Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Факультет Вычислительной Математики и Кибернетики

Кафедра Математических Методов Прогнозирования

ДИПЛОМНАЯ РАБОТА СТУДЕНТА 517 ГРУППЫ

«Дизъюнктивные нормальные формы специального вида для функций с малым количеством нулей»

Выполнил:

студент 5 курса 517 группы

Кириллов Александр Николаевич

Научный руководитель:

д.ф-м.н., профессор

Дьяконов Александр Геннадьевич

Москва, 2013

Содержание

1 Введение

Во многих задачах, таких как построение алгоритмов распознавания, основанных на переборе конъюнкций или на выделении представительных наборов, встречается задача получения относительно простой дизъюнктивной нормальной формы (ДНФ) для функции с малым числом нулей вида

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \&_{i=1}^{k}(x_1^{\sigma_{i1}} \vee \ldots \vee x_n^{\sigma_{in}}), \quad \sigma \in \{0,1\}, \tag{1.1}$$

Основной целью данной работы является создание алгоритма, строящего как можно более короткую ДНФ таких функций. При этом важным условием является низкая вычислительная сложность алгоритма. Получение как можно более коротких ДНФ позволяет добиться повышения эффективности работы алгоритмов, использующих в своей работе дизъюнктивные нормальные формы функций.

Прямое построение сокращенной ДНФ методом Нельсона и последующее упрощение до тупиковой ДНФ является NP-полной задачей, поэтому такой подход можно применить лишь для функций с крайне малым числом нулей. Доступные на данный момент вычислительные мощности не позволяют получить кратчайшую ДНФ для функций с $k \geq 5$ нулями.

Впервые методы, позволяющие строить достаточно простые ДНФ не прямым перемножением скобок в формуле (1.1), а применением алгоритмов, трудоемкость которых относительно невысока, были предложены в работах [8, 7]. Метод, предложенный в работе [8], имеет высокую сложность реализации, при больших k, что ограничивает возможности применения подобной техники.

В данной работе производится построение явной формулы для ДНФ функций специального вида, которая допускает эффективную реализацию. Доказана корректность и тупиковость полученной ДНФ. Результирующая формула является рекордной по количеству элементарных коньюнкций, содержащихся в ней. Получено наилучшее из известных приближений к кратчайшей ДНФ функций специального вида.

2 Определения и обозначения

Множество булевых функций, зависящих от n переменных и имеющих ровно k ненулевых точек, обозначим как P_k^n. Считается, что функция $f \in P_k^n$ задана матрицей нулей $M_f = \|a_i^j\|_{k\times n}$, строки которой $\tilde{\alpha}^i \in \overline{N_f}$ ($|\overline{N_f}| = k$), $\overline{N_f}$ — множество нулей функции f. $\tilde{\alpha}_j = (a_j^1, \ldots, a_j^k)$ — столбцы матрицы M_f.

Поскольку переменные, сопоставленные нулевым и единичным столбцам M_f, в соответствующих степенях являются конъюнкциями ранга 1, ядровыми [9] для f, а преобразования

$$x_i \to x_{j(i)}^{\sigma_i}, \quad i \to j(i) \text{ — подстановка}, \quad \sigma_i \in \{0,1\}, \quad i \in \{1,2,\ldots,n\}, \tag{2.1}$$

оставляют инвариантным все свойства булевых функций, связанные с задачами минимизации, то без ограничения общности можно считать следующее:

1. В M_f отсутствуют нулевые и единичные столбцы;
2. Одинаковые столбцы в M_f расположены последовательно;
3. Из любых двух двойственных столбцов (один из которых является отрицанием другого) в M_f присутствует не более одного столбца.

Далее считается, что группы одинаковых столбцов M_f занумерованы последовательно, а переменные, соответствующие столбцам q-й группы, $q \in \{1,2,\ldots,l\}$, $\lceil \log_2 k \rceil \leq l \leq 2^{k-1} - 1$, обозначаются через

$$x_{qj(q)}, \quad j(q) \in \{1,2,\ldots,n_q\}, \quad \sum_{q=1}^{l} n_q = n. \tag{2.2}$$

Следуя [8], сопоставим функции $f \in P_k^n$ функцию $\varphi \in P_k^l$, зависящую от переменных $z_1, \ldots, z_l$. Матрица нулей M_φ составлена из всех различных столбцов M_f так, что столбец, соответствующий переменной z_q, совпадает со столбцами, соответствующими переменным $x_{qj(q)}, q \in \{1,2,\ldots,l\}$.

Как следствие теоремы 3 из [8] можно получить следующую

Лемма 1. *Функция $f \in P_k^n$ может быть реализована ДНФ D_f, причем её длина*

$$|D_f| \leq n - l + \left\lfloor \frac{1}{4}k^2 \right\rfloor + |D_\varphi|,$$

где $|D_\varphi|$ *— длина ДНФ функции* φ*, сопоставленной с* f*,* $\lceil \log_2 k \rceil \le l \le 2^{k-1} - 1$*.* D_f *строится непосредственно по* D_φ *[8].*

Определение 1. *Функция* $g \in P_k^l$ *называется приведенной, если матрица* M_g *её нулевых точек состоит из различных столбцов, исключая нулевой и единичный, причем из каждых двух двойственных столбцов в* M_g *содержится ровно один.*

Заметим, что функция φ, сопоставленная с f, является приведенной.

Определение 2. *Функция* $g \in P_k^l$ *называется полной, если она является приведённой, и матрица* M_g *её нулевых точек состоит из всех* $2^{k-1}-1$ *различных столбцов.*

Для функций, которым сопоставлены полные, оценку Леммы 1 можно уточнить следующим образом:

Лемма 2. *Для почти всех функций* $f \in P_k^n$ *может быть реализована ДНФ* D_f *длины*

$$|D_f| \le n - 2^{k-1} + 1 + |D_\varphi|,$$

где $|D_\varphi|$ *— длина дизъюнктивной нормальной формы полной функции* φ*, сопоставленной с* f*,* $k \le log_2 n - log_2 log_2 n + 1$*.* D_f *строится непосредственно по* D_φ *[8].*

Таким образом, при реальном построении ДНФ функции с малым числом нулей достаточно уметь строить ДНФ приведенных функций. Далее, если не оговорено противное, предполагается, что f — приведенная функция.

3 Обзор литературы

В [8] предложен алгоритм, который при $k < \log_2 n - \psi(n), \psi(n) \to \infty, n \to \infty$, для любой функции из P_k^n строит ДНФ длинны d, $d \le n(1 + o(1))$. Однако такой алгоритм имеет крайне сложную практическую реализацию для больших k.

Алгоритм, предложенный в [7], основан на идее аппроксимации функции φ простой ДНФ D_0 специального вида: так, чтобы выполнялось вложение $N_{D_0} \subseteq N_\varphi$ (N_φ — множество единиц функции φ). После этого достраивается покрытие относительного небольшого множества $\widehat{N_\varphi} = N_\varphi \backslash N_{D_0}$. Предложенный алгоритм не эффективен, поскольку для почти всех функций он строит ДНФ гораздо более длинную, чем сокращенная ДНФ функции φ.

Несмотря на неэффективность аппроксимационного алгоритма для почти всех функций $f \in P_k^n$, этот алгоритм строит простые ДНФ для некоторых важных специальных классов функций из P_k^n. Алгоритм строит кратчайшие ДНФ $|D_f| =$ для функций $f \in P_k^n$, столбцы матрицы нулей M_f которых принадлежат одной цепи, например

$$M_f = \left\| \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right\|$$

Также, для функций, матрица нулей которых выглядит следующим образом

$$M_f = \left\| \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right\|$$

Аппроксимационный алгоритм строит кратчайшую ДНФ.

В [2] вводится новый аппарат для доказательства, использующий понятия околонулевых точек. Обозначим через $\tilde{\theta}(i,j) = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ точку булевого куба такую, что $\theta_t = \alpha_t^i$ для всех $t \in \{1, 2, \dots, n\} \backslash \{j\}$ и $\theta_j = 1 - \alpha_j^i$. Напомним, что α_j^i — элементы матрицы нулей M_f.

Определение 3. *Множество*

$$\bigcup_{i=1}^{k} \bigcup_{j=1}^{n} \{\tilde{\theta}(i,j)\} \backslash \overline{N_f}$$

назовем множеством околонулевых точек.

Лемма 3. *Для всех элементарных конъюнкций* $K \in D_f^{сокр}$ *(*$D_f^{сокр}$ *— сокращенная ДНФ функции* f*) и всех* $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ *справедливо*

$$\left| N_k \cap \bigcup_{j=1}^{n} \{\tilde{\theta}(i, j)\} \right| \leq 1$$

Пусть приведенная функция $f \in P_k^n$ задана матрицей нулей $M_f = \|\alpha_j^i\|_{k \times n}$. Далее будем предполагать, что столбцу $\widetilde{\alpha}_j$ соответствует переменная $x_{z(j)}$, где $z(j) = \sum_{i=1}^{k}(2^{i-1}\alpha_j^i)$. Заметим, что при этом различным столбцам матрицы M_f будут соответствовать разные переменные. Пусть также переменной $x_t, t \in \{z(1), \ldots, z(n)\}$, соответствует столбец $\widetilde{\alpha}_{y(t)}$.

Введем обозначения $E(t) = \{i | \alpha_{y(t)}^i = 1\}, Z(t) = \{i | \alpha_{y(t)}^i = 0\}$. $E(t)$ $(Z(t))$ — множество строк, в которых у переменной t стоит ноль (единица). Очевидно, что $E(t) = \{1, \ldots, k\} \backslash Z(t)$.

В дальнейшем понадобятся следующие обозначения – пусть $H = \{2^{i-1} | i \in \{0, \ldots, k-1\}\}, N = \cup_{j=1}^{n}\{z(j)\}$. $V = N \backslash H$.

С использованием результатов [8], [7] в [2] удалось построить явную формулу ДНФ D^γ для функции $f \in P_k^n$, матрица нулей M_f которой содержит единичную подматрицу размера $k \times k$. Для удобства записи здесь и далее мы будем обозначать ДНФ как множество входящих в неё элементарных конъюнкции. Для получения стандартной формы ДНФ следует выполнить операцию дизъюнкции для всех элементарных конъюнкции множества.

$$D^\gamma = \bigcup_{t \in V} \left\{ x_t \& \bigwedge_{i \in E(t)} \overline{x}_{2^{i-1}}, \overline{x}_t \& \bigwedge_{i \in Z(t)} \overline{x}_{2^{i-1}} \right\} \cup \bigcup_{1 \leq i < j \leq k} x_{2^{i-1}} x_{2^{j-1}}$$

Очевидным преимуществом алгоритма является то, что ДНФ сразу же выписывается по матрице нулей. Таким образом ДНФ может быть быстро построена для сколь угодно большого числа переменных. Длина ДНФ D^γ в точности равна $2n + \frac{k^2-5k}{2}$.

В работе [2] приводится также усовершенствование ДНФ D^γ — D^Γ. При этом используется понятие цепи.

Весом булевого вектора $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{E}^n$ называется $\|\widetilde{\alpha}\| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$. Цепью называется такой набор булевых векторов $(\widetilde{\alpha}_1, \ldots, \widetilde{\alpha}_m)$, что $\widetilde{\alpha}_i < \widetilde{\alpha}_{i+1}, \|\widetilde{\alpha}_i\| + 1 = \|\widetilde{\alpha}_{i+1}\|$, где $i = 1, \ldots, m-1$.

$$D^\Gamma = D_1^\Gamma \cup D_2^\Gamma$$

$$D_1^\Gamma = \bigcup_{1 \le i < j \le k} x_{2^{i-1}} x_{2^{j-1}}$$

$$D_2^\Gamma = \bigcup_{i=1}^{q} \left[\bigcup_{j=1}^{\beta(i)-1} \{\overline{x}_{b_j^i} \overline{x}_{b_{j+1}^i - b_j^i} x_{b_{j+1}^i}\} \cup \left\{ x_{b_1^i} \& \bigwedge_{i \in E(b_1^i)} \overline{x}_{2^{j-1}} \right\} \cup \left\{ \overline{x}_{b_{\beta(i)}^i} \& \bigwedge_{i \in E(b_{\beta(i)}^i)} \overline{x}_{2^{j-1}} \right\} \right]$$

$\tilde{b}^i = (b_1^i, \ldots, b_{\beta(i)}^i)$ — цепь из столбцов матрицы ненулевых элементов функции. D^Γ аналогично реализует ДНФ функций $f \in P_k^n$, матрица нулей M_f которой содержит единичную подматрицу размера $k \times k$.

$$\|D^\Gamma\| = n + \frac{k^2 - 3k}{2} + q,$$

где q — число цепей, на которые можно разбить матрицу нулей функции f. Тем самым, чем меньше цепей в разбиении, тем лучше. Заметим, что если каждый столбец принять за цепь, то D^Γ сведется к D^γ. Таким образом, с использованием D^Γ можно построить ДНФ короче, и для наименьшего варианта ДНФ требуется решить задачу оптимального разбиения столбцов матрицы нулевых точек функции на наименьшее число цепей.

В случае полной функции доказано, см. [1], что куб $\mathbb{E}^{k-1}$, а значит и его подмножество, можно разбить на $q = C_{k-1}^{\left\lceil \frac{k-1}{2} \right\rceil}$ цепей. Таким образом длина ДНФ D_Γ для полной функции равна

$$\|D_\Gamma\| = n + \frac{k^2 - 3k}{2} + C_{k-1}^{\left\lceil \frac{k-1}{2} \right\rceil}$$

В статьях [8, 7, 2] рассматриваются полные функции и построение простых ДНФ для такого класса функций. Это вызвано тем, что для реализации других функций достаточно лишь провести редукцию переменных в полной функции с таким же количеством нулей. Также существует гипотеза, что кратчайшая ДНФ для полной функции является самой сложной среди всех приведенных функций с фиксированным числом нулей.

Основной целью работы является построение ДНФ, состоящей из как можно меньшего числа элементарных конъюнкций, то есть попытка приблизиться к кратчайшей ДНФ функции. В работах Ю.В. Максимова [4, 3, 5] рассматривается вопрос минимизации ДНФ функции с точки зрения количества входящий в ДНФ литералов, то есть приближение к минимальной ДНФ функции. В статье [3] доказана нижняя оценка для количества литералов в ДНФ функций с малым количеством нулей, при этом показано, что с точки зрения количества литералов полная функция не является наиболее сложной.

4 Результаты

Основной целью дипломной работы является получение явной формулы как можно меньшей длины с точки зрения количества элементарных конъюнкций для ДНФ полной функции $f \in P_k^n$.

Разобьем $\Psi = \mathbb{E}^{k-1} \backslash \mathbb{E}_0^{k-1} \backslash \mathbb{E}_1^{k-1} \backslash \mathbb{E}_{k-1}^{k-1}$ на цепи, используя алгоритм, изложенный в [6]. Согласно данному алгоритму, Ψ можно разбить на $C_{k-1}^{\lceil \frac{k-1}{2} \rceil}$ цепей, причем существует цепь длины $k-3$. Обозначим цепи следующим образом: $V = \bigcup\limits_{i=1}^{q} B^i \cup B^0, B^i \cap B^j = \varnothing, i \neq j, i, j \in \{0, 1, \ldots, q\}, \mid B^i \mid = \beta(i) \geq 1, \beta(0) = k-3, B^i = (b_1^i, \ldots, b_{\beta(i)}^i)$.

Рассмотрим ДНФ:

$$D = D_1 \cup D_2$$

$$D_1 = \&_{i \in E(b_1^0)} x_{2^{i-1}} \cup \bigcup_{i \in E(b_1^0)} x_{2^{i-1}} \overline{x}_{b_1^0} \cup \bigcup_{j=2}^{\beta(0)} \Big[x_{b_{j-1}^0} \overline{x}_{b_j^0} \cup x_{b_j^0 - b_{j-1}^0} x_{b_{j-1}^0} \cup x_{b_j^0 - b_{j-1}^0} \overline{x}_{b_j^0} \Big] \cup$$
$$\cup \&_{i \in Z(b_{\beta(0)}^0)} x_{2^{i-1}} \cup \bigcup_{i \in Z(b_{\beta(0)}^0)} x_{2^{i-1}} x_{b_{\beta(0)}^0}$$

$$D_2 = \bigcup_{i=1}^{q} \left[\bigcup_{j=1}^{\beta(i)-1} \{ \overline{x}_{b_j^i} \overline{x}_{b_{j+1}^i - b_j^i} x_{b_{j+1}^i} \} \cup \left\{ x_{b_1^i} \& \&_{i \in E(b_1^i)} \overline{x}_{2^{j-1}} \right\} \cup \left\{ \overline{x}_{b_{\beta(i)}^i} \& \&_{i \in Z(b_{\beta(i)}^i)} \overline{x}_{2^{j-1}} \right\} \right]$$

Теорема 1. *ДНФ D реализует функцию f.*

Доказательство. Возьмем произвольный $\widetilde{\alpha} = (\alpha_{y(1)}, \ldots, \alpha_{y(n)}) \in \mathbb{E}^n$. Если $\alpha_{y(t)} = 0, \forall t \in H$, то $\widetilde{\alpha} \in N_D$. Действительно, пусть $\widetilde{\alpha} \notin N_D$: рассмотрим произвольное $B = (b_1, \ldots, b_c) \in \{B^1, \ldots, B^q\}$. Если $\alpha_{y(b_1)} = 1$, то $K(\widetilde{\alpha}) = 1$, где

$$K = x_{b_1} \& \&_{i \in E(b_1)} \overline{x}_{2^{i-1}} \in D,$$

следовательно $\alpha_{y(b_1)} = 0$ (из предположения $\widetilde{\alpha} \notin N_D$). По индукции доказывается, что $\alpha_{y(t)} = 0$ для всех $t \in B$. Таким образом $\alpha_{y(b_c)} = 0$, но тогда $K(\widetilde{\alpha}) = 1$, где

$$K = \overline{x}_{b_c} \& \bigwedge_{i \in Z(b_c)} \overline{x}_{2^{i-1}} \in D.$$

Получили противоречие с предположением, $\widetilde{\alpha} \notin N_D$.

Если же $\exists t, s \in H : t \neq s, \alpha_{y(t)} = \alpha_{y(s)} = 1$, то $\widetilde{\alpha} \in N_D$. Предположим, что $\widetilde{\alpha} \notin N_D$. Так как B^0 – максимальная цепь в $\mathbb{E}^{k-1} \backslash \mathbb{E}_0^{k-1} \backslash \mathbb{E}_1^{k-1} \backslash \mathbb{E}_{k-1}^{k-1}$, то $\{2^{i-1} | i \in E(b_1^0)\} \bigcup \{b_{j-1}^0 - b_j^0 | j \in \{2, \ldots, \beta(0)\}\} \bigcup \{2^{i-1} | i \in Z(b_{\beta(0)}^0)\} = H$.

Пусть $t \in \{2^{i-1} | i \in E(b_1^0)\}$, тогда, если $\alpha_{y(z)} = 1, z \in \{2^{i-1} | i \in E(b_1^0)\} \backslash \{t\}$, то $K(\widetilde{\alpha}) = \bigwedge_{i \in E(b_1^0)} x_{2^{i-1}} = 1$, так как $|E(b_1^0)| = 2$, следовательно $\alpha_{y(z)} = 0$ (из предположения $\widetilde{\alpha} \notin N_D$). $\alpha_{b_1^0} = 1$, так как, иначе $K(\widetilde{\alpha}) = x_t \overline{x}_{b_0^1} = 1$. Если $\alpha_{y(b_1^0)} = 1$, то $\alpha_{y(b_2^0)} = 1$, так как, иначе $K(\widetilde{\alpha}) = x_{b_1^0} \overline{x}_{b_0^1} = 1$. По индукции можно показать, что $\alpha_{y(b_j^0)} = 1, j \in \{1, \ldots, \beta(0)\}$, так как в D входят элементарные конъюнкции вида $K(\widetilde{\alpha}) = x_{b_{j-1}^0} \overline{x}_{b_j^1}, j \in \{2, \ldots, \beta(0)\}$. В ДНФ входят конъюнкции вида $x_{b_j^0 - b_{j-1}^0} x_{b_{j-1}^0}, j \in \{1, \ldots, \beta(0)\}$, так как $\alpha_{y(b_{j-1}^0)} = 1$, следовательно (из предположения $\widetilde{\alpha} \notin N_D$) $\alpha_{b_j^0 - b_{j-1}^0} = 0, j \in \{2, \ldots, \beta(0)\}$. $\{\alpha_{y(2^{i-1})} | i \in Z(b_{\beta(0)}^0)\} = 0$, так как в противном случае конъюнкции из $\bigcup_{i \in Z(b_{\beta(0)}^0)} x_{2^{i-1}} x_{b_{\beta(0)}^0}$ будут обращены в единицу. Таким образом мы получили, что $\alpha_{y(s)} = 0, s \in H \backslash t$, что противоречит изначальной постановке $\exists t, s \in H : \alpha_{y(t)} = \alpha_{y(s)} = 1$, следовательно, $\widetilde{\alpha} \in N_D$.

Пусть $t \in \{b_{j-1}^0 - b_j^0 | j \in \{2, \ldots, \beta(0)\}\}$, то есть $t = b_{z-1}^0 - b_z^0, z \in \{2, \ldots, \beta(0)\}$, тогда $\alpha_{b_{z-1}^0} = 0$, так как иначе $K(\widetilde{\alpha}) = x_{b_{z-1}^0 - b_z^0} x_{b_{z-1}^0} = 1$, по индукции можно показать что $\alpha_{y(b_j^0)} = 0, j \in \{1, \ldots, z-1\}$, ведь в D входят элементарные конъюнкции $x_{b_{j-1}^0} \overline{x}_{b_j^1}, j \in \{1, \ldots, \beta(0)\}$. Аналогично, $\alpha_{y(b_j^0)} = 1, j \in \{z, \ldots, \beta(0)\}$. Отсюда $\{\alpha_{y(2^{i-1})} | i \in E(b_1^0)\} = 0$, так как в D входят э.к. $\bigcup_{i \in E(b_1^0)} x_{2^{i-1}} \overline{x}_{b_1^0}$. $\alpha_{y(b_{j-1}^0 - b_j^0)} = 0, j \in \{2, \ldots, z-1\}$, из-за э.к. $x_{b_j^0 - b_{j-1}^0} \overline{x}_{b_j^0}, j \in \{2, \ldots, z-1\}$. $\alpha_{y(b_{j-1}^0 - b_j^0)} = 1, j \in \{z, \ldots, \beta(0)\}$, из-за э.к. $x_{b_j^0 - b_{j-1}^0} x_{b_{j-1}^0}, j \in \{z, \ldots, \beta(0)\}$. $\{\alpha_{y(2^{i-1})} | i \in Z(b_1^0)\} = 0$, так как в D входят э.к. $\bigcup_{i \in Z(b_{\beta(0)}^0)} x_{2^{i-1}} x_{b_{\beta(0)}^0}$. Таким образом мы получили, что $\alpha_{y(s)} = 0, s \in H \backslash t$, что противоречит изначальной постановке $\exists t, s \in H : \alpha_{y(t)} = \alpha_{y(s)} = 1$, следовательно $\widetilde{\alpha} \in N_D$.

Пусть $t \in \{2^{i-1} | i \in Z(b_{\beta(0)}^0)\}$. Повторим рассуждения для $t \in \{2^{i-1} | i \in E(b_1^0)\}$, за исключением того, что в этом случае $\alpha_{y(b_j^0)} = 0, j \in \{1, \ldots, \beta(0)\}$, так как проход индукции будет запущен в другую сторону. Таким образом мы получили, что $\alpha_{y(s)} =$

$0, s \in H\backslash t$, что противоречит изначальной постановке $\exists t, s \in H : \alpha_{y(t)} = \alpha_{y(s)} = 1$, следовательно $\widetilde{\alpha} \in N_D$.

Выше разобраны все случаи, когда $\exists t, s \in H : \alpha_{y(t)} = \alpha_{y(s)} = 1$ и показано, что для всех таких наборов $\widetilde{\alpha} \in N_D$.

Рассмотрим теперь случай $\exists t \in H : \alpha_{y(t)} = 1$, где $t = 2^{p-1}$ и $\alpha_{y(s)} = 0, s \in H\backslash t$. В таком случае выше было показано, что для того, чтобы $\widetilde{\alpha} \notin N_D$: если $t \in \{2^{i-1} | i \in E(b_1^0)\}$, то $\alpha_{y(b_j^0)} = 1, j \in \{1, \dots, \beta(0)\}$, если $t = b_{z+1}^0 - b_z^0, z \in \{1, \dots, \beta(0)\}$, то $\alpha_{y(b_j^0)} = 0, j \in \{1, \dots, z-1\}$, а $\alpha_{y(b_j^0)} = 1, j \in \{z, \dots, \beta(0)\}$, если $t \in \{2^{i-1} | i \in Z(b_{beta(0)}^0)\}$, то $\alpha_{y(b_j^0)} = 0, j \in \{1, \dots, \beta(0)\}$. Таким образом при $t = 2^{i-1} \in H$ получаем $\alpha_{y(b_j^0)} = \alpha^i_{y(b_j^0)}, j = \{1, \dots, \beta(0)\}$.

Возьмем произвольную цепь $B = \{b_1, \dots, b_c\} \in \{B^1, \dots, B^q\}, |B| = c$. Если $p \in Z(b_1)$, тогда для того, чтобы $K(\widetilde{\alpha}) = x_{b_1} \& \bigwith_{i \in E(b_1)} \overline{x}_{2^{i-1}}$ была равна 0, необходимо, чтобы $\alpha_{y(b_1)} = 0$. По индукции легко показать, что для выполнения предположения $\widetilde{\alpha} \notin N_D$ необходимо чтобы $\alpha_{y(b)} = 0$ для всех $b \in B : p \in Z(b)$. Действительно, пусть $\alpha_{y(b_j)} = 0$ и $p \in Z(b_{j+1}) \subset Z(b_j)$ из этого следует, что $\alpha_{b_{j+1} - b_j} = 0$. $K(\widetilde{\alpha}) = \overline{x}_{b_j} \overline{x}_{b_{j+1} - b_j} x_{b_{j+1}} \in D$ равно 0 только при условии того, что $\alpha_{b_{j+1}} = 0$. Учитывая, что $Z(b_{j+1}) \subset Z(b_j)$ для всех $j \in \{1, \dots, c-1\}$, получаем, что если $\widetilde{\alpha} \notin N_D$, то

$$\alpha_{y(b)} = 0 \quad \forall b \in B : p \in Z(b). \tag{4.1}$$

Аналогично, можно получить

$$\alpha_{y(b)} = 1 \quad \forall b \in B : p \in E(b). \tag{4.2}$$

Объединяя (4.1) и (4.2), получаем, что $\alpha_{y(b)} = \alpha^p_{y(b)}$ для всех $b \in B$. Проведя аналогичные рассуждения для всех $B \in \{B^1, \dots, B^q\}$, а так же, учитывая доказанное выше для цепи B^0, получаем что из предположения $\widetilde{\alpha} \notin N_D$ следует $\widetilde{\alpha} = \widetilde{\alpha}^p$.

Рассуждая аналогично для всех $p \in \{1, \dots, k\}$ получаем

$$N_D = \mathbb{E}^n \backslash \bigcup_{i=1}^{k} \{\widetilde{\alpha}^i\} = N_f \tag{4.3}$$

Теорема доказана. ■

Теорема 2. *ДНФ D функции f является тупиковой.*

Доказательство. Для доказательства данного факта достаточно показать, что каждая элементарная конъюнкция, входящая в D, покрывает околонулевой набор функции f, причем никакая другая э.к. из D не делает этого.

Зафиксируем позиции столбцов нулевой матрицы M_f. Пусть столбцы нулевой матрицы идут по возрастанию $z(j)$, напомним, что $z(j) = \sum_{i=1}^{k}(2^{i-1}\alpha_j^i)$. Также мы будем рассматривать такую нулевую матрицу полной функции f, что $\alpha_j^k = 0, j = \{1, \ldots, n\}$, любую полную функцию можно привести к такому виду используя преобразования из [8]. Нетрудно видеть, что в этом случае M_f для $k = 5$ будет выглядеть следующим образом:

$$
\begin{array}{cc}
z(j) = & \begin{array}{ccccccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \end{array} \\
M_f = & \begin{pmatrix}
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

$K = \&_{i \in E(b_1^0)} x_{2^{i-1}}$ покрывает нулевую точку $Q(t, 2^{s-1})$, где $t, s \in E(b_1^0), t \neq s$, при этом легко убедиться, что ни одна другая элементарная конъюнкция из D не покрывает этот набор.

Конъюнкции $K = x_{2^{i-1}}\overline{x}_{b_1^0}$, при $i \in E(b_1^0)$ покрывают околонулевые наборы $Q(t, i)$, где $t \in Z(b_1^0)$ соответственно.

Конъюнкции $K = x_{b_{j-1}^0}\overline{x}_{b_j^0}$ при $j \in \{2, \ldots, \beta(0)\}$ покрывают околонулевые наборы $Q(t, b_j^0)$, где $t \in E(b_{j-1}^0)$, если $j = 2$ и $t = log_2(b_{j-1} - b_{j-2})$ при $j > 2$ соответственно.

Конъюнкции $K = x_{b_j^0 - b_{j-1}^0} x_{b_{j-1}^0}$ при $j \in \{2, \ldots, \beta(0)\}$ покрывают околонулевые наборы $Q(t, b_j^0 - b_{j-1}^0)$, где $t \in E(b_{j-1}^0)$ соответственно.

Конъюнкции $K = x_{b_j^0 - b_{j-1}^0}\overline{x}_{b_j^0}$ при $j \in \{2, \ldots, \beta(0)\}$ покрывают околонулевые наборы $Q(t, b_j^0 - b_{j-1}^0)$, где $t \in Z(b_j^0)$ соответственно.

$K = \&_{i \in Z(b_{\beta(0)}^0)} x_{2^{i-1}}$ покрывает нулевую точку $Q(t, 2^{s-1})$, где $t, s \in Z(b_{\beta 0}^0), t \neq s$.

Конъюнкции $K = x_{2^{i-1}} x_{b_{\beta(0)}^0}$, при $i \in Z(b_{\beta(0)}^0)$ покрывают околонулевые наборы $Q(t, i)$, где $t \in E(b_{\beta(0)}^0)$ соответственно.

Конъюнкции $K = \overline{x}_{b^i_j}\overline{x}_{b^i_{j+1}-b^i_j}x_{b^i_{j+1}}\}$, при $j \in \{1, \dots, q\}, i \in \{1, \dots, \beta(i)-1\}$ покрывают околонулевые наборы $Q(t, b^i_j)$, где $t \in E(b^i_j)$ соответственно.

Конъюнкции $K = x_{b^i_1}\&\&_{i\in E(b^i_1)}\overline{x}_{2^{j-1}}$, при $i \in \{1, \dots, \beta(i)-1\}$ покрывают околонулевые наборы $Q(t, b^i_1)$, где $t \in Z(b^i_1)$ соответственно.

Конъюнкции $K = \overline{x}_{b^i_{\beta(i)}}\&\&_{i\in Z(b^i_{\beta(i)})}\overline{x}_{2^{j-1}}$, при $i \in \{1, \dots, \beta(i)-1\}$ покрывают околонулевые наборы $Q(t, b^i_{\beta(i)})$, где $t \in E(b^i_{\beta(i)})$ соответственно.

$$D_2 = \bigcup_{i=1}^{q}\left[\bigcup_{j=1}^{\beta(i)-1}\{\overline{x}_{b^i_j}\overline{x}_{b^i_{j+1}-b^i_j}x_{b^i_{j+1}}\} \cup \left\{x_{b^i_1}\&\&_{i\in E(b^i_1)}\overline{x}_{2^{j-1}}\right\} \cup \left\{\overline{x}_{b^i_{\beta(i)}}\&\&_{i\in Z(b^i_{\beta(i)})}\overline{x}_{2^{j-1}}\right\}\right]$$

Таким образом, для всех элементарных конъюнкций указаны соответствующие им околонулевые точки, на которых никакая другая конъюнкция D не обращается в единицу. ∎

Оценим длину ДНФ D. Нетрудно видеть, что

$$|D| = (3 + 3(k-4) + 3) + (q-1) + (|V| - (k-3)) = n + k - 4 + q, \tag{4.4}$$

где q — число цепей, на которые был разбит булев куб. Алгоритм из [6] разбивает булев куб на $C_{k-1}^{\lceil (k-1)/2 \rceil}$ цепей.

Сравним длину ДНФ D с длинами ДНФ, полученными редукционным алгоритмом Ю.И. Журавлева и А.Ю. Когана $D^{\text{редукц}}$, а так же ДНФ из [2] D^{Γ}.

k	5	6	7	8	9
$\lvert D^{\text{редукц}}\rvert$	$n+14$	$n+31$	$n+66$	$n+133$	$n+271$
$\lvert D^{\Gamma}\rvert$	$n+11$	$n+19$	$n+34$	$n+55$	$n+97$
$\lvert D\rvert$	$n+7$	$n+12$	$n+23$	$n+39$	$n+75$

Приведем пример ДНФ D полной функции f, где $k = 5$. $|D| = n + 7 = 22$.

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \end{array} \\
M_f = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

$$
D = x_1x_2 \vee x_1\overline{x}_3 \vee x_2\overline{x}_3 \vee x_3x_4 \vee x_3\overline{x}_7 \vee x_4\overline{x}_7 \vee x_7x_8 \vee x_7\overline{x}_{15} \vee x_8\overline{x}_{15}\vee
$$

$$
\vee\overline{x}_1\overline{x}_4x_5 \vee \overline{x}_1\overline{x}_8x_9 \vee \overline{x}_1\overline{x}_{14}x_{15} \vee \overline{x}_2\overline{x}_4x_6 \vee \overline{x}_2\overline{x}_8x_{10} \vee \overline{x}_2\overline{x}_9x_{11} \vee \overline{x}_2\overline{x}_{13}x_{15}\vee
$$

$$
\vee\overline{x}_4\overline{x}_8x_{12} \vee \overline{x}_4\overline{x}_{11}x_{15} \vee \overline{x}_5\overline{x}_8x_{13} \vee \overline{x}_6\overline{x}_8x_{14} \vee \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_{12}x_{15} \vee \overline{x}_1\overline{x}_4\overline{x}_{10}x_{15}.
$$

5 Заключение

На защиту дипломной работы выносится:

- Получение явной формулы ДНФ полной функции рекордного размера, которая допускает эффективное построение;

- Доказательство корректности полученной формулы;

- Доказательство тупиковости полученной ДНФ полных функций.

В ходе исследований была получена ДНФ полной функции D, такая что $|D| = n + k - 4 + C_{k-1}^{\lceil (k-1)/2 \rceil}$, где k — количество нулевых наборов полной функции, а n — число переменных функции.

Вычислительный эксперимент показал, что для $k = 6$ ДНФ D является кратчайшей. К сожалению, проведение подобного эксперимента для больших k требует недоступной на данный момент вычислительной мощности. Дальнейшим направлением исследований в этой области может стать попытка доказательства того факта, что D является кратчайшей ДНФ при $k \geq 6$, или нахождение нижней границы на длину кратчайшей ДНФ полной функции.

Список литературы

[1] *Гуров С.И.*, Упорядоченные множества и универсальная алгебра. М.: ВМК МГУ, 2004

[2] *Дьяконов А. Г.*, Реализация одного класса булевых функций с малым числом нулей тупиковыми дизъюнктивными нормальными формами, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 41:5(2001), 821–828

[3] *Максимов Ю. В.*, Нижние оценки сложности реализации дизъюнктивными нормальными формами булевых функций специальных классов, Труды 9-ой международной конференции «Интеллектуализация обработки информации» — М.: «МАКС Пресс», 2011. — С. 75–77.

[4] *Максимов Ю.В.*, Построение ассимптотически минимальных ДНФ для одного класса булевых функций с малым числом нулей.

[5] *Максимов Ю. В.*, Эффективная реализация некоторых классов булевых функций дизъюнктивными нормальными формами, Труды конференции ИТИС–35. ISBN 978-5-90115819-7. — 2012. — С. 105–107.

[6] *Соколов Н. А.*, Об оптимальной расшифровке монотонных функций алгебры логики, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 22:2(1982), 449–461

[7] *Журавлёв Ю. И., Коган А. Ю.*, “Алгоритм построения дизъюнктивной нормальной формы, эквивалентной произведению левых частей булевых уравнений нельсоновского типа”, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 26:8 (1986), 1243–1249

[8] *Журавлёв Ю. И., Коган А. Ю.*, “Реализация булевых функций с малым числом нулей дизъюнктивными нормальными формами и смежные задачи”, Докл. АН СССР, 285:4 (1985), 795–799

[9] *Яблонский С. В., Лупанов О. Б. (ред.)*, Дискретная математика и математические вопросы кибернетики, Наука, М., 1974