Выбор суперпозиции моделей при прогнозировании грузовых железнодорожных перевозок

Двинских Дарина Михайловна

Московский физико-технический институт
Факультет управления и прикладной математики
Кафедра «Интеллектуальные системы»

Научный руководитель д.ф.-м.н., В. В. Стрижов

2016 г.

Цель исследования

Задача

Построить суперпозицию моделей для краткосрочного прогнозирования объемов железнодорожных грузовых перевозок

Проблема

- Отсутствие единой прогностической модели
- Большая волатильность временных рядов
- Наличие нулевых объемов перевозок

Требования к моделям

- Валидность
- Устойчивость
- Полнота

Литература

- *Ю.И. Журавлев, К.В. Рудаков, А.Д. Корчагин, М.П. Кузнецов, А.П. Мотренко, С.С. Стенина, В.В. Стрижов,* Создание системы прогнозирования объемов сроса на грузовые железнодорожные перевозки, 2016
- *К.В. Рудаков, М.П. Кузнецов, А.П. Мотренко, М.М. Стенина, Д.О.Каширин, В.В. Стрижов,* Выбор отимальной модели прогнозирования грузовых железнодорожных перевозок, 2015

Описание выборки

Посуточная загруженность железнодорожных путей

Вектор $\mathbf{x} = \{x_j\}_{i=j}^{5}$ имеет 5 компонент

1. дата погрузки
2. код станции отправления
3. код станции назначения
4. код груза
5. суммарный вес груза

$D = \{t_i, x_i\}_{i=1}^{T}$ — регрессионная выборка, t_i — временные метки, x_i — объемы грузовых перевозок
$\mathbf{x} = \{x_i\}_{i=1}^{T}$ — временной ряд,
f и g - две базовые функции прогнозирования
(f прогнозирует ряд, а g – его остатки)

$$f : x_t \to^{f} x'_{t+1} \to^{g} \hat{x}_{t+1}$$

Функция $f \circ g$ называется **суперпозицией** функций f и g
Предположение, накладываемое на значения выборки

$$x_{t+1} = f \circ g(x_t, x_{t-1}, \dots, x_1) + \epsilon_{t+1},$$

Требуется построить прогноз будущего

$$\hat{x}_{T+1} = f \circ g(\hat{\mathbf{w}}, x_T, x_{T-1}, \dots, x_1)$$

И ретроспективный прогноз с горизонтом прогнозирования h

$$\hat{x}_{t+h} = f \circ g(\hat{\mathbf{w}}, x_t, x_{t-1}, \dots, x_1)$$

Функция ошибки $\mathcal{S}(\mathbf{w}|F, D)$ — функция, значение которой требуется минимизировать для получения оценок параметров $\hat{\mathbf{w}}$

$$\mathcal{S} = \sum_{t \in \mathcal{T}} (x_t - \hat{x}_t)^2 \to min(\hat{\mathbf{w}}),$$

$$\epsilon = x_t - \hat{x}_t,$$

где

$$\hat{x}_t = f \circ g(\hat{\mathbf{w}}, x_t, x_{t-1}, \dots, x_1)$$

$\mathrm{MAE} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |\epsilon_i|$

$\mathrm{MSE} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i^2$

$\mathrm{MAPE} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\epsilon_i}{x_i}\right|$

$\mathrm{RMSE} = \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i^2}$

$\mathrm{PMAD} = \sum_{i=1}^{n} |\epsilon_i| \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|\right)^{(-1)}$

$SS = 1 - \frac{MSE_{forecast}}{MSE_{history}}$

$f, g \in \mathcal{F}$ - допустимое семейство моделей.
В семейство $\mathcal{F}$ включены модели

Скользящее среднее

$$z_t = \frac{x_t + x_{t+1} + \ldots + x_{t+n-1}}{n} = \sum_{i=0}^{n-1} x_{t+i},$$

где n — ширина окна

$$\hat{x}_{T+h} = z_T$$

Экспоненциальное сглаживание

$$z_t = \alpha x_t + (1-\alpha) z_{t-1},$$

где $\mathbf{x}$ — исходный ряд, $\mathbf{z}$ — сглаженный ряд, α — параметр сглаживания ряда, $\alpha \in (0, 1)$.

$$\hat{x}_{T+h} = z_T$$

Метод Кростена

$\mathbf{d} = \{d_t\}_{t=1}^{T}$ — ненулевой спрос исходного временного ряда $\mathbf{x}$,
$\mathbf{q} = \{q_t\}_{t=1}^{T}$ — интервалы между ненулевым спросом ряда $\mathbf{x}$
Экспоненциальное сглаживания обоих рядов

$$z_t = \alpha d_t + (1 - \alpha) z_{t-1}$$

$$p_t = \alpha q_t + (1 - \alpha) p_{t-1}$$

$$\hat{x}_{T+h} = \frac{z_T}{p_T}$$

Модель ARIMA(p, d, q)

$$\triangle^d x_t = c + \sum_{i=1}^{p} a_i \triangle^d x_{t-i} + \sum_{j=1}^{q} b_j \varepsilon_{t-j} + \epsilon_t,$$

где ϵ_t - стационарный временной ряд
c, a_i, b_j - параметры модели
$\triangle^d$ - оператор разности временного ряда порядка d

Модель VAR

$$Y = XW,$$

где матрица X — матрица объект-признак, W — матрица весов, Y — матрица ответов

$$W = (X^T X)^{-1} X^T Y$$

Тогда прогноз находится как

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x} W$$

Таблица: Сопоставление различных прогностических моделей свойствам временных рядов

Алгоритмы	Свойства временных рядов		
	нестац.	нул. знач.	внеш. факторы
Скользящее среднее	-	+	-
Экспонен. сглаживание.	-	+	-
Метод Кростона	-	+	-
ARIMA	+	-	-
VAR	-	-	+

1. С помощью базовой функции f вычисляется $n = n(g)$ прогнозов конца истории $\hat{x}^f_t, \ldots, \hat{x}^f_{t-n(g)+1}$ на одну точку.
2. Вычисляется $n(g)$ остатков $\hat{\varepsilon}_t, \ldots, \hat{\varepsilon}_{t-n(g)+1}$ в виде разницы

$$\hat{\varepsilon}_{t-k} = x_{t-k} - \hat{x}^f_{t-k}.$$

3. С помощью функции g прогнозируются остатки $\hat{\varepsilon}_{t+i}$ на $\max(i)$ отсчетов вперед.
4. Выполняется итеративный подсчет конечных прогнозов

$$\hat{x}^{f,g}_{t+i} = \hat{x}^f_{t+i} + \hat{\varepsilon}_{t+i}$$

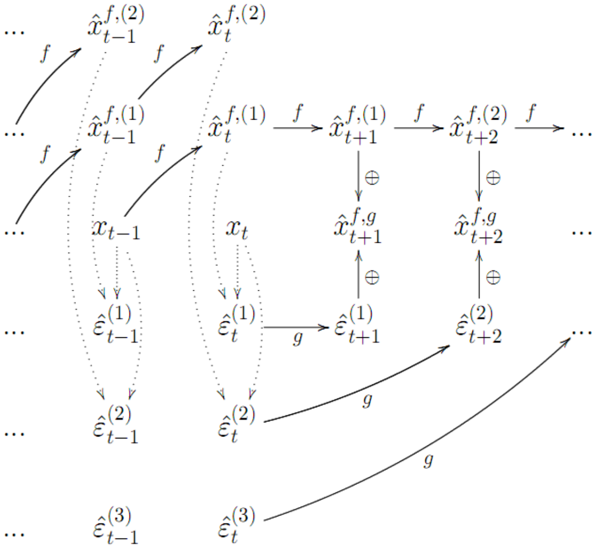
с последовательным подсчетом прогноза базовой функцией f на одну точку $\hat{x}^f_{t+i}$.

Диаграмма прогнозирования исходного ряда и его остатков

$$
\begin{tikzcd}
\dots & \hat{x}^{f}_{t-1} \arrow[dd, dotted, bend right] & \hat{x}^{f}_{t} \arrow[dd, dotted, bend right] & \hat{x}^{f}_{t+1} \arrow[d, "\oplus"] & \hat{x}^{f}_{t+2} \arrow[d, "\oplus"] & \dots \\
\dots \arrow[ur, "f"] & x_{t-1} \arrow[ur, "f"] \arrow[d, dotted] & x_{t} \arrow[ur, "f"] \arrow[d, dotted] & \hat{x}^{f,g}_{t+1} \arrow[ur, "f"] & \hat{x}^{f,g}_{t+2} \arrow[ur, "f"] & \dots \\
\dots & \hat{\varepsilon}_{t-1} & \hat{\varepsilon}_{t} \arrow[r, "g"'] & \hat{\varepsilon}_{t+1} \arrow[u, "\oplus"'] \arrow[r, "g"'] & \hat{\varepsilon}_{t+2} \arrow[u, "\oplus"'] \arrow[r, "g"'] & \dots
\end{tikzcd}
$$

1. С помощью базовой функции f вычисляется ретроспективный прогноз $\hat{x}_{t+1}^{f,(1)}, \ldots, \hat{x}_{t+i}^{f,(i)}$ с горизонтом прогнозирования i, каждый — на глубине i.
2. С помощью базовой функции f вычисляется $\max(i)$ наборов прогнозов конца истории, $\hat{x}_{t}^{f,(i)}, \ldots, \hat{x}_{t-n(g)+1}^{f,(i)}$, каждый набор — на глубине i, $i = 1, \ldots, \max(i)$.
3. Вычисляется $\max(i)$ наборов остатков $\hat{\varepsilon}_{t}^{(i)}, \ldots, \hat{\varepsilon}_{t-n(g)+1}^{(i)}$
$$\hat{\varepsilon}_{t-k}^{(i)} = x_{t-k} - \hat{x}_{t-k}^{f,(i)}, \quad i = 1, \ldots, \max(i).$$
4. С помощью функции g прогнозируются остатки $\hat{\varepsilon}_{t+i}^{(i)}$, каждый прогноз выполняется на одну точку и использует вычисленную последовательность $\hat{\varepsilon}_{t}^{(i)}, \ldots, \hat{\varepsilon}_{t-n(g)+1}^{(i)}$.
5. Выполняется подсчет конечных прогнозов
$$\hat{x}_{t+i}^{f,g} = \hat{x}_{t+i}^{f,(i)} + \hat{\varepsilon}_{t+i}^{(i)}.$$

Диаграмма прогнозирования исходного ряда и его остатков



Цель

Проверить целесообразность использования суперпозиции для прогнозирования временных рядов

Средства - используемые модели

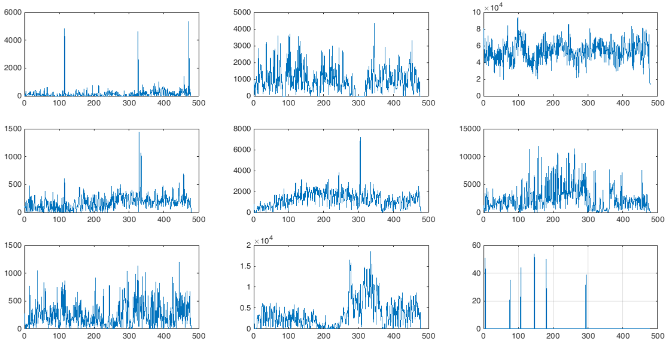
MA, эксоненциальное сглаживание, метод Кростона, ARIMA, VAR

Данные

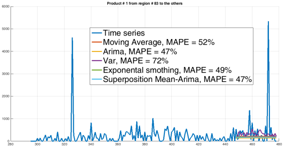
Временные ряды

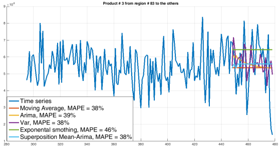
Вычислительный эксперимент. Получение временных рядов

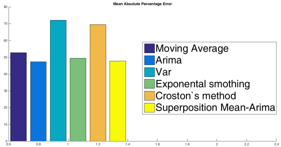
Проведена дополнительная агрегация временных рядов. Товары, отправленные с 83-го региона: каменный уголь, кокс, нефть, метизы, лом черных металлов, строительные грузы, зерно и бумага.

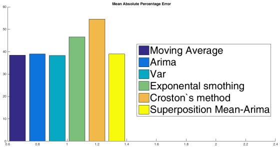


Вычислительный эксперимент. Сравнение ошибок

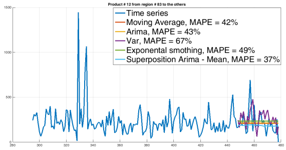


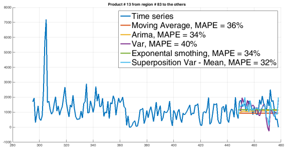


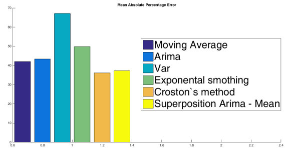


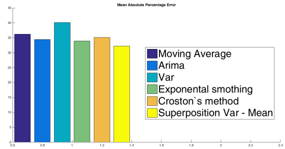


Вычислительный эксперимент. Сравнение ошибок









Заключение

- Выбраны базовые модели для прогнозирования с учетом специфики временных рядов: MA, ARIMA, VAR, экспоненциальное сглаживание, метод Кротстона
- Построены суперпозиции моделей: всевозможные комбинации базовых моделей
- Проведен вычислительный эксперимент, сравнивающий качество базовых моделей и построенных суперпозиций
- Продемонстрирована целесообразность использования суперпозиции для прогнозирования временных рядов