

Снижение размерности пространства в задачах анализа временных рядов

Роман Исаченко

Научный руководитель:
д.ф.-м.н. В. В. Стрижов

Московский физико-технический институт
Факультет управления и прикладной математики
Кафедра «Интеллектуальные системы»

6 июня 2018 г.

Задача декодирования временного ряда

Цель

Исследовать зависимости в пространствах объектов и ответов и построить устойчивую модель декодирования временных рядов в случае коррелированного описания данных.

Проблема

Целевая переменная – вектор, компоненты которого являются зависимыми.

Требуется построить модель, адекватно описывающую как пространство объектов так и пространство ответов при наблюдаемой мультикорреляции в обоих пространствах высокой размерности.

Решение

Для учёта зависимостей в пространствах объектов и ответов предлагается снизить размерность с использованием скрытого пространства.

Литература

- Katrutsa A., Strijov V. Comprehensive study of feature selection methods to solve multicollinearity problem according to evaluation criteria // *Expert Systems with Applications* 76, 2017.
- Li J. et al. Feature selection: A data perspective // *ACM Computing Surveys (CSUR)* 50(6), 2017.
- Eliseyev A. et al. Iterative N-way partial least squares for a binary self-paced brain-computer interface in freely moving animals // *Journal of neural engineering* 4(8), 2011.
- Rodriguez-Lujan I. et al. Quadratic programming feature selection // *Journal of Machine Learning Research* 11(Apr), 2010.
- Motrenko A., Strijov V. Multi-way Feature Selection for ECoG-based Brain-Computer Interface // *Expert Systems with Applications* Submitted to the journal.

Многомерная регрессия

Дано

(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) – выборка, $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ – матрица объектов, $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{m \times r}$ – матрица ответов,

$$\mathbf{X} = [\chi_1, \dots, \chi_n]; \quad \mathbf{Y} = [\nu_1, \dots, \nu_r].$$

Модель

$$\mathbf{y} = \mathbf{\Theta} \mathbf{x} + \varepsilon, \quad \mathbf{\Theta} \in \mathbb{R}^{r \times n}.$$

Функция потерь

$$\mathcal{L}(\mathbf{\Theta} | \mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \left\| \begin{matrix} \mathbf{Y} & - & \mathbf{X} \cdot \mathbf{\Theta}^T \\ m \times r & & m \times n \quad r \times n \end{matrix} \right\|_2^2 \rightarrow \min_{\mathbf{\Theta}}.$$

$$\mathbf{\Theta}^T = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{Y}.$$

Линейная зависимость столбцов матрицы \mathbf{X} приводит к неустойчивому решению.

Для устранения сильной линейной зависимости предлагается использовать методы выбора признаков и снижения размерности пространства.

Снижение размерности пространства

Цель

- спроецировать исходные матрицы \mathbf{X} и \mathbf{Y} в общее латентное пространство;
- максимизировать ковариацию между образцами;
- сохранить информацию об исходных матрицах.

Метод частных наименьших квадратов (PLS)

$$\mathbf{X} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{P}^T + \mathbf{F} = \sum_{k=1}^l \mathbf{t}_k \cdot \mathbf{p}_k^T + \mathbf{F},$$

$m \times n$ $m \times l$ $l \times n$ $m \times n$ $m \times 1$ $1 \times n$ $m \times n$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{Q}^T + \mathbf{E} = \sum_{k=1}^l \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{q}_k^T + \mathbf{E}.$$

$m \times r$ $m \times l$ $l \times r$ $m \times r$ $m \times 1$ $1 \times r$ $m \times r$

$$\mathbf{U} \approx \mathbf{T}\mathbf{B}, \quad \mathbf{B} = \text{diag}(\beta_k), \quad \beta_k = \mathbf{u}_k^T \mathbf{t}_k / (\mathbf{t}_k^T \mathbf{t}_k).$$

Псевдокод метода частных наименьших квадратов (PLS)

Require: $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, l$;

Ensure: $\mathbf{T}, \mathbf{P}, \mathbf{Q}$;

- 1: normalize matrices \mathbf{X} и \mathbf{Y} by columns
- 2: initialize \mathbf{u}_0 (the first column of \mathbf{Y})
- 3: $\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}; \mathbf{Y}_1 = \mathbf{Y}$
- 4: **for** $k = 1, \dots, l$ **do**
- 5: **repeat**
- 6: $\mathbf{w}_k := \mathbf{X}_k^\top \mathbf{u}_{k-1} / (\mathbf{u}_{k-1}^\top \mathbf{u}_{k-1}); \quad \mathbf{w}_k := \frac{\mathbf{w}_k}{\|\mathbf{w}_k\|}$
- 7: $\mathbf{t}_k := \mathbf{X}_k \mathbf{w}_k$
- 8: $\mathbf{c}_k := \mathbf{Y}_k^\top \mathbf{t}_k / (\mathbf{t}_k^\top \mathbf{t}_k); \quad \mathbf{c}_k := \frac{\mathbf{c}_k}{\|\mathbf{c}_k\|}$
- 9: $\mathbf{u}_k := \mathbf{Y}_k \mathbf{c}_k$
- 10: **until** \mathbf{t}_k stabilizes
- 11: $\mathbf{p}_k := \mathbf{X}_k^\top \mathbf{t}_k / (\mathbf{t}_k^\top \mathbf{t}_k), \quad \mathbf{q}_k := \mathbf{Y}_k^\top \mathbf{t}_k / (\mathbf{t}_k^\top \mathbf{t}_k)$
- 12: $\mathbf{X}_{k+1} := \mathbf{X}_k - \mathbf{t}_k \mathbf{p}_k^\top$
- 13: $\mathbf{Y}_{k+1} := \mathbf{Y}_k - \mathbf{t}_k \mathbf{q}_k^\top$

Метод частных наименьших квадратов (PLS)

Утверждение (Исаченко, 2017)

Максимизация ковариации между векторами \mathbf{t}_k и \mathbf{u}_k приводит к наилучшему описанию матриц \mathbf{X} и \mathbf{Y} с учётом их взаимосвязи.

Утверждение (Исаченко, 2017)

Вектора \mathbf{w}_k и \mathbf{c}_k – собственные вектора матриц $\mathbf{X}_k^T \mathbf{Y}_k \mathbf{Y}_k^T \mathbf{X}_k$ и $\mathbf{Y}_k^T \mathbf{X}_k \mathbf{X}_k^T \mathbf{Y}_k$, соответствующие максимальным собственным значениям.

Утверждение (Исаченко, 2017)

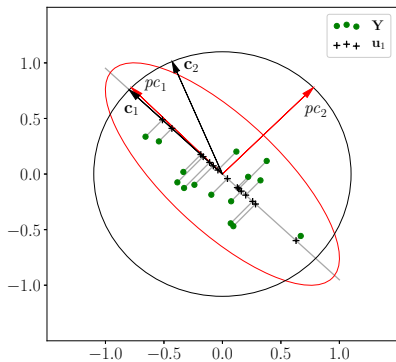
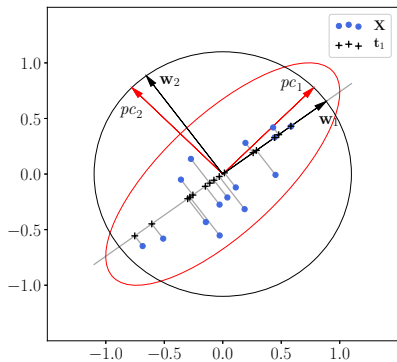
Правила обновления векторов (6)–(9) соответствуют максимизации ковариации между векторами \mathbf{t}_k и \mathbf{u}_k .

Модель PLS регрессии

$$\mathbf{Y} = \mathbf{UQ}^T + \mathbf{E} \approx \mathbf{TBQ}^T + \mathbf{E} = \mathbf{XW}^* \mathbf{BQ}^T + \mathbf{E} = \mathbf{X}\Theta + \mathbf{E}.$$

$$\Theta = \mathbf{W}(\mathbf{P}^T \mathbf{W})^{-1} \mathbf{BQ}^T, \quad \mathbf{T} = \mathbf{XW}^*, \quad \text{where } \mathbf{W}^* = \mathbf{W}(\mathbf{P}^T \mathbf{W})^{-1}.$$

Пример PLS регрессии в двумерном случае



Задача выбора признаков

Цель

Найти бинарный вектор $\mathbf{a} = \{0, 1\}^n$, компоненты – индикаторы выбранных признаков.

Функция ошибки отбора признаков

$$\mathbf{a} = \arg \min_{\mathbf{a}' \in \{0,1\}^n} S(\mathbf{a}' | \mathbf{X}, \mathbf{Y}).$$

Релаксация

Замена дискретной области определения $\{0, 1\}^n$ на непрерывную релаксацию $[0, 1]^n$:

$$\mathbf{z} = \arg \min_{\mathbf{z}' \in [0,1]^n} S(\mathbf{z}' | \mathbf{X}, \mathbf{Y}), \quad a_j = [z_j > \tau].$$

Получив \mathbf{a} , решаем задачу регрессии:

$$\mathcal{L}(\Theta_{\mathbf{a}} | \mathbf{X}_{\mathbf{a}}, \mathbf{Y}) = \left\| \mathbf{Y} - \mathbf{X}_{\mathbf{a}} \Theta_{\mathbf{a}}^T \right\|_2^2 \rightarrow \min_{\Theta_{\mathbf{a}}},$$

где индекс \mathbf{a} обозначает подматрицу с номерами столбцов, для которых $a_j = 1$.

Quadratic Programming Feature Selection

$$\|\nu - \mathbf{X}\theta\|_2^2 \rightarrow \min_{\theta \in \mathbb{R}^n}.$$

Задача квадратичного программирования

$$S(\mathbf{z}' | \mathbf{X}, \nu) = (1 - \alpha) \cdot \underbrace{\mathbf{z}^T \mathbf{Q} \mathbf{z}}_{\text{Sim}(\mathbf{X})} - \alpha \cdot \underbrace{\mathbf{b}^T \mathbf{z}}_{\text{Rel}(\mathbf{X}, \nu)} \rightarrow \min_{\substack{\mathbf{z} \geq \mathbf{0}_n \\ \mathbf{1}_n^T \mathbf{z} = 1}}.$$

- $\mathbf{z} \in [0, 1]^n$ – значимость признаков;
- $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – матрица парных взаимодействий признаков;
- $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ – вектор релевантностей признаков к целевой переменной.

$$\mathbf{Q} = [|\text{corr}(\chi_i, \chi_j)|]_{i,j=1}^n, \quad \mathbf{b} = [|\text{corr}(\chi_i, \nu)|]_{i=1}^n.$$

Утверждение (Исаченко, 2018)

В случае полуопределенной матрицы \mathbf{Q} задача QPFS является выпуклой. Полуопределенная релаксация – сдвиг спектра:

$$\mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{Q} - \lambda_{\min} \mathbf{I}.$$

Многомерный QPFS

Агрегирование релевантностей по целевым векторам (RelAgg)

$$\mathbf{b} = [|\text{corr}(\chi_i, \nu)|]_{i=1}^n \rightarrow \mathbf{b} = \left[\sum_{k=1}^r |\text{corr}(\chi_i, \nu_k)| \right]_{i=1}^n.$$

Недостаток: нет учёта зависимостей в матрице \mathbf{Y} .

Симметричный учёт значимостей (SymImp)

Штрафуем коррелированные целевые вектора с помощью $\text{Sim}(\mathbf{Y})$

$$\alpha_1 \cdot \underbrace{\mathbf{z}_x^T \mathbf{Q}_x \mathbf{z}_x}_{\text{Sim}(\mathbf{X})} - \alpha_2 \cdot \underbrace{\mathbf{z}_x^T \mathbf{B} \mathbf{z}_y}_{\text{Rel}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})} + \alpha_3 \cdot \underbrace{\mathbf{z}_y^T \mathbf{Q}_y \mathbf{z}_y}_{\text{Sim}(\mathbf{Y})} \rightarrow \min_{\substack{\mathbf{z}_x \geq \mathbf{0}_n, \mathbf{1}_n^T \mathbf{z}_x = 1 \\ \mathbf{z}_y \geq \mathbf{0}_r, \mathbf{1}_r^T \mathbf{z}_y = 1}}.$$

$$\mathbf{Q}_x = [|\text{corr}(\chi_i, \chi_j)|]_{i,j=1}^n, \mathbf{Q}_y = [|\text{corr}(\nu_i, \nu_j)|]_{i,j=1}^r, \mathbf{B} = [|\text{corr}(\chi_i, \nu_j)|]_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, r}}$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1 \quad \alpha_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Многомерный QPFS

SymImp штрафует коррелированные целевые вектора, которые не достаточно объясняются признаками.

$$\alpha_1 \cdot \underbrace{\mathbf{z}_x^T \mathbf{Q}_x \mathbf{z}_x}_{\text{Sim}(X)} - \alpha_2 \cdot \underbrace{\mathbf{z}_x^T \mathbf{B} \mathbf{z}_y}_{\text{Rel}(X, Y)} \rightarrow \min_{\substack{\mathbf{z}_x \geq \mathbf{0}_n, \\ \mathbf{1}_n^T \mathbf{z}_x = 1}} ; \quad \alpha_3 \cdot \underbrace{\mathbf{z}_y^T \mathbf{Q}_y \mathbf{z}_y}_{\text{Sim}(Y)} + \alpha_2 \cdot \underbrace{\mathbf{z}_x^T \mathbf{B} \mathbf{z}_y}_{\text{Rel}(X, Y)} \rightarrow \min_{\substack{\mathbf{z}_y \geq \mathbf{0}_r, \\ \mathbf{1}_r^T \mathbf{z}_y = 1}} .$$

Минимаксный подход (MinMax / MaxMin)

$$\min_{\substack{\mathbf{z}_x \geq \mathbf{0}_n \\ \mathbf{1}_n^T \mathbf{z}_x = 1}} \max_{\substack{\mathbf{z}_y \geq \mathbf{0}_r \\ \mathbf{1}_r^T \mathbf{z}_y = 1}} \left(\text{or } \max_{\substack{\mathbf{z}_y \geq \mathbf{0}_r \\ \mathbf{1}_r^T \mathbf{z}_y = 1}} \min_{\substack{\mathbf{z}_x \geq \mathbf{0}_n \\ \mathbf{1}_n^T \mathbf{z}_x = 1}} \right) \left[\alpha_1 \cdot \underbrace{\mathbf{z}_x^T \mathbf{Q}_x \mathbf{z}_x}_{\text{Sim}(X)} - \alpha_2 \cdot \underbrace{\mathbf{z}_x^T \mathbf{B} \mathbf{z}_y}_{\text{Rel}(X, Y)} - \alpha_3 \cdot \underbrace{\mathbf{z}_y^T \mathbf{Q}_y \mathbf{z}_y}_{\text{Sim}(Y)} \right] .$$

Теорема (Исаченко, 2018)

Для положительно определенных матриц \mathbf{Q}_x и \mathbf{Q}_y $\min\max$ и $\max\min$ задачи достигают одинакового значения функционала.

Теорема (Исаченко, 2018)

Минимаксная задача эквивалентна задаче квадратичного программирования с $n + r + 1$ переменными.

Для получения выпуклой задачи применяется сдвиг спектра.

Многомерный QPFS

Максимизация релевантностей (MaxRel)

$$\min_{\substack{\mathbf{z}_x \geq \mathbf{0}_n \\ \mathbf{1}_n^T \mathbf{z}_x = 1}} \max_{\substack{\mathbf{z}_y \geq \mathbf{0}_r \\ \mathbf{1}_r^T \mathbf{z}_y = 1}} \left[(1 - \alpha) \cdot \mathbf{z}_x^T \mathbf{Q}_x \mathbf{z}_x - \alpha \cdot \mathbf{z}_x^T \mathbf{B} \mathbf{z}_y \right].$$

Теорема (Исаченко, 2018)

Для положительно определенной матрицы \mathbf{Q}_x *minmax* и *maxmin* задачи достигают одинакового значения функционала.

Асимметричный учёт значимостей (AsymImp)

$$\alpha_1 \cdot \underbrace{\mathbf{z}_x^T \mathbf{Q}_x \mathbf{z}_x}_{\text{Sim}(\mathbf{X})} - \alpha_2 \cdot \underbrace{(\mathbf{z}_x^T \mathbf{B} \mathbf{z}_y - \mathbf{b}^T \mathbf{z}_y)}_{\text{Rel}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})} + \alpha_3 \cdot \underbrace{\mathbf{z}_y^T \mathbf{Q}_y \mathbf{z}_y}_{\text{Sim}(\mathbf{Y})} \rightarrow \min_{\substack{\mathbf{z}_x \geq \mathbf{0}_n, \mathbf{1}_n^T \mathbf{z}_x = 1 \\ \mathbf{z}_y \geq \mathbf{0}_r, \mathbf{1}_r^T \mathbf{z}_y = 1}}.$$

При $b_j = \max_{i=1, \dots, n} [\mathbf{B}]_{i,j}$ коэффициенты при \mathbf{z}_y в $\text{Rel}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ неотрицательны.

Утверждение (Исаченко, 2017)

В одномерном случае $r = 1$ предлагаемые стратегии *SymImp*, *MinMax*, *MaxMin*, *MaxRel*, *AsymImp* совпадают с исходным алгоритмом QPFS.

Обобщение предложенных методов выбора признаков

Algorithm	Idea	Error function $S(\mathbf{a} \mathbf{X}, \mathbf{Y})$
RelAgg	$\min [\text{Sim}(\mathbf{X}) - \text{Rel}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})]$	$\min_{z_x} [(1 - \alpha) \cdot z_x^T \mathbf{Q}_x z_x - \alpha \cdot z_x^T \mathbf{B} \mathbf{1}_r]$
SymImp	$\min [\text{Sim}(\mathbf{X}) - \text{Rel}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) + \text{Sim}(\mathbf{Y})]$	$\min_{z_x, z_y} [\alpha_1 \cdot z_x^T \mathbf{Q}_x z_x - \alpha_2 \cdot z_x^T \mathbf{B} z_y + \alpha_3 \cdot z_y^T \mathbf{Q}_y z_y]$
MinMax	$\min [\text{Sim}(\mathbf{X}) - \text{Rel}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})]$ $\max [\text{Rel}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) + \text{Sim}(\mathbf{Y})]$	$\min_{z_x} \max_{z_y} [\alpha_1 \cdot z_x^T \mathbf{Q}_x z_x - \alpha_2 \cdot z_x^T \mathbf{B} z_y - \alpha_3 \cdot z_y^T \mathbf{Q}_y z_y]$
MaxRel	$\min [\text{Sim}(\mathbf{X}) - \text{Rel}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})]$ $\max [\text{Rel}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})]$	$\min_{z_x} \max_{z_y} [(1 - \alpha) \cdot z_x^T \mathbf{Q}_x z_x - \alpha \cdot z_x^T \mathbf{B} z_y]$
AsymImp	$\min [\text{Sim}(\mathbf{X}) - \text{Rel}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})]$ $\max [\text{Rel}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) + \text{Sim}(\mathbf{Y})]$	$\min_{z_x, z_y} [\alpha_1 z_x^T \mathbf{Q}_x z_x - \alpha_2 (z_x^T \mathbf{B} z_y - \mathbf{b}^T z_y) + \alpha_3 z_y^T \mathbf{Q}_y z_y]$

Внешние критерии качества

Нормированное RMSE

Качество предсказания:

$$\text{sRMSE}(\mathbf{Y}, \hat{\mathbf{Y}}_a) = \sqrt{\frac{\text{MSE}(\mathbf{Y}, \hat{\mathbf{Y}}_a)}{\text{MSE}(\mathbf{Y}, \bar{\mathbf{Y}})}} = \frac{\|\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}}_a\|_2}{\|\mathbf{Y} - \bar{\mathbf{Y}}\|_2}, \quad \text{where } \hat{\mathbf{Y}}_a = \mathbf{X}_a \Theta_a^T.$$

$\bar{\mathbf{Y}}$ is a constant prediction.

Мультикорреляция

Среднее значение коэффициента множественной корреляции:

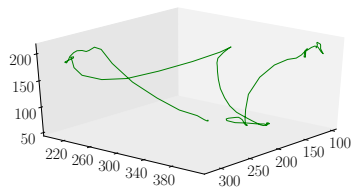
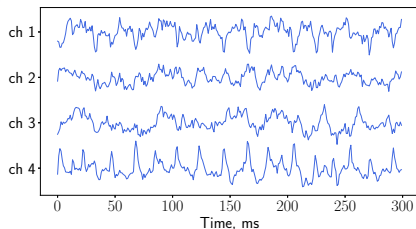
$$R^2 = \frac{1}{r} \text{tr}(\mathbf{C}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C}); \quad \mathbf{C} = [\text{corr}(\chi_i, \nu_j)]_{\substack{i=1, \dots, n, \\ j=1, \dots, r}}, \quad \mathbf{R} = [\text{corr}(\chi_i, \chi_j)]_{i,j=1}^n.$$

BIC

Компромисс между качеством предсказания и количеством выбранных признаков $\|\mathbf{a}\|_0$:

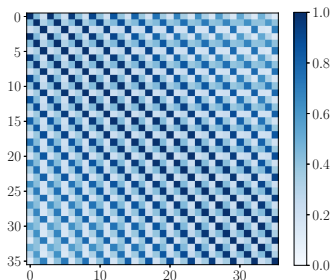
$$\text{BIC} = m \ln(\text{MSE}(\mathbf{Y}, \hat{\mathbf{Y}}_a)) + \|\mathbf{a}\|_0 \cdot \log m.$$

Вычислительный эксперимент, данные



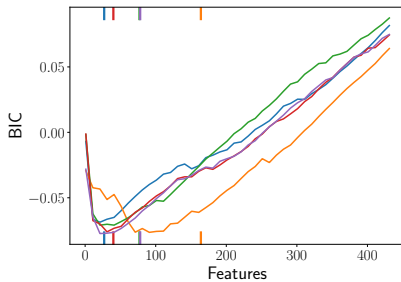
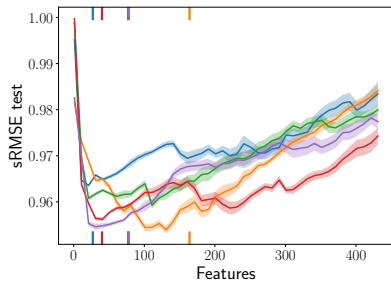
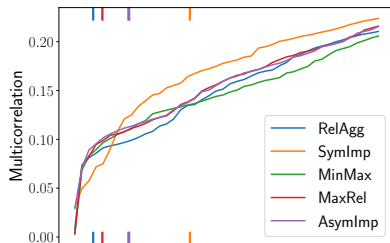
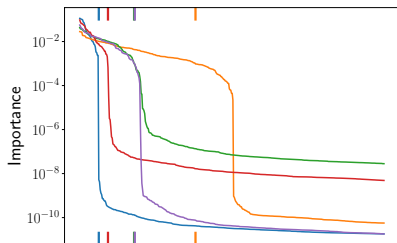
$$\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{m \times (32 \cdot 27)}; \quad \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{m \times 3k}.$$

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & \dots & x_k & y_k & z_k \\ x_2 & y_2 & z_2 & \dots & x_{k+1} & y_{k+1} & z_{k+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_m & y_m & z_m & \dots & x_{m+k} & y_{m+k} & z_{m+k} \end{pmatrix}$$



Матрица корреляций \mathbf{Y}

Результаты эксперимента



Стабильность выбора признаков

Постановка эксперимента

- создать бутстреп-выборки

$$(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \rightarrow \{(\mathbf{X}_1, \mathbf{Y}_1), \dots, (\mathbf{X}_s, \mathbf{Y}_s)\};$$

- решить задачу выбора признаков

$$\{(\mathbf{X}_1, \mathbf{Y}_1), \dots, (\mathbf{X}_s, \mathbf{Y}_s)\} \rightarrow \{\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_s\};$$

- вычислить статистики

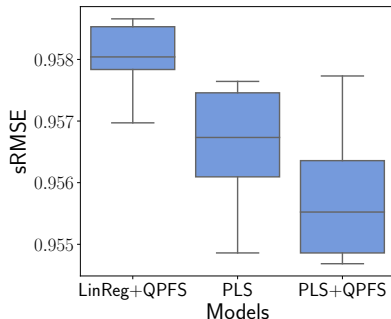
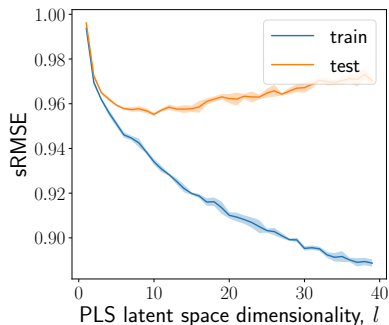
$$\{\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_s\} \rightarrow \{\text{sRMSE}, \|\mathbf{a}\|_0, \text{Спирмен } \rho, \ell_2 \text{ расстояние}\}.$$

	sRMSE	$\ \mathbf{a}\ _0$	Спирмен ρ	ℓ_2 расстояние
RelAgg	0.965 \pm 0.002	26.8 \pm 3.8	0.915 \pm 0.016	0.145 \pm 0.018
SymImp	0.961 \pm 0.001	224.4 \pm 9.0	0.910 \pm 0.017	0.025 \pm 0.002
MinMax	0.961 \pm 0.002	101.0 \pm 2.1	0.932 \pm 0.009	0.059 \pm 0.004
MaxRel	0.958 \pm 0.003	41.2 \pm 5.2	0.862 \pm 0.027	0.178 \pm 0.010
AsymImp	0.955 \pm 0.001	85.8 \pm 10.2	0.926 \pm 0.011	0.078 \pm 0.007

QPFS vs PLS

Постановка эксперимента

Сравнить отбор признаков и снижение размерности пространства с помощью моделей линейной регрессии и PLS регрессии.



Результаты, выносимые на защиту

- Исследована задача декодирования сигналов в пространствах высокой размерности.
- Исследованы методы снижения размерности с анализом структуры пространства.
- Предложены методы для выбора признаков, учитывающие зависимости как в пространстве объектов, так и в пространстве ответов.
- Предложена комбинация методов выбора признаков и снижения размерности пространства.
- Создан макет системы, пригнозирующей сигналы в пространстве большой размерности.
- Предложенные алгоритмы выбора признаков доставляют устойчивые и адекватные решения в коррелированных пространствах высокой размерности.

Заключение

Публикации ВАК

- Исаченко Р.В., Стрижов В. В. Метрическое обучение в задачах мультиклассовой классификации временных рядов *Информатика и её применения*, 10(2), 2016.
- Isachenko R. et al. Feature Generation for Physical Activity Classification. *Artificial Intellegence and Decision Making*, 2018, подана в журнал.
- Isachenko R., Strijov V. Quadratic programming optimization for Newton method. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2018, принята к публикации.
- Isachenko R., Vladimirova M., Strijov V. Dimensionality reduction for multivariate ECoG-based data. *Chemometrics*, 2018, готова к подаче.

Выступления с докладом

- Ломоносов, 2016, Москва. Метрическое обучение в задачах мультиклассовой классификации временных рядов.
- Intelligent Data Processing Conference, 2016, Барселона. Multimodel forecasting multiscale time series in internet of things.
- Математические методы распознавания образов ММРО, 2017, Таганрог. Локальные модели для классификации объектов сложной структуры.