

# Задание 1 по курсу «Байесовский выбор моделей»

## Общая информация

- Время сдачи задания: 26е сентября, 16:00 по Москве;
- Максимальная базовая оценка за задание 50 баллов, так что при желании можно выполнять не всё;
- Оценка автора наилучшей работы удваивается (с учетом баллов сверх 50), но не более, чем до 125 баллов;
- Вопросы и само задание принимаются по почте: aduenko@phystech.edu;
- Тема письма: вопрос по заданию #1 или решение задания #1;
- Опоздание на неделю снижает оценку в 2 раза, опоздание на час на  $0.5^{1/(7 \cdot 24)} = 0.41\%$ ;
- Работы опоздавших не участвуют в конкурсе на лучшую работу;
- Задание не принимается после его разбора и / или после объявления об этом.

**Задача 1 (10 баллов).** Пусть проводится эксперимент по угадыванию стороны выпадания честной монеты. Известно, что оракул прав с вероятностью  $p_1 = 0.9$ , а обычный человек с вероятностью  $p_2 = 0.5$ . Известно, что человек  $P$  оказался прав во всех  $n = 10$  бросаниях. С какой вероятностью  $P$  является оракулом, если случайные человек оказывается оракулом с вероятностью  $10^{-4}$  (3 балла)? Пусть человек  $P$  выбран не случайно, а как лучший среди 100 человек по угадыванию  $k = 100$  выпадений монеты. Вывести новую априорную вероятность того, что  $P$  оракул с учётом его неслучайного выбора (7 баллов).

а) аналитически (приближенно) для случая  $k \gg 1$ ;

б) сэмплированием для значений  $k$  от 1 до 1000. Построить график для разных  $k$ .

**Задача 2 (10 баллов).** Пусть имеется НОР выборка  $\{x_1, \dots, x_n\}$  из неизвестного распределения с конечной плотностью. На уровне значимости  $\alpha = 0.05$  проверить гипотезу о том, что десятипроцентная квантиль этого распределения равна  $m_0 = 0$ .

**Задача 3 (25+10 баллов).** Пусть имеется выборка пар  $\mathbf{z}_i = (x_i, y_i)$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,

$$\mathbf{z}_i \sim N \left( \mathbf{z}_i | (0, 0)^\top, \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix} \right).$$

**Гипотеза  $H_0$  :**  $\rho = 0$

Для статистики  $T(\mathbf{Z}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i$  получить

а) распределение для разных значений  $\rho$  и нарисовать плотность для  $\rho = 0$  и  $\rho = 0.5$  для  $n = 100$  (2 балла);

б) построить критерий для проверки гипотезы  $\rho = 0$  на уровне значимости  $\alpha = 0.05$  (3 балла);

в) зависимость мощности данного критерия от истинного  $\rho$  сэмплированием (5 баллов) и приближенно аналитически (5 баллов), и предложить формулу (3 балла) зависимости мощности критерия от  $n$  и  $\rho$ .

Сравнить мощность (7 баллов) в зависимости от  $\rho$  со статистикой  $T(\mathbf{Z}) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2$ , рассмотренной на лекции.

Какую статистику вы предложили бы для использования на практике? (+10 баллов тому, кто предложит свою и аргументированно обоснует, что она лучше).

**Задача 4 (15 баллов).** Пусть  $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$ ,  $n = 12$  есть НОР выборка из  $N(0, 1)$ . Пусть  $\mathbf{y} = \{y_1, \dots, y_n\}$ ,  $n = 12$  есть НОР выборка из  $N(0, 1)$ , независимая от  $\{x_1, \dots, x_n\}$ .

Оценить (сэмплированием или приближенно аналитически), сколько разных (и независимых) выборок  $\mathbf{y}$  нужно рассмотреть  $K$ , чтобы найти ту, которая дает выборочную корреляцию с  $\mathbf{x}$  не менее  $\rho = 0.97$  (5 баллов). Построить график зависимости  $K(\rho)$  в диапазоне от 0 до 0.99 (5 баллов). Какой прикладной вывод можно сделать из этого эксперимента помимо известного «корреляция не означает причинность» (5 баллов)?

**Задача 5 (5 баллов).** Привести пример, когда наивный байесовский классификатор классифицирует объекты не лучше, чем наугад, хотя генеральная совокупность (все возможные объекты) идеально разделима?

**Задача 6 (15 баллов).** В условиях задачи 3 при  $n = 100$  сэмплировать  $m = 1000$  выборок пар  $\mathbf{z}_i$ ,  $i = 1, m$ , для 500 из которых  $\rho = 0$  и  $\rho = 0.2$  для оставшихся. С помощью одной из рассмотренных (или своей) статистик получить достигаемые уровни значимости  $p_1, \dots, p_m$ . Для уровня значимости  $\alpha = 0.05$  сравнить результаты применения отсутствия поправки на множественное тестирование, поправки Бонферрони и поправки Бенджамини-Хохберга в терминах получения ложных открытий (ложно отклоненные гипотезы) или пропуска таковых (ложно принятые гипотезы). Контролирует ли поправка Бенджамини-Хохберга FDR на уровне  $\alpha$  и почему? (8 баллов)

Рассмотреть отдельно 1000 выборок для  $\rho = 0$  и повторить эксперимент. сравнить результаты применения отсутствия поправки на множественное тестирование, поправки Бонферрони и поправки Бенджамини-Хохберга в терминах получения ложных открытий (ложно отклоненные гипотезы) или пропуска таковых (ложно принятые гипотезы). Контролирует ли поправка Бенджамини-Хохберга FDR на уровне  $\alpha$  и почему? (7 баллов)

**Задача 7 (10 баллов).** В условиях задачи 6 сэмплировать  $m = 1000$  выборок пар, но с  $\rho_m$ , зависящим от номера выборки. Провести те же исследования, что и в задаче 6.

$$\rho_1 = 0, \rho_i = \begin{cases} \rho_{i-1}, & \text{с вероятностью } 0.3, \\ 0.2 - \rho_{i-1}, & \text{с вероятностью } 0.7. \end{cases}$$