

$$p(malt|the) = \frac{c(the\ malt)}{c(the)} = 0$$

$$p(\mathbf{w}_{\text{test}}) = 0$$

$$\mathcal{P} = \inf$$

# Новые слова (OOV)

## Обучение:

This is the house that Jack built.

## Контроль:

This is the *malt*.

Какова перплексия биграммной модели?

$$p(malt|the) = \frac{c(the\ malt)}{c(the)} = 0$$

$$p(\mathbf{w}_{\text{test}}) = 0$$

$$\mathcal{P} = \inf$$



# Как это исправить?

## Простая идея:

- Строим словарь (например, фильтруем по частоте)
- Заменяем слова не из словаря на  $\langle\text{UNK}\rangle$  (делаем так и на обучении, и на контроле!)
- Подсчитываем счетчики обычным образом для всех токенов, включая  $\langle\text{UNK}\rangle$

# Хорошо, новых слов нет

## Обучение:

This is the house that Jack built.

## Контроль:

This is the *malt*.

Какова перплексия биграммной модели?

# Хорошо, новых слов нет

## Обучение:

This is the house that Jack built.

## Контроль:

This is the *malt*.

Какова перплексия биграммной модели?

$$p(Jack \mid is) = \frac{c(is \ Jack)}{c(is)} = 0$$

# Хорошо, новых слов нет

## Обучение:

This is the house that Jack built.

## Контроль:

This is the *malt*.

Какова перплексия биграммной модели?

$$p(Jack \mid is) = \frac{c(is \ Jack)}{c(is)} = 0$$

$$p(\mathbf{w}_{\text{test}}) = 0$$

# Хорошо, новых слов нет

## Обучение:

This is the house that Jack built.

## Контроль:

This is the *malt*.

Какова перплексия биграммной модели?

$$p(Jack \mid is) = \frac{c(is \ Jack)}{c(is)} = 0$$

$$p(\mathbf{w}_{\text{test}}) = 0$$

$$\mathcal{P} = \inf$$

# Хорошо, новых слов нет

## Обучение:

This is the house that Jack built.

## Контроль:

This is the *malt*.

Какова перплексия биграммной модели?

$$p(Jack \mid is) = \frac{c(is \ Jack)}{c(is)} = 0$$

$$p(\mathbf{w}_{\text{test}}) = 0$$

$$\mathcal{P} = \inf$$



# Сглаживание Лапласа

## Идея:

- Перенести часть вероятности с частых биграмм на редкие
- Просто добавить 1 ко всем счетчикам (add-one):

$$\hat{p}(w_i | w_{i-n+1}^{i-1}) = \frac{c(w_{i-n+1}^i) + 1}{c(w_{i-n+1}^{i-1}) + V}$$

- Или настроить параметр k (add-k):

$$\hat{p}(w_i | w_{i-n+1}^{i-1}) = \frac{c(w_{i-n+1}^i) + k}{c(w_{i-n+1}^{i-1}) + Vk}$$

# Откат (Katz backoff)

## Проблема:

- Хотелось бы использовать более длинные n-граммы, но данных бывает недостаточно

## Идея:

- Начать с длинных, “откатиться” на короткие:

$$\hat{p}(w_i | w_{i-n+1}^{i-1}) = \begin{cases} \tilde{p}(w_i | w_{i-n+1}^{i-1}), & \text{if } c(w_{i-n+1}^i) > 0 \\ \alpha(w_{i-n+1}^{i-1}) \hat{p}(w_i | w_{i-n+2}^{i-1}), & \text{otherwise} \end{cases}$$

где  $\tilde{p}$  и  $\alpha$  выбраны из условия нормировки.

# Интерполяция (Interpolation smoothing)

## Идея:

- Смесь нескольких n-граммных моделей для разных n
- Например, для триграммной модели:

$$\hat{p}(w_i | w_{i-2} w_{i-1}) = \lambda_1(w_i | w_{i-2} w_{i-1}) + \lambda_2(w_i | w_{i-1}) + \lambda_3(w_i)$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$$

- Веса оптимизируются на отложенной выборке
- Могут тоже зависеть от контекста

# Дисконтирование (Absolute discounting)

## Идея:

- Сравним счетчики для биграмм на обучении и контроле

## Эксперимент (Church and Gale, 1991):

- Вычитание 0.75 из счетчика на обучении дает очень хорошую оценку счетчика на контроле!

Train bigram count	Test bigram count
2	1.25
3	2.24
4	3.23
5	4.21
6	5.23
7	6.21
8	7.21

# Дисконтирование (Absolute discounting)

**Идея:**

- Сравним счетчики для биграмм на обучении и контроле

**Эксперимент (Church and Gale, 1991):**

- Вычитание 0.75 из счетчика на обучении дает очень хорошую оценку счетчика на контроле!

$$\hat{p}(w_i | w_{i-1}) = \frac{c(w_{i-1} w_i) - d}{\sum_x c(w_{i-1} x)} + \lambda(w_{i-1}) p(w_i)$$

# Сглаживание Кнессера-Нея (Kneser-Ney)

## Идея:

- Униграммное распределение говорит о частоте слов
- А нам нужно разнообразие контекстов для слова

$$\hat{p}(w) \propto |x : c(x w) > 0|$$

malt

This is the ...

Kong

- Возможно, наиболее популярная техника сглаживания

<https://web.stanford.edu/~jurafsky/slp3/4.pdf>

# **Нейросетевые языковые модели**

# Проклятие размерности

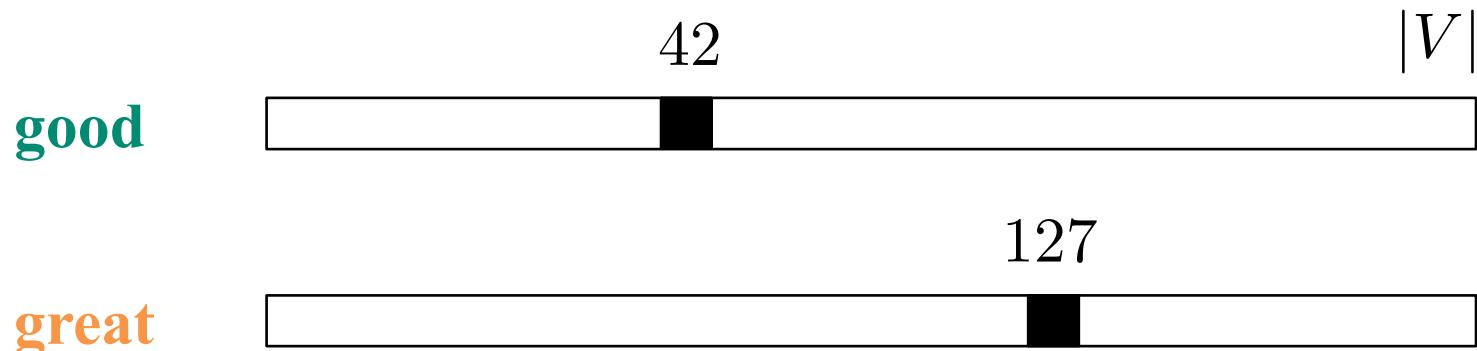
Предположим, модель видела много раз предложение:

- **Have a good day.**

Но ни разу не видела другое предложение:

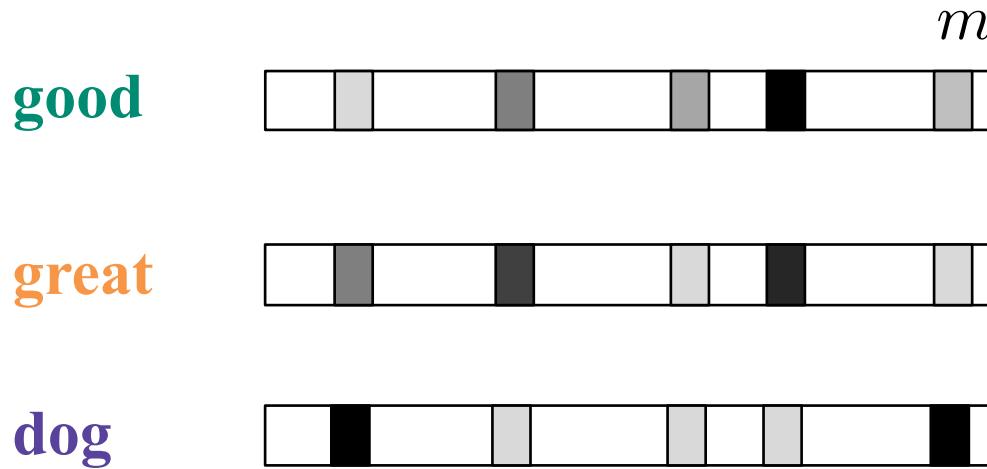
- **Have a great day.**

Что тогда произойдет (даже со сглаживанием)?



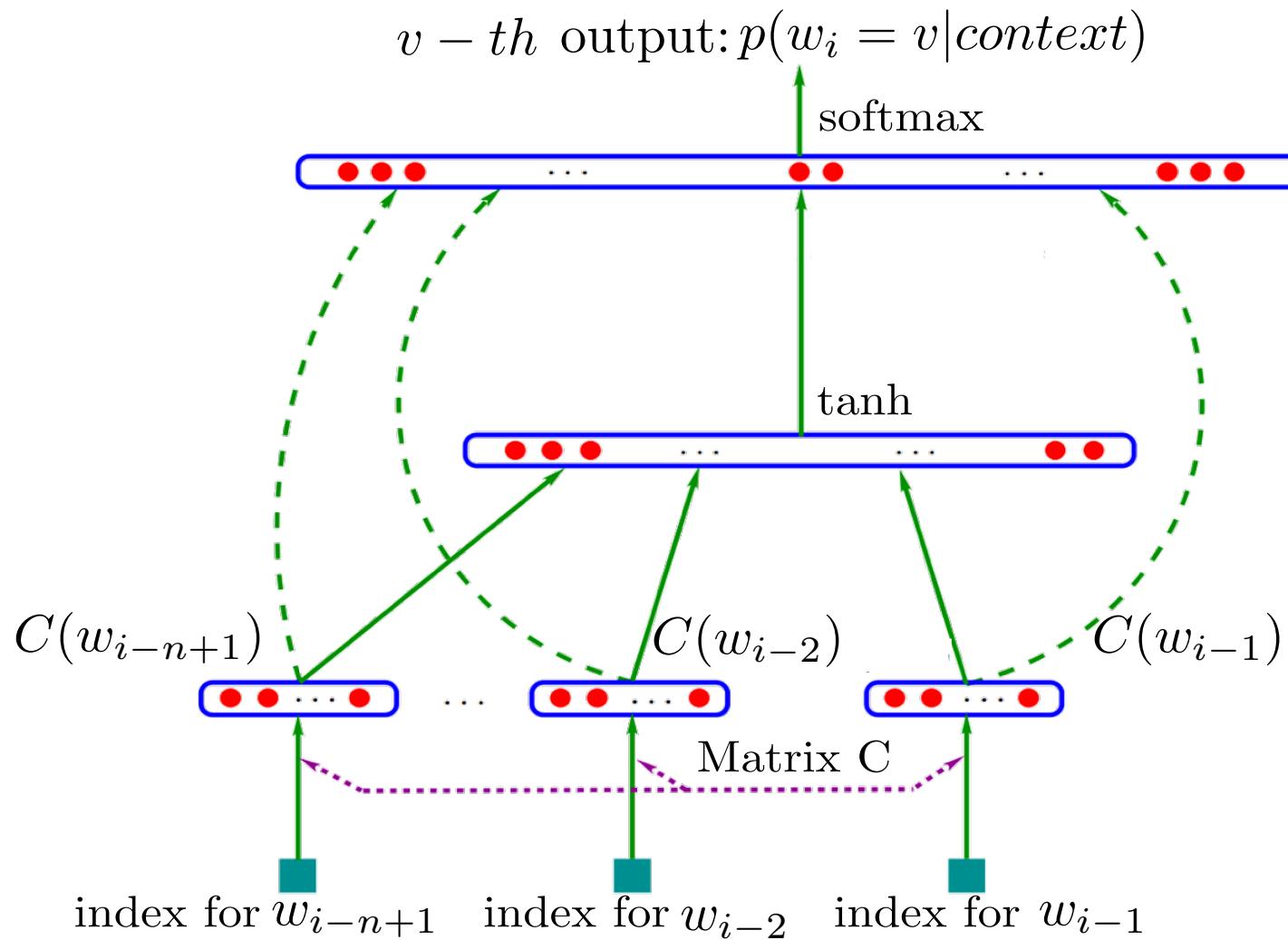
# Распределенные представления слов

- Выразим вероятности предложений через «распределенные» представления слов (*distributed word representations*) и будем обучать параметры



$C^{|V| \times m}$  – матрица представлений слов

# Нейросетевая вероятностная языковая модель



Yoshua Bengio, Réjean Ducharme, Pascal Vincent, Christian Jauvin, A Neural Probabilistic Language Model, JMLR, 2003

# Нейросетевая вероятностная языковая модель

$$p(w_i | w_{i-n+1}, \dots, w_{i-1}) = \frac{\exp(y_{w_i})}{\sum_{w \in V} \exp(y_w)}$$

$$y = b + Wx + U \tanh(d + Hx)$$

$$x = [C(w_{i-n+1}), \dots, C(w_{i-1})]^T$$

# Нейросетевая вероятностная языковая модель

$$p(w_i | w_{i-n+1}, \dots, w_{i-1}) = \frac{\exp(y_{w_i})}{\sum_{w \in V} \exp(y_w)}$$

*Softmax по компонентам у*

$$y = b + Wx + U \tanh(d + Hx)$$

$$x = [C(w_{i-n+1}), \dots, C(w_{i-1})]^T$$

# Нейросетевая вероятностная языковая модель

$$p(w_i | w_{i-n+1}, \dots, w_{i-1}) = \frac{\exp(y_{w_i})}{\sum_{w \in V} \exp(y_w)}$$

*Softmax по компонентам у*

$$y = b + Wx + U \tanh(d + Hx)$$

*Нейронная сеть, много параметров*

$$x = [C(w_{i-n+1}), \dots, C(w_{i-1})]^T$$

# Нейросетевая вероятностная языковая модель

$$p(w_i | w_{i-n+1}, \dots, w_{i-1}) = \frac{\exp(y_{w_i})}{\sum_{w \in V} \exp(y_w)}$$

*Softmax по компонентам у*

$$y = b + Wx + U \tanh(d + Hx)$$

*Нейронная сеть, много параметров*

$$x = [C(w_{i-n+1}), \dots, C(w_{i-1})]^T$$

*Представления слов-контекстов*

# Нейросетевая вероятностная языковая модель

$$p(w_i | w_{i-n+1}, \dots, w_{i-1}) = \frac{\exp(y_{w_i})}{\sum_{w \in V} \exp(y_w)}$$

*Softmax по компонентам у*

$$y = b + Wx + U \tanh(d + Hx)$$

*Нейронная сеть, много параметров*

$$x = [C(w_{i-n+1}), \dots, C(w_{i-1})]^T$$

*Представления слов-контекстов*

*Функция потерь: кросс-энтропия (лог-правдоподобие)*

# Слишком много параметров...

$$y = b + Wx + U \tanh(d + Hx)$$

$$\begin{matrix} & & m * (n - 1) \\ \begin{matrix} y \\ |V| \end{matrix} & = & \begin{matrix} b \\ |V| \end{matrix} & + & \begin{matrix} W \\ |V| \end{matrix} & \times & \begin{matrix} C(w_{i-n+1})^T \\ x \\ C(w_{i-1})^T \end{matrix} & + \dots \end{matrix}$$

# Лог-линейная языковая модель (LBL)

- Гораздо меньше параметров и нелинейностей
- Измеряет близость между словом и контекстом:

$$p(w_i | w_{i-n+1}, \dots, w_{i-1}) = \frac{\exp(\hat{r}^T r_{w_i} + b_{w_i})}{\sum_{w \in V} \exp(\hat{r}^T r_w + b_w)}$$

Представление слова:

$$r_{w_i} = C(w_i)^T$$

Представление контекста:

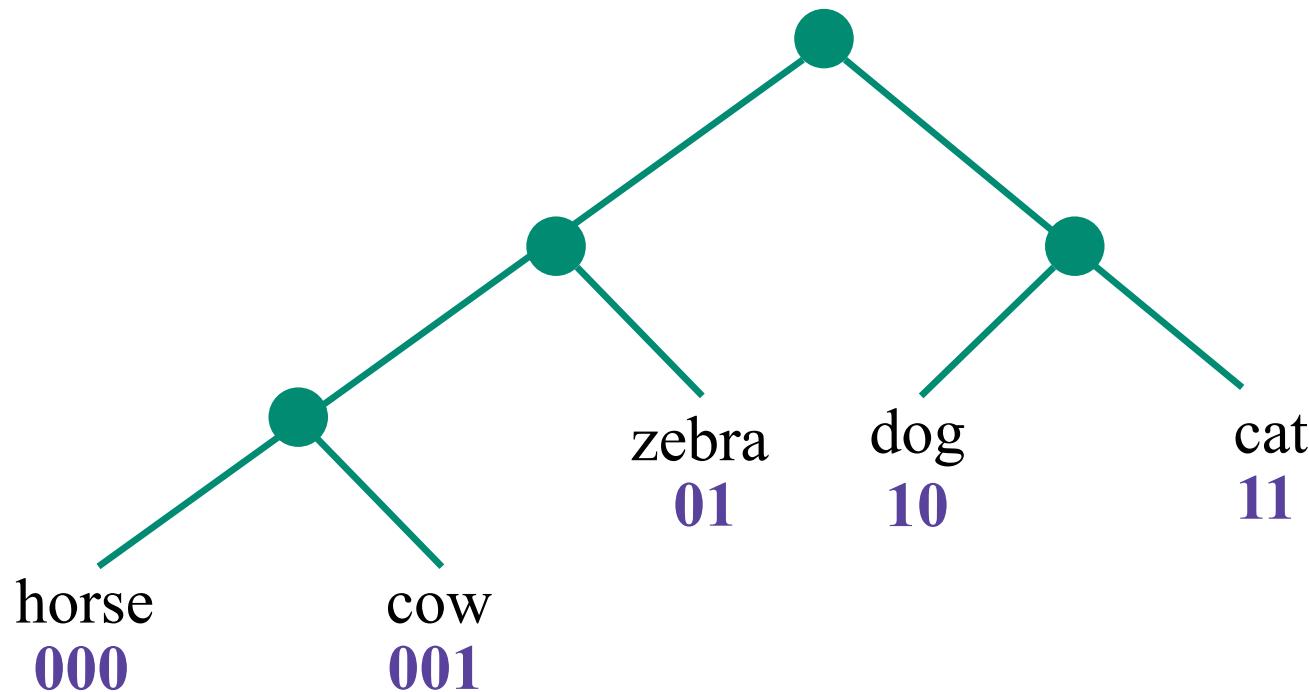
$$\hat{r} = \sum_{k=1}^{n-1} W_k C(w_{i-k})^T$$

Andriy Mnih and Geoffrey Hinton. 2007. Three new graphical models for statistical language modelling.  
In *Proceedings of the 24th international conference on Machine learning* (ICML '07)

# Иерархический softmax

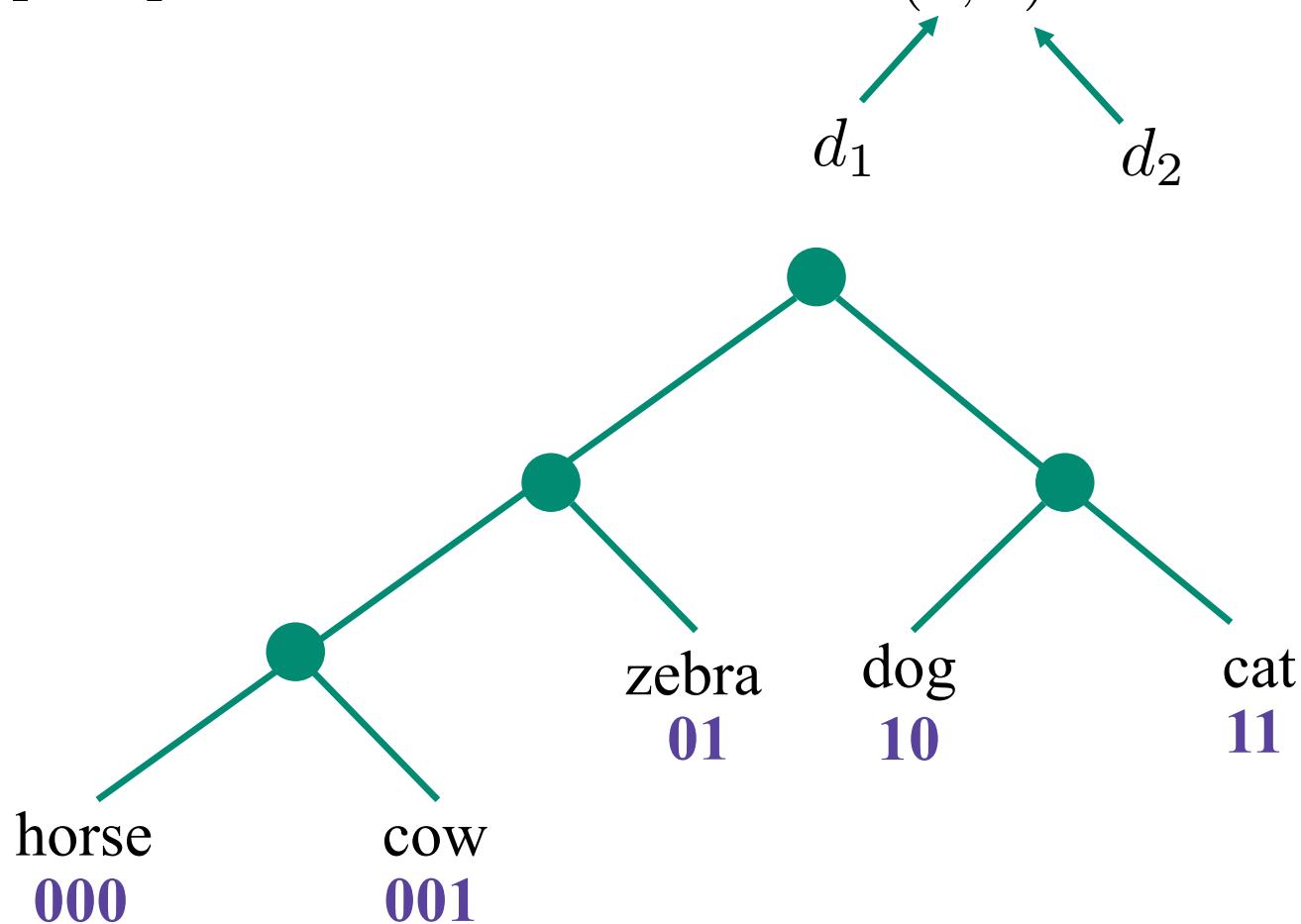
Каждому слову можно сопоставить бинарный код:

- 0 - “в левое поддерево”, 1 - “в правое поддерево”



# Иерархический софтмакс

Например, код слова **zebra** это  $d = (0, 1)$



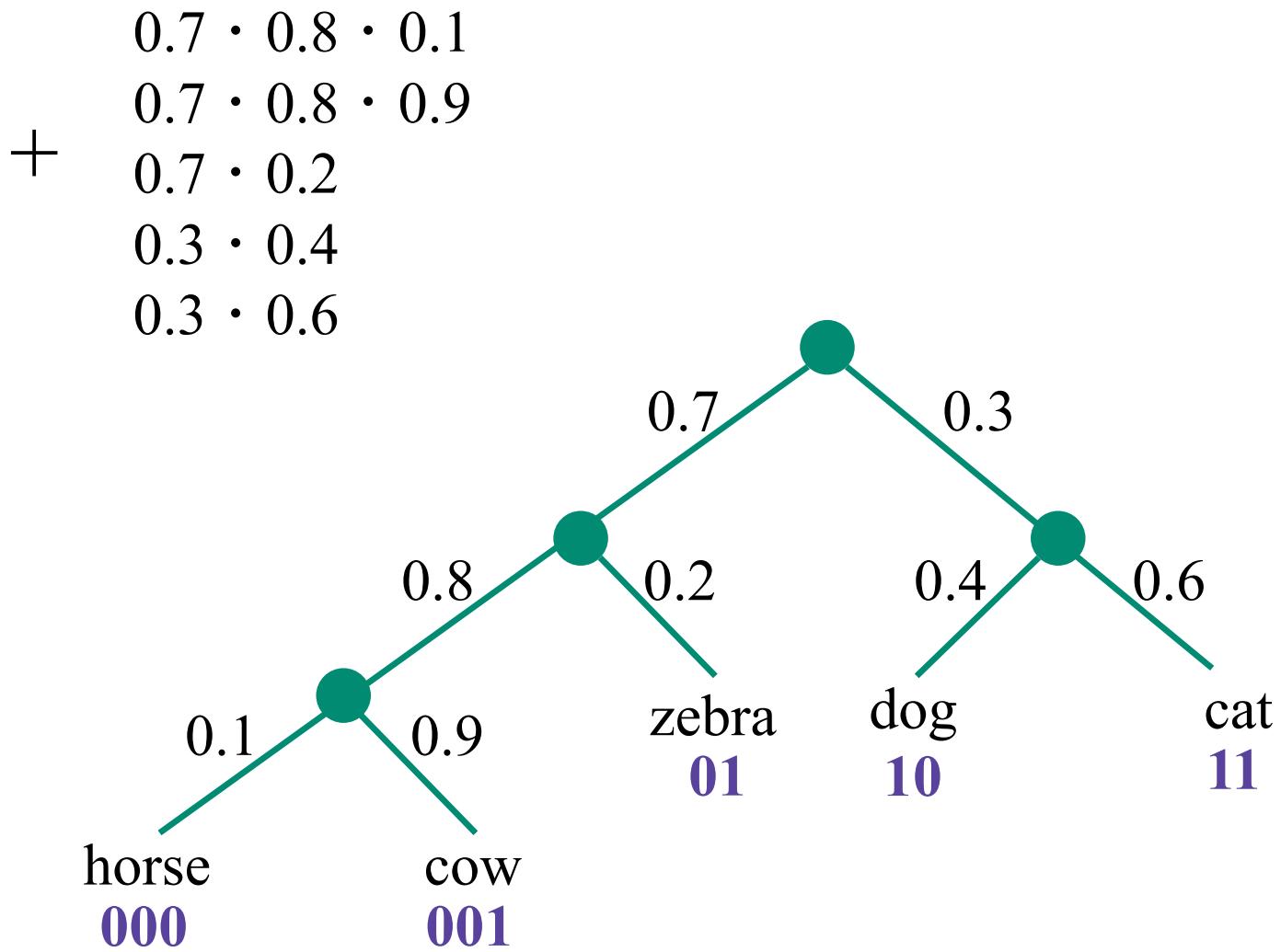
# Иерархический софтмакс

Выразим вероятность слова как произведение бинарных вероятностей вдоль пути от корня до вершины:

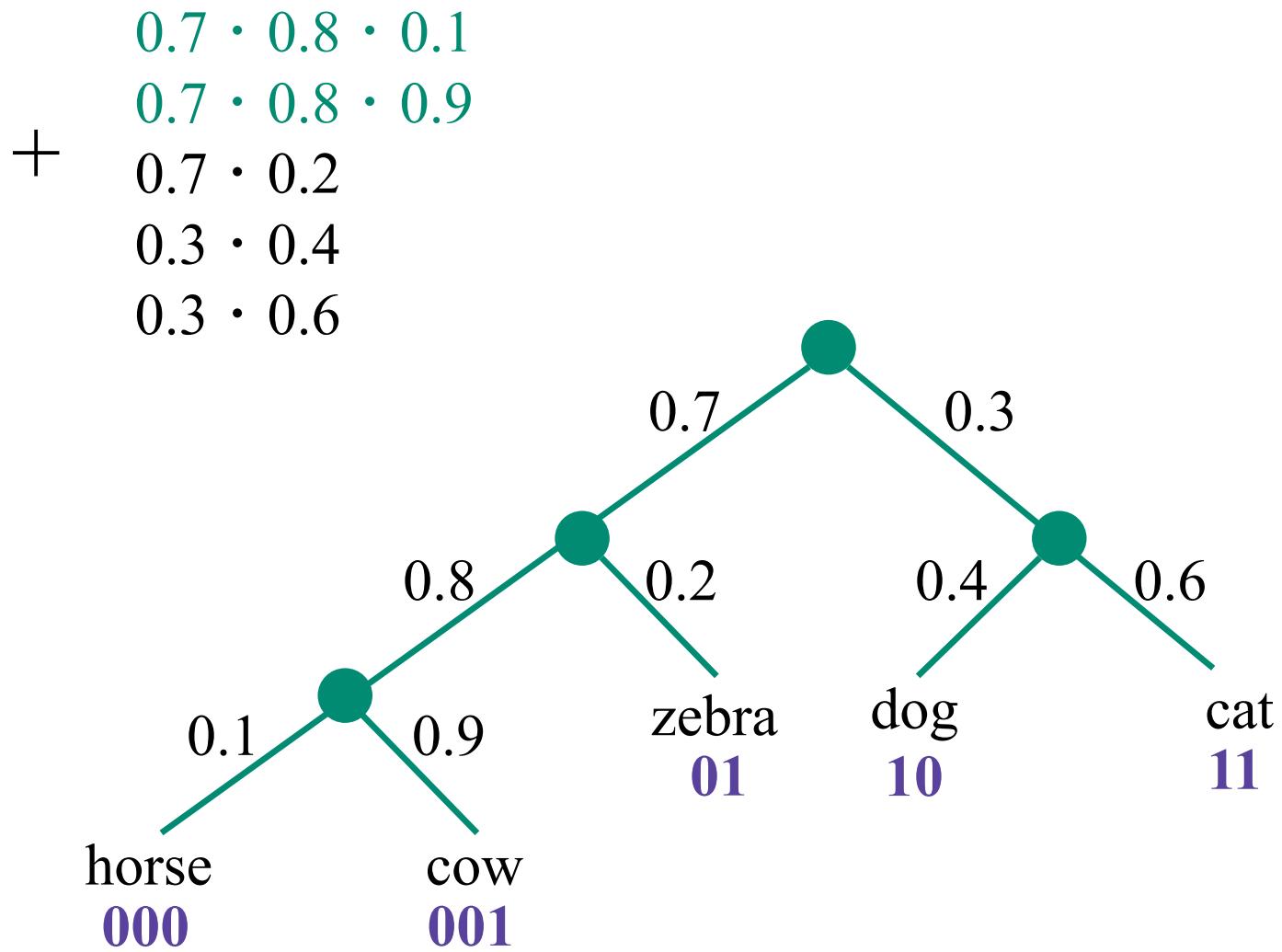
$$p(w_n = w | w_1^{n-1}) = \prod_i p(d_i | w_1^{n-1})$$

Нормировка?

# Иерархический софтмакс

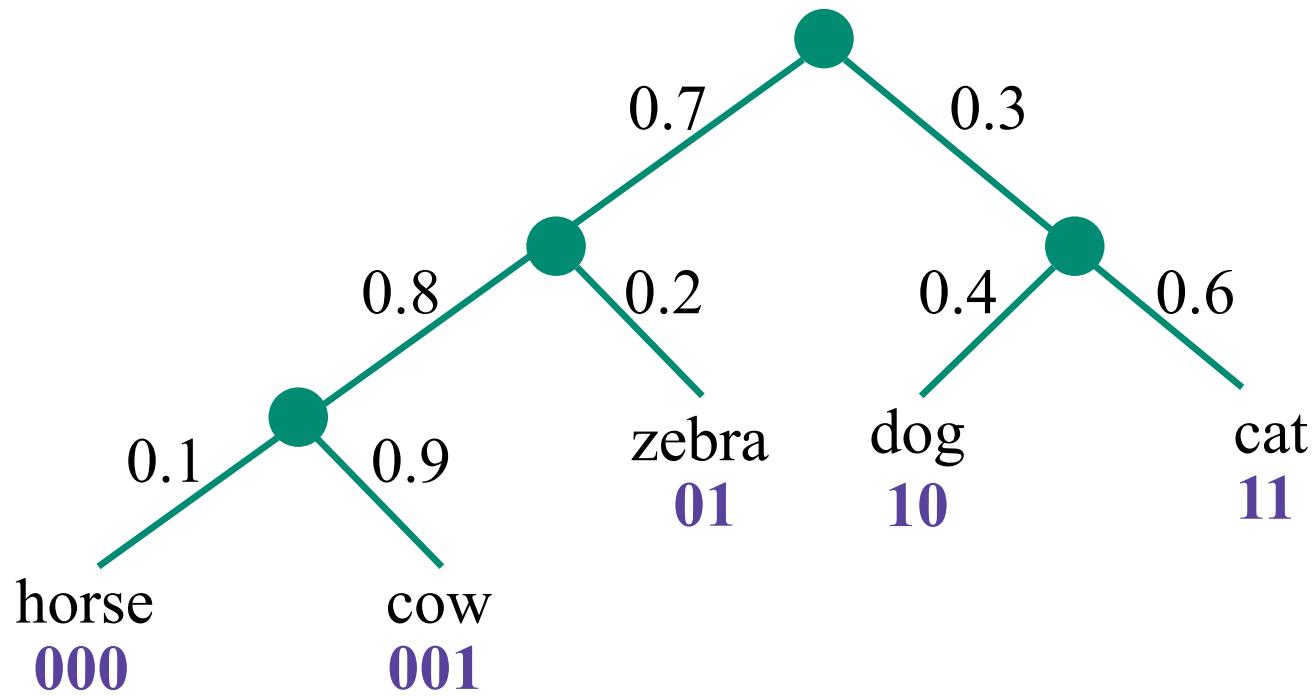


# Иерархический софтмакс



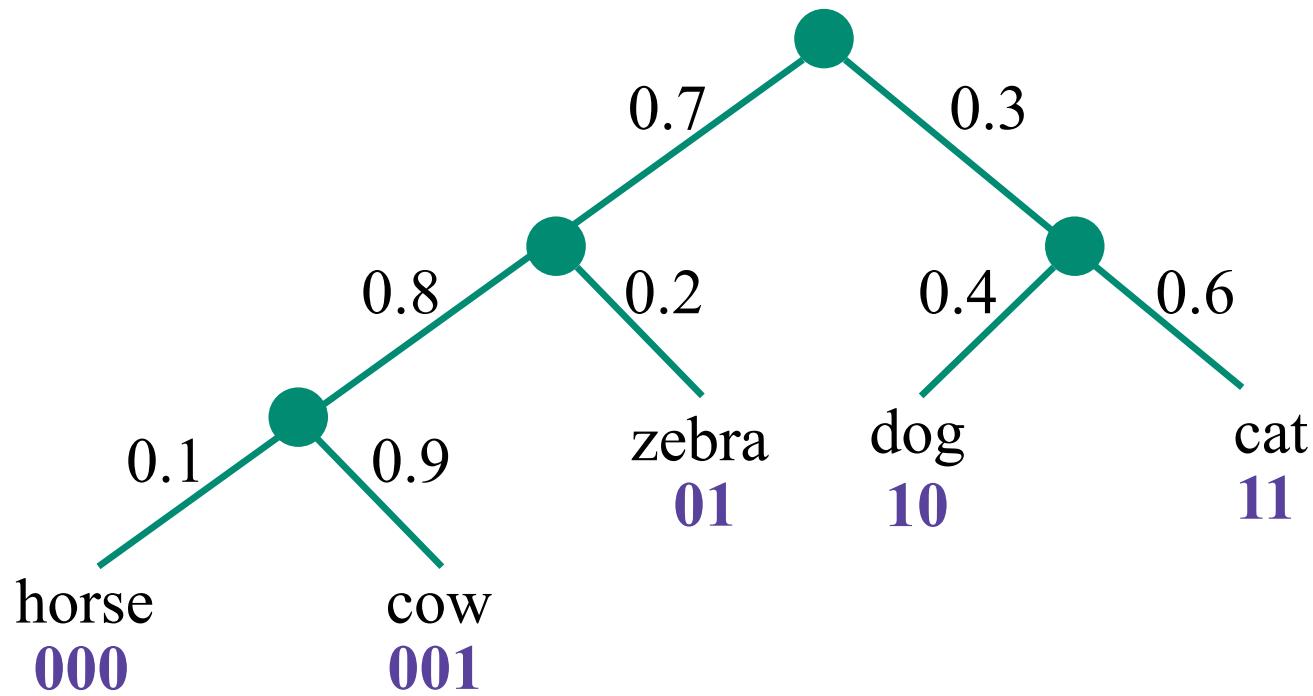
# Иерархический софтмакс

$$+ \begin{array}{l} 0.7 \cdot 0.8 \\ 0.7 \cdot 0.2 \\ 0.3 \cdot 0.4 \\ 0.3 \cdot 0.6 \end{array}$$



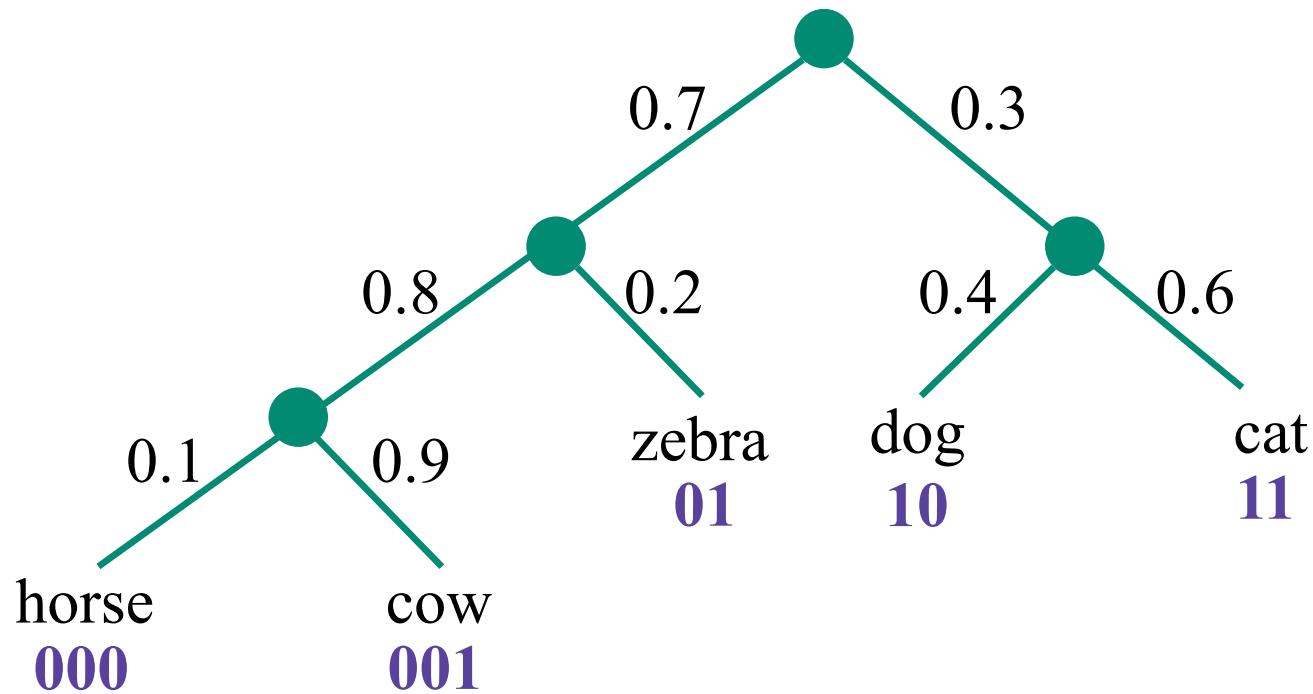
# Иерархический софтмакс

$$+ \begin{array}{l} 0.7 \cdot 0.8 \\ 0.7 \cdot 0.2 \\ 0.3 \cdot 0.4 \\ 0.3 \cdot 0.6 \end{array}$$



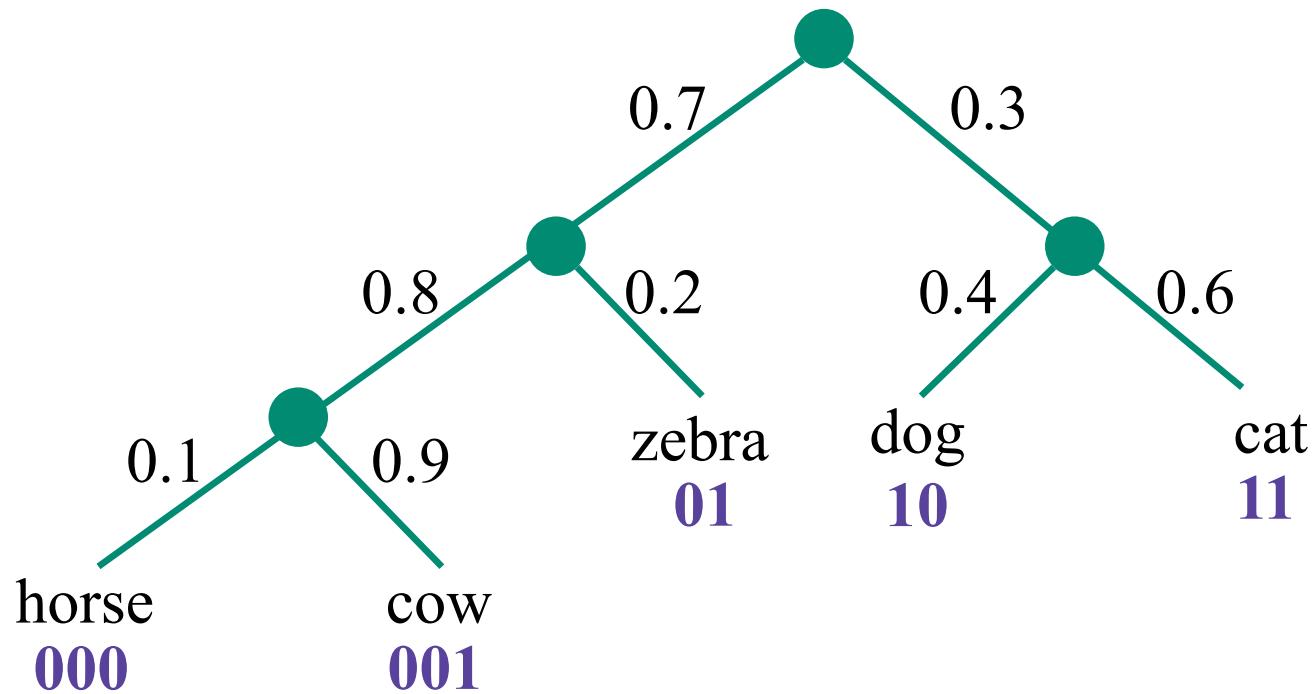
# Иерархический софтмакс

$$+ \begin{matrix} 0.7 \\ 0.3 \cdot 0.4 \\ 0.3 \cdot 0.6 \end{matrix}$$

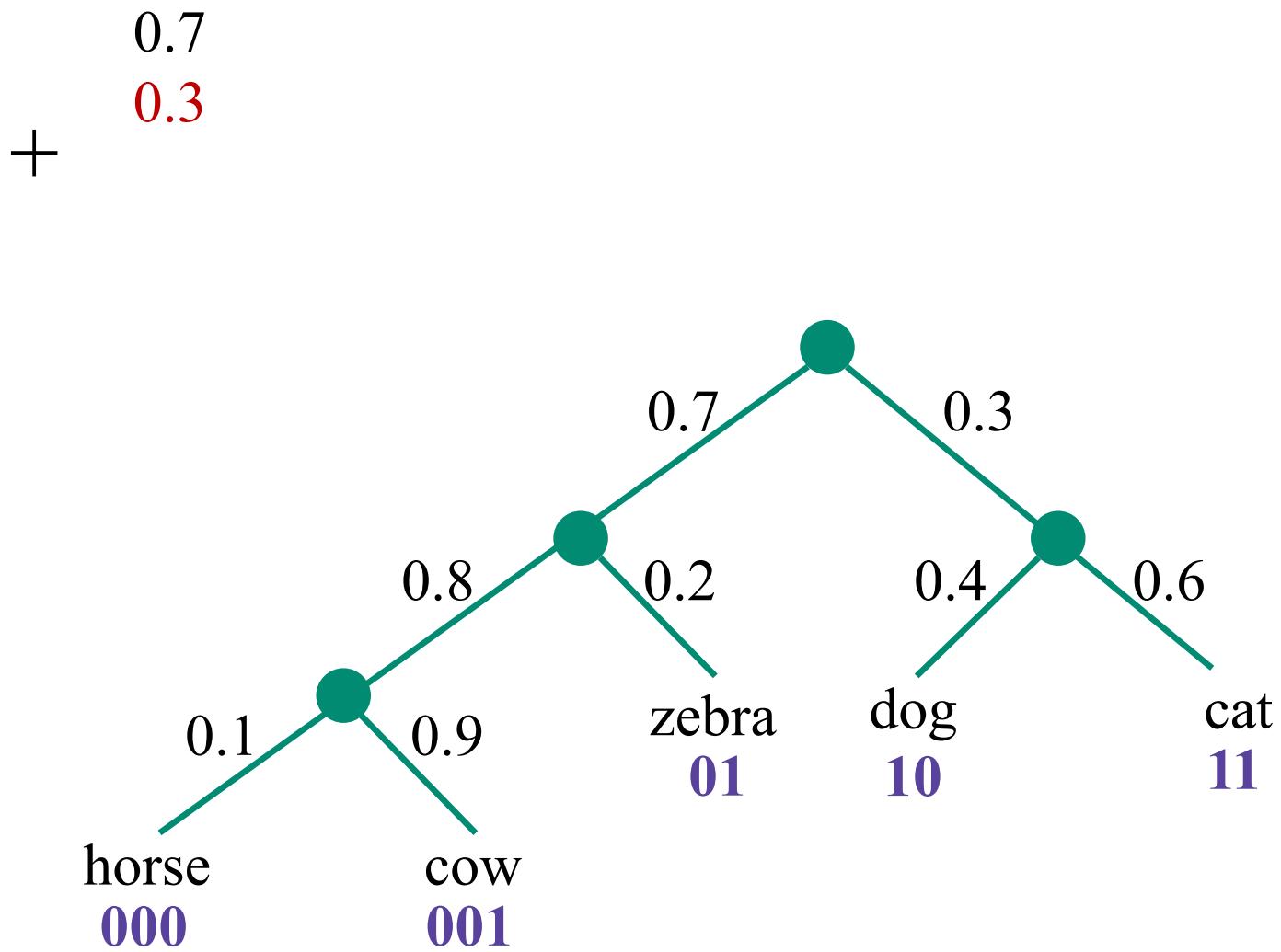


# Иерархический софтмакс

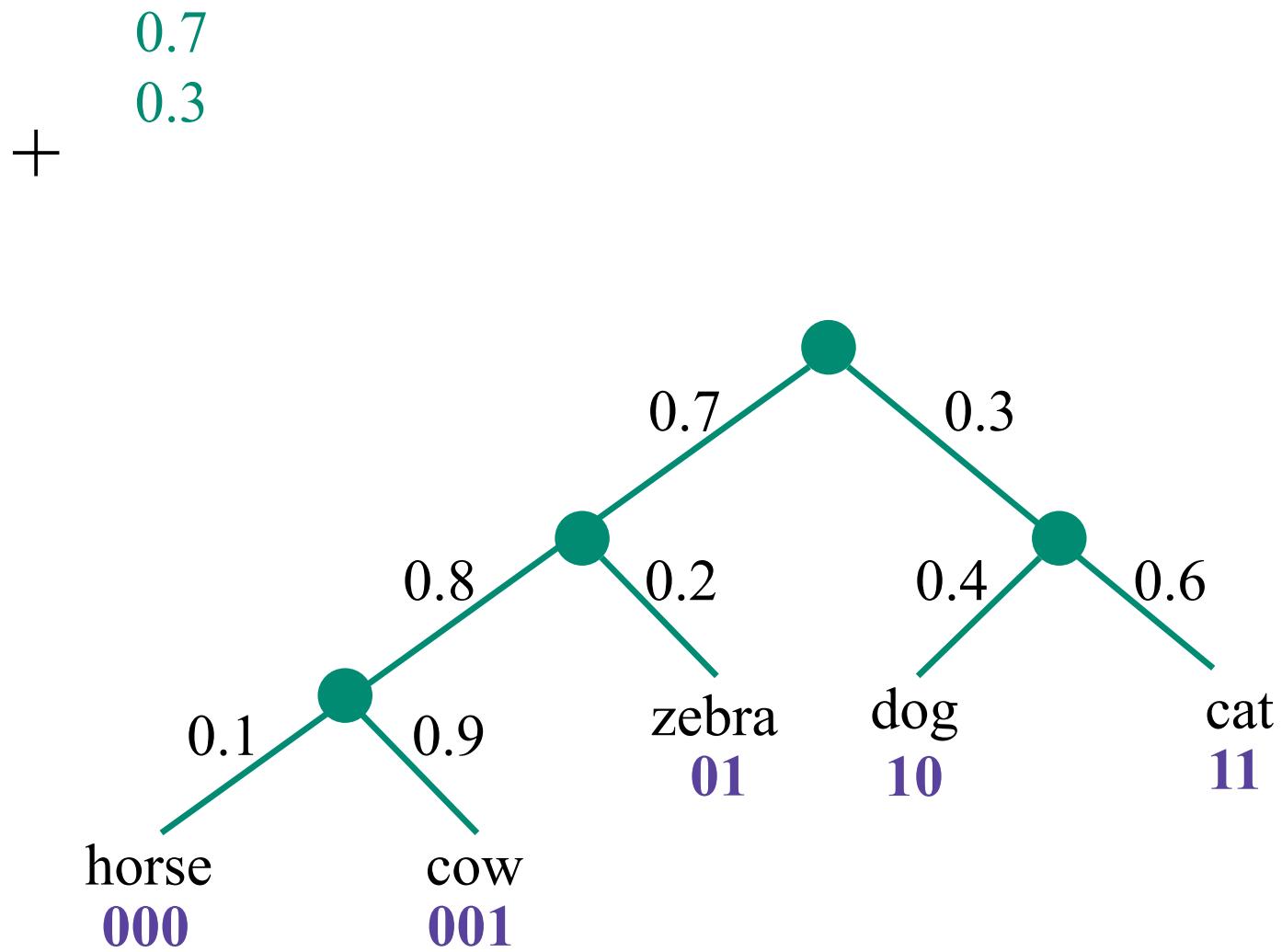
$$+ \begin{matrix} 0.7 \\ 0.3 \cdot 0.4 \\ 0.3 \cdot 0.6 \end{matrix}$$



# Иерархический софтмакс



# Иерархический софтмакс

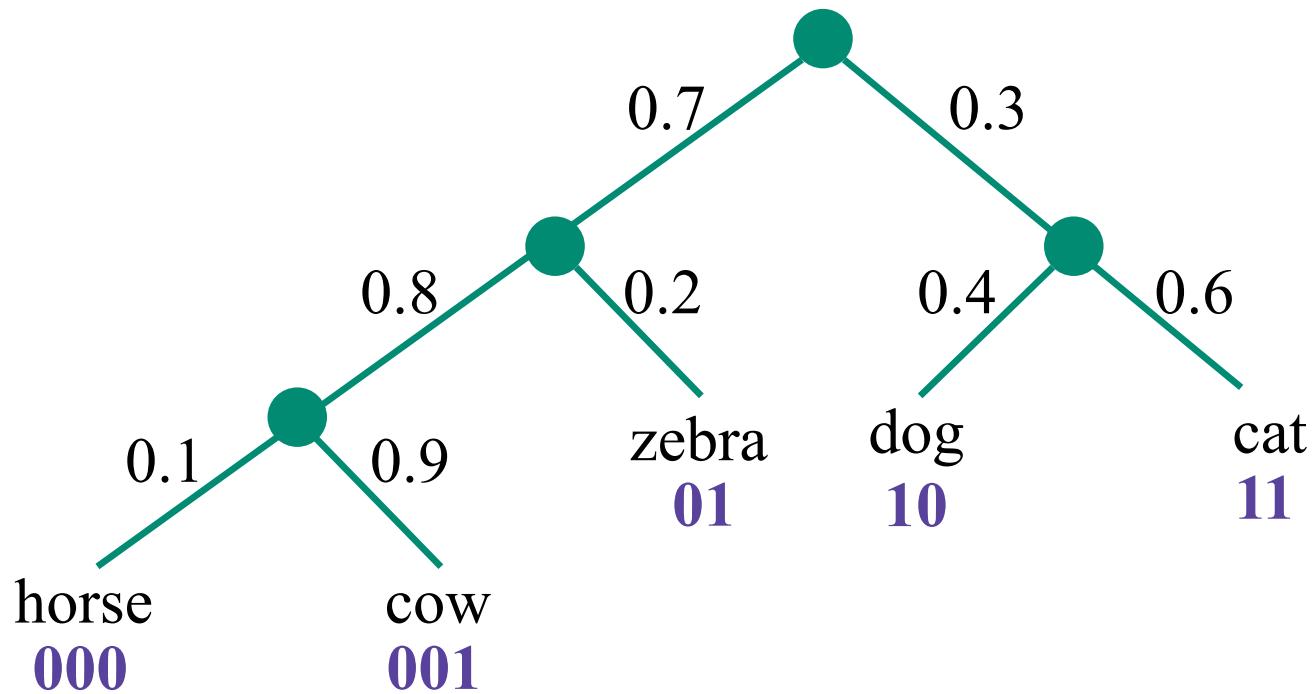


# Иерархический софтмакс

1.0

+

Congratulations!



# Иерархическая лог-билинейная модель (HLBL)

- LBL, но вместо софтмакса – иерархический софтмакс
- Вероятности бинарных решений вдоль пути дерева от корня до вершины слова:

$$p(w_n = w | w_1^{n-1}) = \prod_i p(d_i | w_1^{n-1})$$

Как строить дерево (сбалансированное или семантическое?)

- Используя готовую онтологию
- Используя кластеризацию данных
- Дерево Хаффмана
- Случайное