Тема II

Отношения и соответствия (II)

Разделы

Разделы

Разделы

Разделы

Разделы

Свойства соответствий между непустыми множествами

Для любых соответствий $\rho, \alpha, \beta \subseteq A \times B$ и $\sigma \subseteq B \times C$ и подмножеств $X, X_1, X_2 \subseteq A$, $Y \subseteq B$ справедливы соотношения:

$$\rho(A) = \operatorname{Im}\rho, \quad \rho^\sharp(B) = \operatorname{Dom}\rho;$$

$$X_1 \subseteq X_2 \Rightarrow \rho(X) \subseteq \rho(Y); \quad \alpha \subseteq \beta \Rightarrow \alpha(X) \subseteq \beta(X);$$

$$\alpha \subseteq \beta \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{Dom}\alpha \subseteq \operatorname{Dom}\beta \\ \operatorname{Im}\alpha \subseteq \operatorname{Im}\beta \end{cases};$$

$$\operatorname{Dom}\rho^\sharp = \operatorname{Im}\rho, \quad \operatorname{Im}\rho^\sharp = \operatorname{Dom}\rho;$$

$$\rho \subseteq \rho\rho^\sharp\rho.$$

Покажем, например, справедливость последнего соотношения: для произвольных $a \in A$ и $b \in B$ имеем

$$a\rho b = (a\rho b) \,\&\, (b\rho^\sharp a) \,\&\, (a\rho b) \Rightarrow a(\rho\rho^\sharp\rho)b.$$

Свойства соответствий между непустыми множествами...

$$\rho(X_1 \cup X_2) = \rho(X_1) \cup \rho(X_2), \quad \rho(X_1 \cap X_2) \subseteq \rho(X) \cap \rho(Y);$$
$$(\alpha \cup \beta)(X) = \alpha(X) \cup \beta(X), \quad (\alpha \cap \beta)(X) \subseteq \alpha(X) \cap \beta(X);$$
$$(\rho \diamond \sigma)(X) = \sigma(\rho(X));$$
$$\mathrm{Dom}\, \rho^\sharp = \mathrm{Im}\, \rho, \quad \mathrm{Im}\, \rho^\sharp = \mathrm{Dom}\, \rho;$$
$$\rho(X) = \rho(X \cap \mathrm{Dom}\, \rho), \quad \rho^\sharp(Y) = \rho^\sharp(Y \cap \mathrm{Im}\, \rho);$$
$$X \subseteq \mathrm{Dom}\, \rho \Leftrightarrow X \subseteq (\rho\rho^\sharp)(X), \quad Y \subseteq \mathrm{Im}\, \rho \Leftrightarrow Y \subseteq (\rho^\sharp\rho)(Y);$$
$$X \cap \rho^\sharp(Y) = \varnothing \Leftrightarrow Y \cap \rho(X) = \varnothing;$$
$$\mathrm{Dom}(\rho\sigma) = \rho^\sharp(\mathrm{Dom}\, \sigma), \quad \mathrm{Im}(\rho\sigma) = \sigma(\mathrm{Im}\, \rho).$$

Докажем последние два свойства: очевидно,
$$\mathrm{Dom}\, \sigma = \sigma^\sharp(C) \text{ и } \mathrm{Im}\, \rho = \rho(A).$$
и далее: $\mathrm{Dom}(\rho\sigma) = (\rho\sigma)^\sharp(C) = (\sigma^\sharp\rho^\sharp)(C) =$
$$= \rho^\sharp(\sigma^\sharp(C)) = \rho^\sharp(\mathrm{Dom}\, \sigma) \subseteq \mathrm{Dom}\, \rho;$$
$$\mathrm{Im}(\rho\sigma) = (\rho\sigma)(A) = \sigma(\rho(A)) = \sigma(\mathrm{Im}\, \rho) \subseteq \mathrm{Im}\, \sigma.$$

Соотношение Дедекинда. Вполне эффективные соответствия

Теорема (соотношение Дедекинда)

Если A, B *и* C *— три непустых множества и* $\alpha \subseteq A \times B$, $\beta \subseteq B \times C$, $\gamma \subseteq A \times C$, *то*

$$\alpha\beta \cap \gamma \subseteq (\alpha \cap \gamma\beta^{\sharp})(\beta \cap \alpha^{\sharp}\gamma)\,.$$

Соответствие $\rho \subseteq A \times B$ называют *вполне эффективным*, если $\mathrm{Dom}(\rho) = A$ и $\mathrm{Im}(\rho) = B$.

Формула для числа $f(m,n)$ вполне эффективных соответствий ($|A| = m \geqslant 2$, $|B| = n \geqslant 0$):

$$f(m,n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} \left(2^i - 1\right)^m .$$

Основные типы соответствий

Определение

Соответствие ρ между множествами A и B называется —

- *многозначным отображением* или *всюду определённым соответствием*, если $\triangle_A \subseteq \rho\rho^\sharp$
  (что эквивалентно $\mathrm{Dom}\,\rho = A$).
- *частичным отображением* A *в* B, если $\rho^\sharp\rho \subseteq \triangle_B$
  (что эквивалентно $a\rho b_1 \,\&\, a\rho b_2 \Rightarrow b_1 = b_2$ для $a \in A$).
- *функциональным* или *отображением* A *в* B, если
  $\triangle_A \subseteq \rho\rho^\sharp \,\&\, \rho^\sharp\rho \subseteq \triangle_B$
  (что эквивалентно существованию для любого $a \in A$ единственного $b \in B$ такого, что $a\rho b$).
  Отображение φ из A в B называют *функцией из* A *в* B или *операцией на* A.

Основные типы соответствий...

Определение (продолжение)

- *дифункциональным* или *квазиоднозначным* отображением, если $\rho\rho^\sharp\rho \subseteq \rho$ (или, по доказанному выше, $\rho\rho^\sharp\rho = \rho$).
Для соответствия $\rho \subseteq A \times B$ справедливо: если
  - образы или прообразы элементов либо совпадают, либо не не пересекаются, то ρ дифункционально;
  - ρ дифункционально, и образы, и прообразы элементов либо совпадают, либо не пересекаются.

В конечном случае $(0,1)$-матрица будет матрицей дифункционального отношения если и только если в прямоугольнике из двух строк и двух столбцов при том, что в трёх углах стоят 1, то и в четвёртом углу стоит 1.

Теорема Ка́льмар-Якубович

Теорема

Произвольное отношение толерантности $\simeq$ на множестве A может быть задано с помощью подходящего многозначного отображения φ из A на совокупность всевозможных классов толерантности как

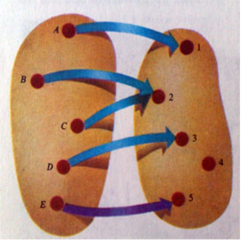
$$x \simeq y \;\Leftrightarrow\; \varphi(x) \cap \varphi(y) \neq \varnothing\,.$$

Разделы

Отображения: обозначения и булева алгебра функций

Обозначения для отображений:
$\varphi\colon A \to B$, $A \overset{\varphi}{\to} B$, $\varphi(a) = b$, $a \overset{\varphi}{\mapsto} b$,
$a\varphi = b$ и даже $a^{\varphi} = b$.

Множество всех отображений $A \to B$ будем обозначать $Fun\,(A, B)$ или B^A, при $A = B$ — $Fun\,(A)$.



Пусть $\mathfrak{B} = \langle\, A, \sqcup, \sqcap, {}', o, \iota \,\rangle$ — булева алгебра.
Множество $Fun(A^n, A)$ всех функций из A^n в A образует булеву алгебру $\langle\, F_n(A), +, \cdot, {}^{-}, \mathbf{0}, \mathbf{1} \,\rangle$, где операции и выделенные элементы заданы следующим образом:

$$(f+g)(a) = f(a) \sqcup g(a),\ (f \cdot g)(a) = f(a) \sqcap g(a),\ \overline{f}(a) = f\,'(a),$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{0}(a) \equiv o\,, \quad \mathbf{1} = \mathbf{1}(a) \equiv \iota \quad (\text{везде } a = (a_1, \ldots, a_n) \in A^n).$$

Применение к отображениям теоретико-множественных операций

Утверждение

Объединение [пересечение] двух отображений $\varphi \colon A \to B$ *и* $\psi : A \to B$ *является отображением, если и только если* $\varphi = \psi$.

Доказательство

Поскольку φ *и* ψ *— отображения из* A *в* B*, для каждого* $a \in A$ φ *и* ψ *содержат лишь по одной паре* (a, b_1) *и* (a, b_2) *соответственно, где* $b_1, b_2 \in B$*.*
Если предположить, что $b_1 \neq b_2$*, то* $\varphi \cup \psi$ *содержит две, а* $\varphi \cap \psi$ *— не содержит ни одной пары с первым элементом, равным* a*.*

Отрицание отображения, очевидно, отображением не является.
Таким образом, применение к отображениям обычных теоретико-множественные операций интереса не представляет.

Произведение отображений

Теорема

Если множества A, B и C непусты, φ — отображение из A в B, а ψ — отображение из B в C, то $\varphi\psi$ — отображение из A в C.

Доказательство

$$\begin{cases} \triangle_A \subseteq \varphi\varphi^\sharp, \ \varphi^\sharp\varphi \subseteq \triangle_B \\ \triangle_B \subseteq \psi\psi^\sharp, \ \psi^\sharp\psi \subseteq \triangle_C \end{cases} \Rightarrow \ \triangle_A \subseteq \varphi\varphi^\sharp =$$

$$= \varphi \triangle_B \varphi^\sharp \subseteq \varphi(\psi\psi^\sharp)\varphi^\sharp = (\varphi\psi)(\psi^\sharp\varphi^\sharp) = (\varphi\psi)(\varphi\psi)^\sharp,$$

Включение $(\varphi\psi)^\sharp(\varphi\psi) \subseteq \triangle_C$ показывается аналогично.

Произведение функций как отображений принято записывать как их композицию $*$: $(\varphi * \psi)(x) \stackrel{\text{def}}{=} (\varphi \diamond \psi)(x) = \psi(\varphi(x))$.

Виды отображений

Единичное отношение $\triangle_A$, рассматриваемое как отображение A на себя, называют *тождественным*. Для тождественного отображения будем употреблять обозначение id_A.

Определение

Отображение $\varphi\colon A \to B$ называется

- *вложением* или *инъективным отображением* A *в* B, если $\mathrm{id}_A = \varphi\varphi^\sharp$, символически $A \overset{\varphi}{\hookrightarrow} B$; при этом различные элементы A отображаются в различные элементы B.
  Если $A \subseteq B$, то вложение $A \overset{\varphi}{\hookrightarrow} B$ такое, что $\varphi(x) = x$, называется *естественным вложением* множества A в множество B .
  С инъекцией связан *принцип Дирихле*: *не существует инъекции множества с бо́льшим числом элементов во множество с меньшим числом элементов*.

Виды отображений...

Определение (продолжение)

- *наложением* или *сюръективным отображением* A *в* B, *сюръекцией*, если $\varphi^\sharp\varphi = \mathrm{id}_B$, т.е. каждый элемент множества B имеет свой прообраз.

  Отображения проектирования — сюръективные отображения $A_1 \times \ldots \times A_n \xrightarrow{\pi_i} A_i$, определяемые как $(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_k) \overset{\pi_i}{\mapsto} a_i$, $i = \overline{1, n}$.

- *биекцией* или *взаимно-однозначным отображением*, если $\mathrm{id}_A = \varphi\varphi^\sharp \;\&\; \varphi^\sharp\varphi = \mathrm{id}_B$, т.е. оно является одновременно и вложением, и наложением.
  Множество всех биекций из A в B обозначаем $Bij\,(A, B)$, а в случае $A = B$ — $Bij\,(A)$.

  $\varphi \in Bij\,(A)$ — *перестановка* A.

Обратные отображения и симметрическая группа

Псевдообратное к отображению $\varphi\colon A \to B$ соответствие $\varphi^{\sharp}$, может и не быть отображением из B в A.

Отображение $\psi : B \to A$ называется *обратным отображению* $\varphi\colon A \to B$, если $(\mathrm{id}_A = \varphi\psi) \mathbin{\&} (\psi\varphi = \mathrm{id}_B)$.

Ясно, что

- если φ — биекция, то однозначно определяемое псевдообратное к ней отношение $\varphi^{\sharp}$ является отображением и, более того, биекцией;
- этим случаем исчерпываются возможности отображения иметь обратное.

Для биекции, обратной к биекции φ естественно использовать обозначение φ^{-1}, а не $\varphi^{\sharp}$.

$Symm_A = \langle\, Bij\,(A), *, {}^{-1}, \mathrm{id}_A \,\rangle$ — *симметрическая группа* множества A.

Биекция и равномощность

Напомним, что множества называют *равномощными*, если между ними существует биективное отображение.

Покажем, например, что замкнутый интервал $[0, 1]$ равномощен открытому $(0, 1)$: положим

$$S = [0, 1] \setminus \{0, 1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots\}$$

и тогда

$$[0, 1] = \{0, 1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots\} \cup S,$$

$$(0, 1) = \{1/2, 1/3, 1/4, \dots\} \cup S.$$

Отображение $f : [0, 1] \to (0, 1)$, определённое как

$$f(x) = \begin{cases} 1/2, & \text{если } x = 0, \\ 1/(n+2), & \text{если } x = 1/n,\ n = 1, 2, \dots, \\ x, & \text{если } x \in S, \end{cases}$$

будет биекцией.

Теорема Кантора-Шрёдера-Бернштейна

Теорема

Если каждое из множеств A и B равномощно подмножеству другого, то A равномощно B.

Доказательство

Покажем, что если существуют биекции θ_1 между A и подмножеством B и θ_2 между B и подмножеством A, то существует биекция между A и B.
Обозначим $A_0 = A$ и $A_1 = \mathrm{Im}(\theta_2)$.
Ясно, можно считать, что

- $A_0 \supset A_1$ *и* $\mathrm{Im}(\theta_1) \subset B$,
- A *и* B *— бесконечные множества,*

— иначе теорема тривиально справедлива.

Теорема Кантора-Шрёдера-Бернштейна...

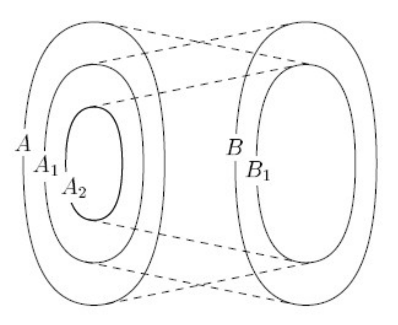
Доказательство (продолжение)

Композиция указанных отображений даёт взаимно-однозначное отображение $\theta = \theta_1 * \theta_2$ *множества* A_0 *на своё подмножество* A_2 *и* $A_1 \supset A_2$.
Обозначим $\theta(A_i) = A_{i+2}$, $i = 0, 1, 2 \ldots$.
Получим цепочку строго содержащихся друг в друге подмножеств A: $A = A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \ldots$.

Обозначим $C_i = A_i \setminus A_{i+1}$, $i = 0, 1, 2 \ldots$ *и* $C = \bigcap\limits_{i \geqslant 0} A_i$.

Теорема Кантора-Шрёдера-Бернштейна...

Доказательство (продолжение)



По построению между множествами $C_0, C_2, C_4, \ldots$ *существует* ***взаимно-однозначное соответствие*** θ*:*

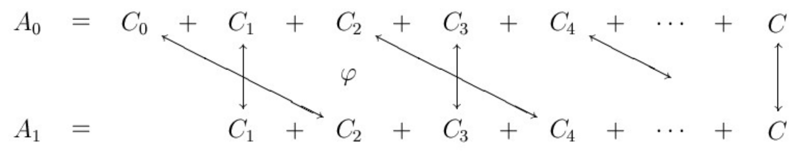
$$C_{2i+2} = \theta(A_{2i}) \setminus \theta(A_{2i+1}) = \theta(C_{2i}).$$

Теорема Кантора-Шрёдера-Бернштейна...

Доказательство (продолжение)

Построим взаимно-однозначное отображение $\varphi : A_0 \overset{1:1}{\longleftrightarrow} A_1$ —

$$\varphi(x) = \begin{cases} \theta(x), & \text{если } x \in C_{2i},\ i = 0,\ 1,\ \ldots \\ x, & \text{иначе} \end{cases}$$



Таким образом, имеем взаимно-однозначные соответствия

$A \xrightarrow{\varphi} A_1 \xrightarrow{\theta_2^{-1}} B$ *и* $\varphi * \theta_2^{-1}$ *— искомая биекция.*

Свойство преобразований конечных множеств

Теорема (свойство преобразования конечного множества)

Для преобразования конечного множества условия сюръективности, инъективности и биективности равносильны.

Доказательство

Для $\varphi \in Fun\,(A)$, $|A| = n$ граф $\Gamma = \overrightarrow{G}(\varphi)$ имеет n вершин и n дуг, причём из каждой вершины исходит ровно одна дуга.

- *φ сюръективно $\Rightarrow$ в каждую вершину Γ входит дуга $\Rightarrow$ φ — инъективно;*
- *в каждую вершину в каждую вершину Γ входит ровно одна дуга $\Rightarrow$ с каждой вершиной Γ связаны ровно по одной входящей и исходящей дуги $\Rightarrow$ φ — биективно;*
- *биективность отображения по определению влечёт сюръективность.*

Каноническое отображение

Если $\sim$ — эквивалентность на A, то существует функция $\pi : A \to A/{\sim}$, ставящая в соответствие каждому элементу $a \in A$ его класс эквивалентности, т.е. $\pi(a) = [a]_{\sim}$.

Такое отображение называется *естественным (каноническим, натуральным)*; символически — $nat(A, \sim)$ или $nat(\sim)$.

Пример

Было: если A — множество зёрен, насыпанных в мешки, и для зёрен a и b положить $a \sim b$, если они лежат в одном мешке, то классами эквивалентности являются множества зёрен, лежащих в одном мешке, а фактормножеством $A/\sim$ — множество мешков.

Тогда $\pi(a)$ — мешок, в котором лежит зерно a.

Ядро отображения

Пусть дано отображение $\varphi\colon A \to B$. Его *ядром* называется отношение $\operatorname{Ker}\varphi \in \mathcal{R}(A)$, заданное как

$$a_1(\operatorname{Ker}\varphi)a_2 \;\Leftrightarrow\; \varphi(a_1) = \varphi(a_2).$$

Ядро отображения есть частный случай понятия ядра соответствия и является *ядерной эквивалентностью*:

$$\operatorname{Ker}\varphi \;=\; \varphi\varphi^{\sharp}.$$

С ядерной эквивалентностью отображения φ из A связано фактормножество $A/\operatorname{Ker}\varphi$ и натуральное отображение $nat(A, \operatorname{Ker}\varphi)$, для которого $nat(A, \operatorname{Ker}\varphi)(x) \;=\; [x]_{\operatorname{Ker}\varphi}$.

Отображения $\varphi\colon A \to B$ и $nat(A, \operatorname{Ker}\varphi)$ имеют общую ядерную эквивалентность, но отображают A в разные множества: соответственно в B и в $A/\operatorname{Ker}\varphi$.

Коммутативные диаграммы

Если A, B, C, D — некоторые множества и

$$\alpha : A \to B, \quad \beta : B \to C, \quad \gamma : A \to C,$$
$$\delta : B \to D, \quad \varepsilon : C \to D,$$

то данные отображения наглядно задают в виде диаграмм:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "\gamma"'] & & B \arrow[dl, "\beta"] \\ & C & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\gamma"'] & B \arrow[d, "\delta"] \\ C \arrow[r, "\varepsilon"] & D \end{tikzcd}$$

Говорят, что эти диаграммы *коммутативны*, если $\gamma = \alpha\beta$ и $\alpha\delta = \gamma\varepsilon$ соответственно.
Аналогично определяется коммутативность и для более сложных диаграмм.
Биективные отображения будем обозначать на диаграммах двунаправленными стрелками $\leftrightarrow$.

Теорема о разложении отображений

Теорема

Если A, B *— непустые и* φ *— отображение из* A *в* B, *то*

$$\varphi = \pi * \varphi' * \mu, \qquad (*)$$

где $\pi = nat(\operatorname{Ker}\varphi)$, φ' *— биекция между* $A/\operatorname{Ker}\varphi$, *а* $\operatorname{Im}\varphi$ *и* μ *— вложение* $\operatorname{Im}\varphi$ *в* B.

Доказательство

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & B \\
A/\operatorname{Ker}\varphi \arrow[r, "\varphi'"] & \operatorname{Im}\varphi \arrow[u, "\mu"']
\end{tikzcd}$$

Утверждение теоремы будет справедливо в случае коммутативности диаграммы. Ясно, что $\operatorname{Im}\varphi$ *есть подмножество* B. *В качестве* μ *возьмём естественное вложение. По определению* $\operatorname{Ker}\varphi$ *отображение* $\varphi' : A/\operatorname{Ker}\varphi \to \operatorname{Im}\varphi$ *биективно, следовательно разложение* $(*)$ *будет справедливым, если в качестве* π *взять* $nat(\operatorname{Ker}\varphi)$.

Основное свойство отображений

Теорема

Пусть даны непустые множества A, B и отображение $\varphi\colon A \to B$. Тогда имеется единственное отображение $\psi : A/\operatorname{Ker}\varphi \to B$ являющееся вложением, и такое, что нижеследующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "nat\,(\operatorname{Ker}\varphi)"'] & & B \\ & A/\operatorname{Ker}\varphi \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

Доказательство

Положим $\psi = \varphi' * \mu$ *в* $(*)$. *Тогда* $\psi([a]_{\operatorname{Ker}\varphi}) = \varphi(a)$ — *однозначно определённое вложение* $\operatorname{Ker}\varphi$ *в* $B \Rightarrow \varphi = \pi * \psi$.

Очевидно ψ является биекцией при сюръективности φ.

Теорема о дробных эквивалентностях

Теорема

Пусть дано множество A и эквивалентности α, β на нём такие, что $\beta \subseteq \alpha$.
Тогда существуют отображение $\varphi\colon A/\beta \to A/\alpha$ и биекция $\psi : (A/\beta)/(\alpha/\beta) \to A/\alpha$ такие, что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl, "nat\,\beta"'] \arrow[dr, "nat\,\alpha"] & \\
A/\beta \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "nat\,(\alpha/\beta)"'] & & A/\alpha \\
 & (A/\beta)/(\alpha/\beta) \arrow[ur, "\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

коммутативна.

Теорема о дробных эквивалентностях: доказательство

Доказательство

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "nat\,\beta"'] \arrow[dr, "nat\,\alpha"] & \\ A/\beta \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "nat\,(\alpha/\beta)"'] & & A/\alpha \\ & (A/\beta)/(\alpha/\beta) \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

Зададим функцию $\varphi([a]_\beta) = [a]_\alpha$ *(задание корректно, т.к. каждому классу* $[a]_\beta$ *соответствует единственный класс* $[a]_\alpha$*) и применим теорему об основных свойствах отображений к нижней части диаграммы.*

Поскольку φ *есть накрытие, то*

$$\psi([[a]_\beta]_{\alpha/\beta}) = \varphi([a]_\beta) = [a]_\alpha \text{ — биекция.}$$