

Распознавание зон коллекторов нефти и газа в монолитных породах по данным сейсмической разведки с учетом обучающей информации из разведывательных скважин

В.В. Моттль

Вычислительный центр РАН
Московский физико-технический институт
Тульский государственный университет

А.В. Копылов, С.Д. Двоенко, А.С. Ермаков

Тульский государственный университет

Запасы нефти и газа в осадочном чехле и кристаллическом фундаменте земной коры

Осадочные породы, формирующие верхний чехол земной коры до сих пор являются главным источником запасов нефти и газа. Однако ресурсы углеводородов в этом слое неуклонно истощаются. Значительное увеличение перспективных нефтегазовых ресурсов не может быть обеспечено без вовлечения нижележащего кристаллического фундамента.

Один из главных геологических факторов, определяющих возможность скопления большого количества углеводородов, является наличие коллекторских зон, т.е. зон с повышенной пустотностью среды.

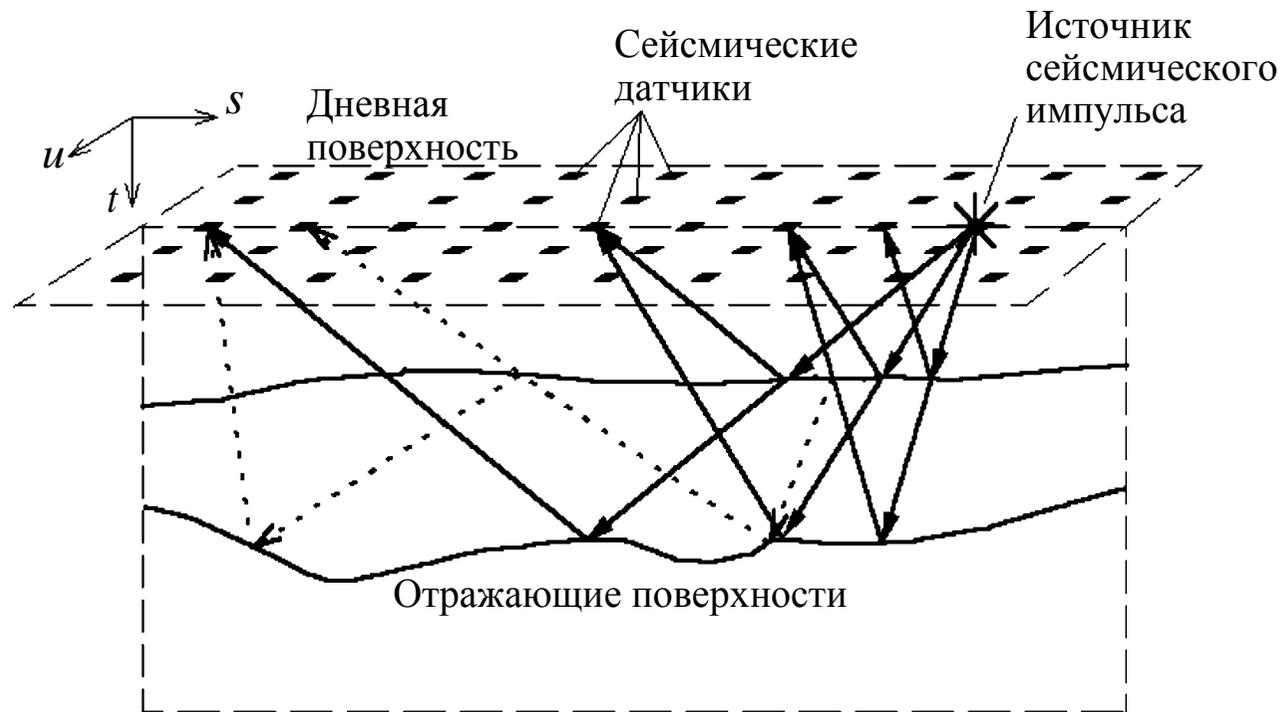
Информацию о коллекторских зонах подземной среды получают бурением дорогостоящих глубоких скважин, неизбежно редкая сеть которых не позволяет с достаточной надежностью распространить получаемые точечные оценки на весь объем исследуемого потенциального резервуара.

Сейсмическая разведка осуществляется с дневной поверхности без бурения скважин. Однако разрешающая способность сейсморазведки недостаточна.

Идея ликвидации этого противоречия: Использование сейсмической картины исследуемого фрагмента подземного пространства для интерполяции точечной информации о расположении коллекторов, полученной из разведочных скважин.

Принцип сейсмической разведки подземной среды

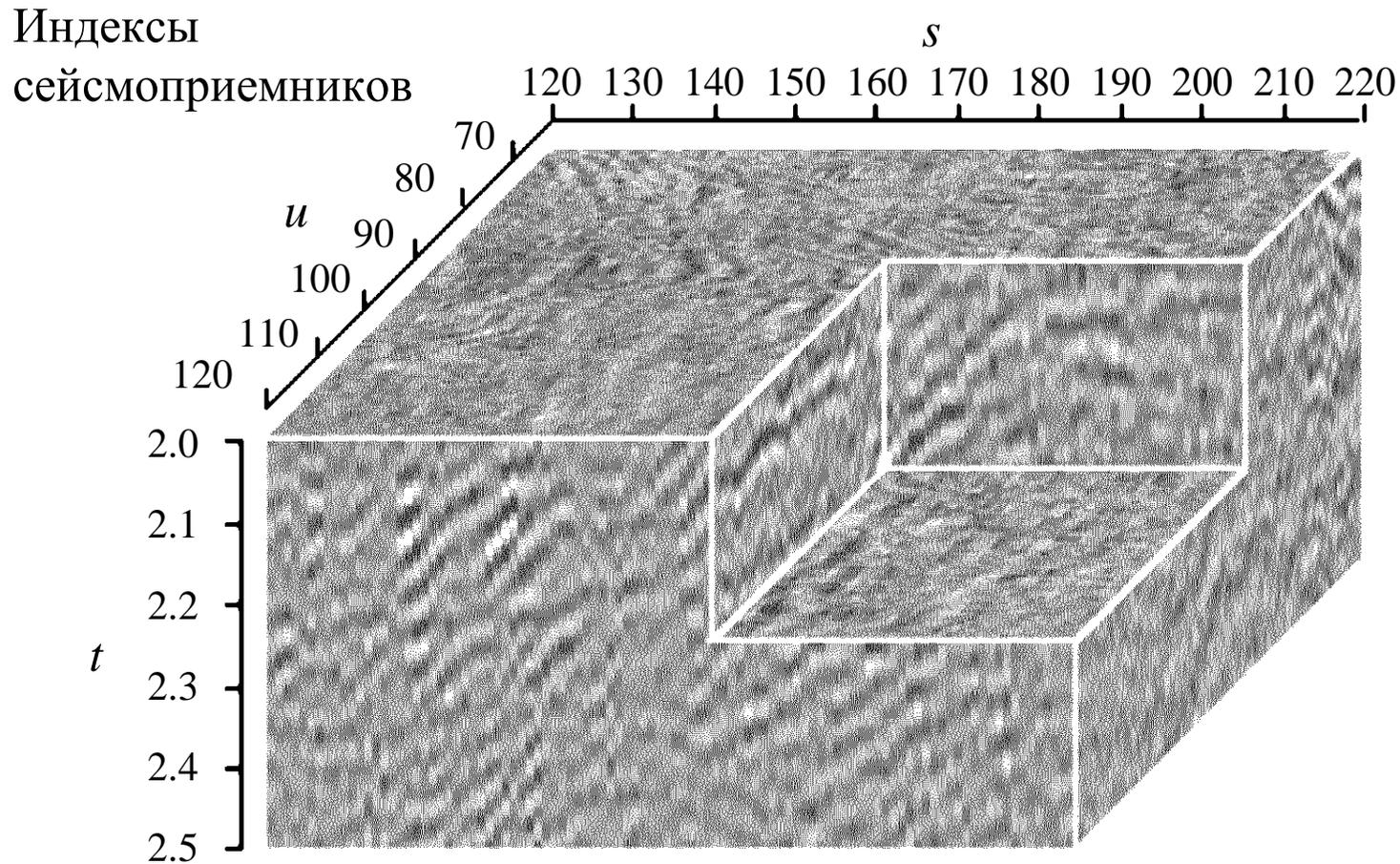
Массивы сейсмических данных состоят из синхронных записей отраженных сейсмических сигналов, зарегистрированных большим числом сейсмических датчиков, расположенных в узлах прямоугольной решетки на земной поверхности. Источник исходной сейсмической энергии – серия взрывов, производимых на поверхности поочередно во всех точках расположения сейсмических датчиков.



Специальная обработка множества сейсмограмм от каждого датчика позволяет отождествить ось времени каждой синтетической сейсмограммы с глубиной от дневной поверхности.

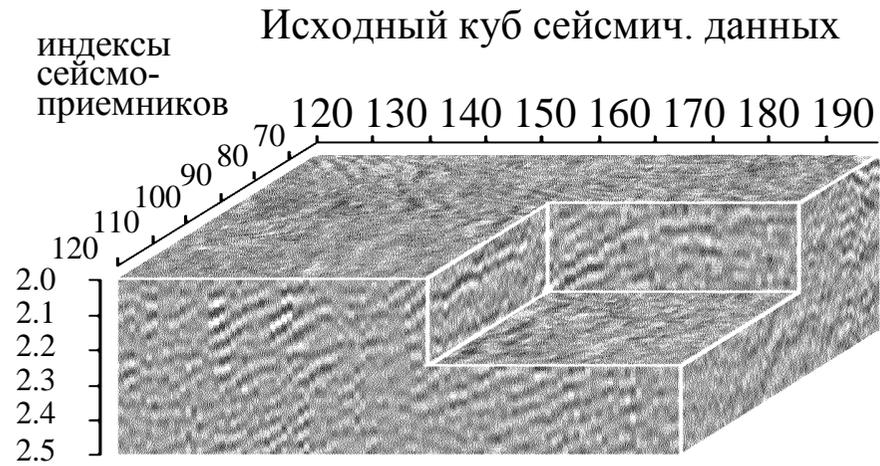
Куб сейсмических данных

Сейсморазведка обеспечивает получение трехмерной модели скрытого пространства. В идеале обеспечивается однозначное соответствие между элементами массива сейсмических данных и точками подземной среды.



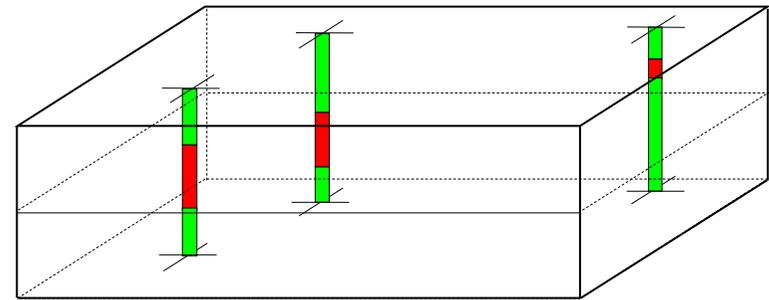
Трехмерное полутоновое изображение

Совместная интерпретация сейсмических и скважинных данных



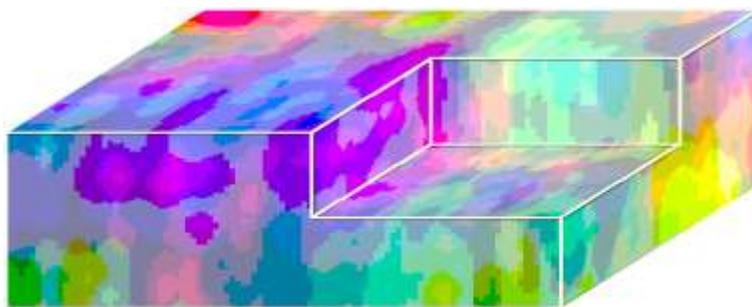
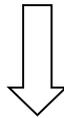
Редкая информация из скважин (данные «учителя»)

■ коллекторы ■ неколлекторы

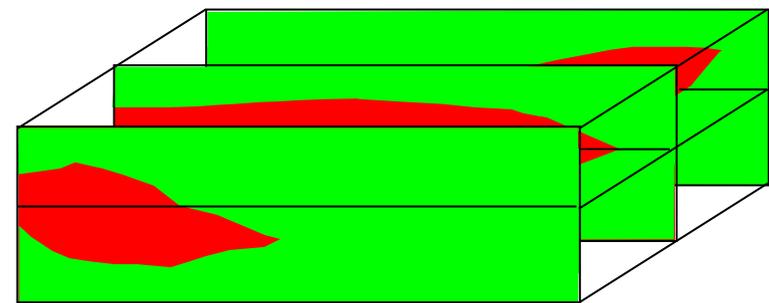
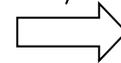


Время (глубина)

Вычисление признаков локальной текстуры



Обучение и распознавание



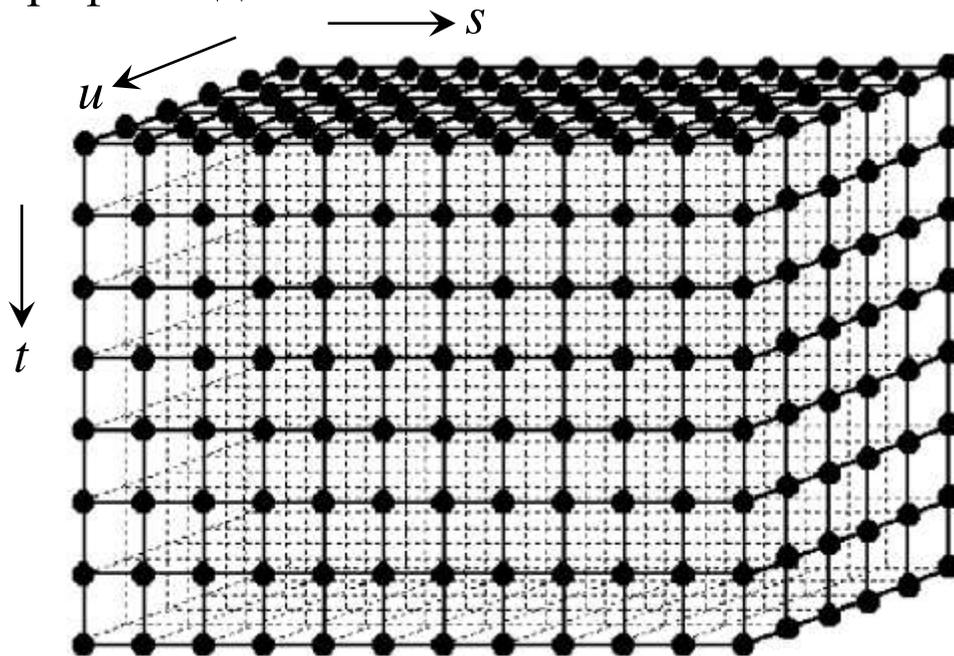
Локальные признаки сейсмической картины (показаны как интенсивности трех основных цветов)

Тело коллектора – фрагмент пространства со специфической текстурой сейсмической картины

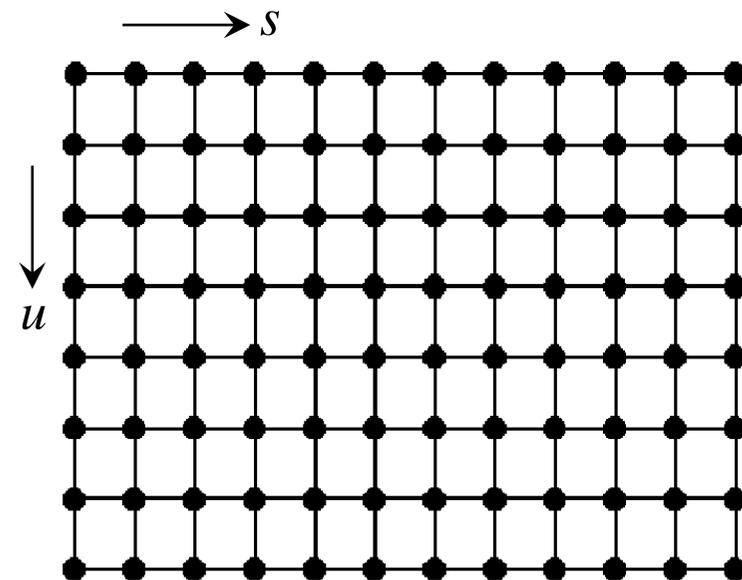
Дискретная структура фрагмента подземной среды: Прямоугольная решетка соседства элементов массива пространственных данных

Упорядоченное множество точек массива $T = \{\mathbf{t} = (s, u, t)\}$

Граф соседства элементов массива $G \subset T \times T$, $(t', t'') \in G$ – соседние элементы



трехмерная $\mathbf{t} = (s, u, t)$



двумерная $\mathbf{t} = (s, u)$

Массив (поле) сейсмических данных $Y = (y_{\mathbf{t}}, \mathbf{t} \in T)$, $y_{\mathbf{t}} \in \mathbb{R}$

Поле локальной признаков текстуры $Z = (\mathbf{z}_{\mathbf{t}}, \mathbf{t} \in T)$, $\mathbf{z}_{\mathbf{t}} = (z_{\mathbf{t}}^1 \cdots z_{\mathbf{t}}^n) \in \mathbb{R}^n$

Поле предполагаемого типа породы $X = (x_{\mathbf{t}}, \mathbf{t} \in T)$, $x_{\mathbf{t}} \in \mathbb{X} = \{-1, 1\} = \{\text{неколлектор}, \text{коллектор}\}$

Модель коллекторских свойств подземной среды

Скрытое бинарное случайное поле локальных коллекторских свойств

$$X = (x_t, \mathbf{t} \in T), \quad \mathbf{t} = (s, u, t),$$

$$x_t \in \{-1, 1\} = \{\text{неколлектор, коллектор}\}$$

Предположение 1. Известно совместное априорное распределение значений скрытого поля

$$q(X), \quad X \in \mathcal{X}, \quad |\mathcal{X}| = 2^{|T|}$$

Частные априорные вероятности значений:
 $q_t(x), \quad x \in \{-1, 1\}, \quad \mathbf{t} \in T, \quad q_t(1) + q_t(-1) = 1$

Наблюдаемое случайное поле локальных текстурных свойств сейсмической картины

$$Z = (\mathbf{z}_t, \mathbf{t} \in T), \quad \mathbf{t} = (s, u, t), \quad \mathbf{z}_t \in \mathbb{R}^n$$

Предположение 2. Наблюдаемое случайное поле образовано условно независимыми векторами признаков текстуры. Распределение каждого из них определяется только значением соответствующего элемента скрытого поля

$$\varphi(Z | X) = \prod_{\mathbf{t} \in T} \psi_{\mathbf{t}}(\mathbf{z}_t | x_t)$$

Апостериорные вероятности значений скрытого поля после наблюдения одного значения наблюдаемого поля:
 $p_t(x_t | z_t) \propto q_t(x_t) \psi_{\mathbf{t}}(\mathbf{z}_t | x_t)$

Теорема. Апостериорное скрытое случайное поле полностью определяется совместными априорными и индивидуальными апостериорными вероятностями его значений

$$\pi(X | Z) \propto p(X) \prod_{\mathbf{t} \in T} \frac{p_{\mathbf{t}}(x_{\mathbf{t}} | \mathbf{z}_{\mathbf{t}})}{q_{\mathbf{t}}(x_{\mathbf{t}})}$$

Решение о реализации скрытого поля: $\hat{X}(Z) = \arg \max_{X \in \mathcal{X}} \left\{ \log p(X) + \sum_{\mathbf{t} \in T} \log \frac{p_{\mathbf{t}}(x_{\mathbf{t}} | \mathbf{z}_{\mathbf{t}})}{q_{\mathbf{t}}(x_{\mathbf{t}})} \right\}$

Решение о скрытом поле коллекторских свойств по наблюдаемому полю локальных признаков текстуры пространственной сейсмической картины

Теорема. Апостериорное скрытое случайное поле полностью определяется совместными априорными и индивидуальными апостериорными вероятностями его значений

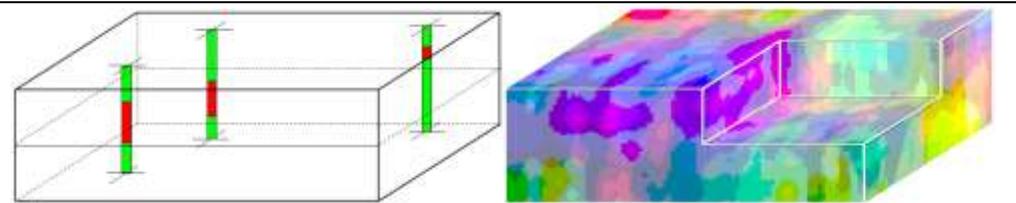
$$\pi(X | Z) \propto p(X) \prod_{t \in T} \frac{p(x_t | \mathbf{z}_t)}{q(x_t)}$$

Оценка реализации скрытого поля: $\hat{X}(Z) = \arg \max_{X \in \mathcal{X}}$

$$\left[\underbrace{\log \frac{p(X)}{\prod_{t \in T} q(x_t)}}_{?(2)} + \sum_{t \in T} \underbrace{\log p(x_t | \mathbf{z}_t)}_{?(1)} \right]$$

?(1) Обучение по скважинным данным

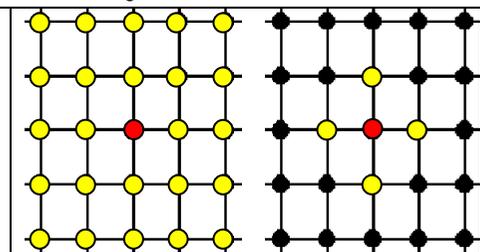
$$p(x_t | \mathbf{z}_t) = \begin{cases} p(x_t=1(\text{коллектор}) | \mathbf{z}_t) \\ p(x_t=-1 | \mathbf{z}_t) = 1 - p(x_t=1 | \mathbf{z}_t) \end{cases}$$



?(2) Предположение о марковском свойстве априорного скрытого случайного поля

Условное распределение значения поля X в точке x_t относительно оставшейся его части $X_{(t)}$ зависит только от значений в соседних точках $X_{(t)}^0 = \{x_s, s \in T, (s, t) \in G\}$

$$q(x_t | X_{(t)}) = q(x_t | X_{(t)}^0)$$



Зоны коллекторов имеют достаточно большие пространственные размеры

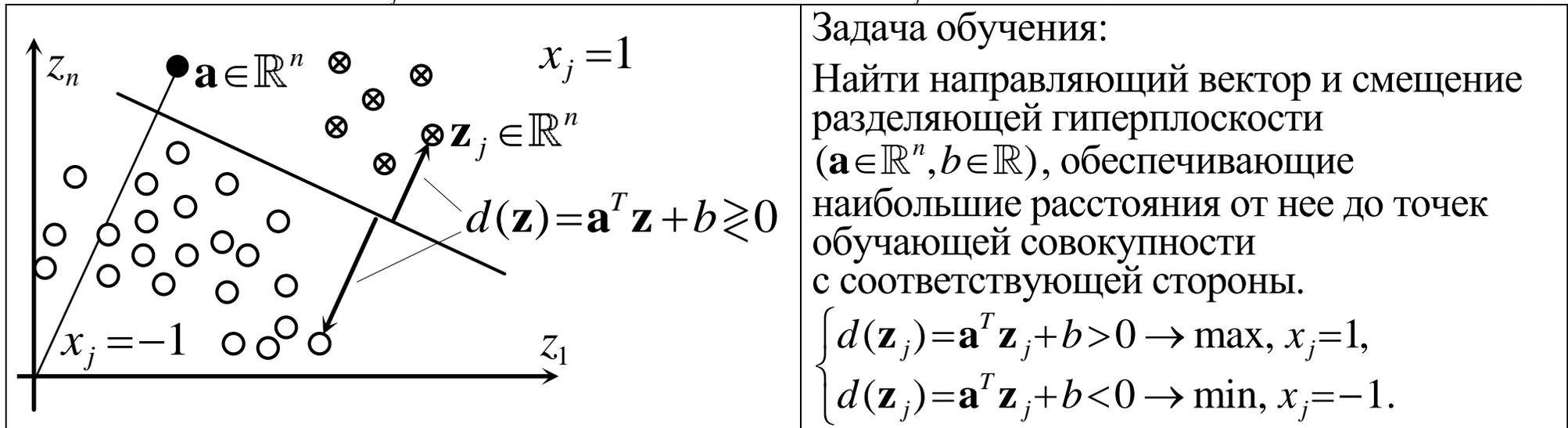
Вероятность $q(x_t | X_{(t)}^0)$ велика, если индекс x_t совпадает с большинством точек в $X_{(t)}^0$

(1) Обучение по скважинным данным

Данные «учителя»:

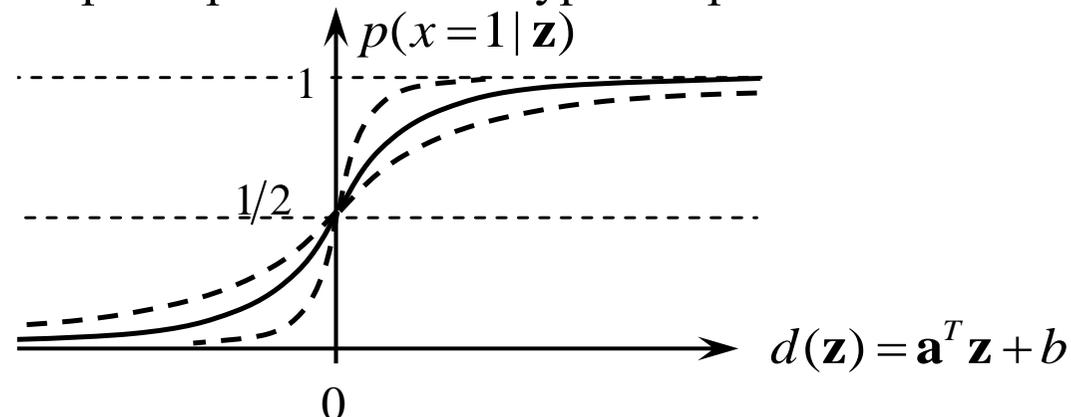
$$\left((\mathbf{z}_{t_j}, x_{t_j}), j = 1, \dots, K \right),$$

$\mathbf{z}_{t_j} \in \mathbb{R}^n$ – локальная текстура, $x_{t_j} \in \{-1, 1\} = \{\text{неколлектор, коллектор}\}$



Метод опорных векторов, метод логистической регрессии.

Логистическая функция $p(x=1|\mathbf{z})$, интерпретируемая как вероятность того, что точка подземной среды с вектором признаков текстуры \mathbf{z} принадлежит области коллектора



(2) Марковское свойство апостериорного скрытого случайного поля

Ранее принятые предположения:

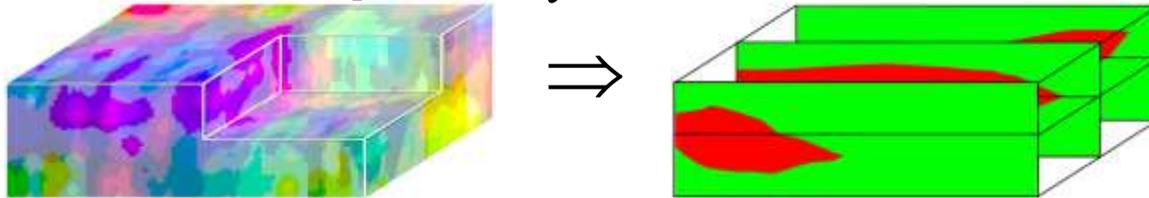
Марковское свойство априорного скрытого случайного поля X : $q(x_t | X_{(t)}) = q(x_t | X_{(t)}^0)$.

Условная независимость поля признаков текстуры Z : $\varphi(Z | X) = \prod_{t \in T} \psi_t(\mathbf{z}_t | x_t)$.

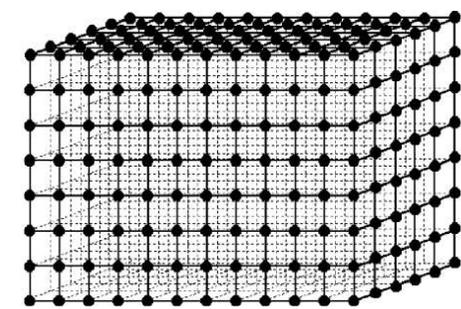
Теорема. При этих предположениях апостериорное скрытое случайное поле $(X | Z)$ остается марковским: $\pi_t(x_t | X_{(t)}, Z) = \pi(x_t | X_{(t)}, \mathbf{z}_t) \propto q(x_t | X_{(t)}^0) p(x_t | \mathbf{z}_t)$ относительно принятого графа смежности $G \subset T \times T$.

Итак, если известна реализация поля локальных параметров текстуры сейсмической картины Z , то полностью определено неоднородное марковское случайное поле скрытых свойств среды $\pi(X | Z)$.

Однако для произвольного графа смежности элементов массива поиск апостериори наиболее вероятной комбинации индексов $\hat{X}(Z) = \arg \max \pi(X | Z)$ представляет собой чрезвычайно сложную задачу глобальной оптимизации.



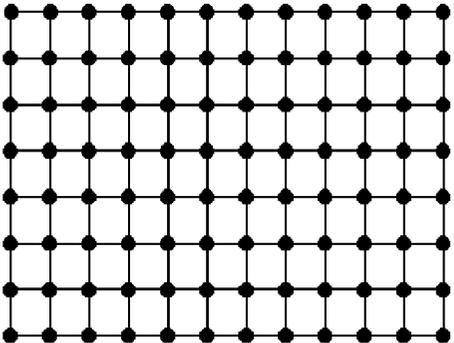
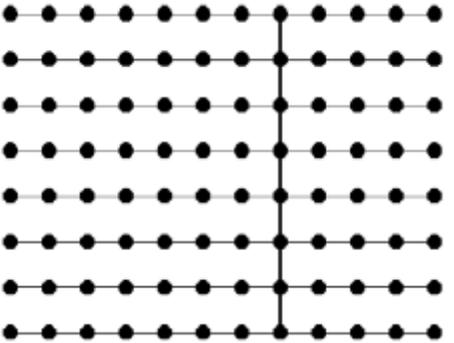
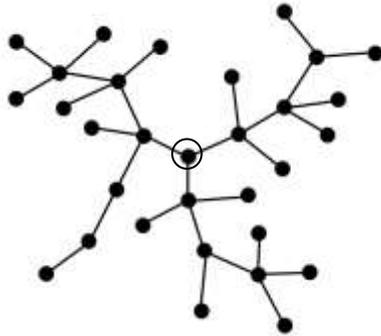
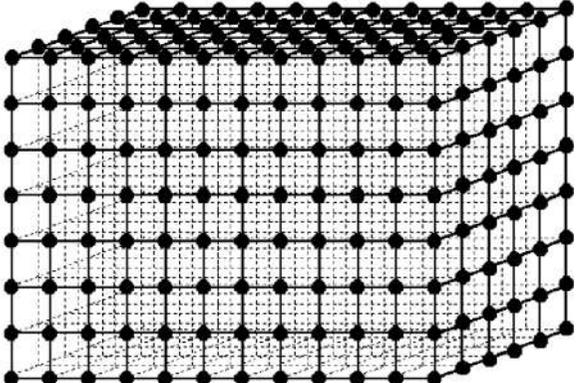
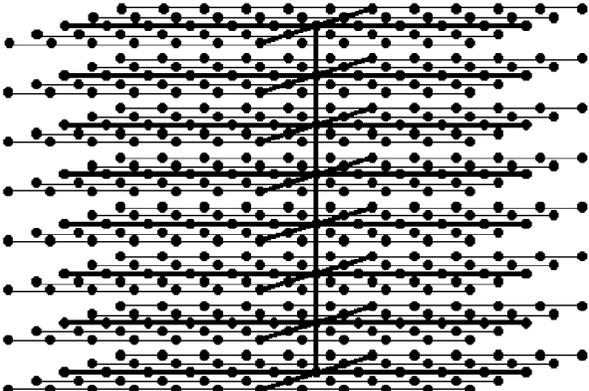
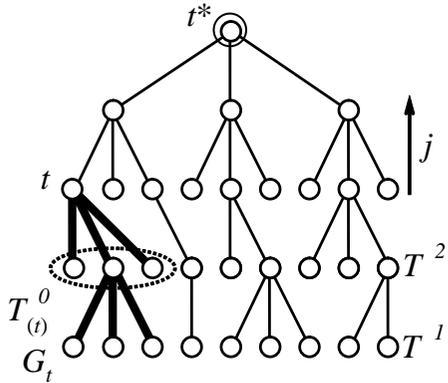
Прямоугольная решетка не является исключением



Известные методы:
Iterated Conditional Modes (ICM)
Stochastic Relaxation
Simulated Annealing

Эти методы очень медленно сходятся, поскольку требуют большого числа случайных итераций для предупреждения «залипания» в локальных максимумах.

Частный случай: Граф смежности элементов массива без циклов – дерево

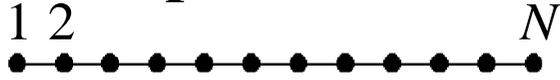
Исходная решетка	Дерево смежности для каждой вертикальной строки	
		
		
<p>Простейший вид дерева – цепь</p>		

Марковская модель скрытого случайного поля – эргодичная обратимая марковская цепь.

Переходные вероятности	Финальные вероятности
$\left(\begin{array}{c c} q(x_t=1 x_{t-1}=1)=1-\alpha & q(x_t=-1 x_{t-1}=1)=\alpha \\ \hline q(x_t=1 x_{t-1}=-1)=\beta & q(x_t=-1 x_{t-1}=-1)=1-\beta \end{array} \right)$	$\begin{array}{l} 0 < \eta(x=1)=\beta/(\alpha+\beta) < 1, \quad 0 < \alpha < 1 \\ 0 < \eta(x=-1)=\alpha/(\alpha+\beta) < 1, \quad 0 < \beta < 1 \end{array}$

Вспомогательная задача: Оценивание скрытого поля в одномерном сечении подземной среды

Строка массива (горизонтальная либо вертикальная) $t = 1 \ 2 \dots N$



Исходная информация:

- 1) Марковская цепь случайных значений скрытого процесса $\eta(x)$, $q(x_t | x_{t-1})$, $x \in \mathbb{X} = \{-1, 1\}$
- 2) Локальные апостериорные вероятности значений скрытого процесса $p(x_t | \mathbf{z}_t)$

Решение о реализации скрытого поля в отдельной строке:

$$\hat{X}(Z) = \arg \max_{X \in \mathcal{X}} J(X | Z) = \arg \max_{x_1, \dots, x_N} J(x_1, \dots, x_N | \mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_N)$$

$J(X Z) = \sum_{t=1}^N \underbrace{\log \frac{p(x_t \mathbf{z}_t)}{q(x_t)}}_{\text{узловые функции}} + \sum_{t=1}^N \underbrace{\log q(x_t x_{t-1})}_{\text{функции связи}}$	<p>Парно-сепарабельная целевая функция $x_t \in \{-1, 1\}$</p> <p>Процедура динамического программирования</p>
------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Вспомогательная задача: Оценивание скрытого поля в одномерном сечении подземной среды

Строка массива (горизонтальная либо вертикальная) $t=1 \ 2 \ \dots \ N$
 Решение о реализации скрытого поля в отдельной строке:

$$\hat{X}(Z) = \arg \max_{X \in \mathcal{X}} J(X | Z) = \arg \max_{x_1, \dots, x_N} J(x_1, \dots, x_N | \mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_N)$$

$J(X Z) = \sum_{t=1}^N \underbrace{\log \frac{p(x_t \mathbf{z}_t)}{q(x_t)}}_{\text{узловые функции}} + \sum_{t=1}^N \underbrace{\log q(x_t x_{t-1})}_{\text{функции связи}}$	Парно-сепарабельная целевая функция $x_t \in \{-1, 1\}$ Процедура динамического программирования
------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------

Цель: Для всех $t=1, 2, \dots, N$ найти маргинальные функции, показывающие зависимость условного минимума целевой функции от фиксированного значения t -й переменной

$$\hat{J}_t(x) = \max_{x_1, \dots, x_{t-1}, x_{t+1}, \dots, x_N} J(x_1, \dots, x_{t-1}, x, x_{t+1}, \dots, x_N)$$

Прямой ход $t=1, 2, \dots, N$: Последовательное вычисление и запоминание функций Беллмана $J_t(x)$, $x \in \{-1, 1\}$

$$J_0(x) \equiv 0, \quad J_t(x) = \log \frac{p(x | \mathbf{z}_t)}{q(x)} + \min_{x_{t-1}} [\log q(x | x_{t-1}) + J_{t-1}(x_{t-1})].$$

Обратный ход $t=N-1, N-2, \dots, 1$: Последовательное вычисление и запоминание маргинальных функций $\hat{J}_t(x)$, $x \in \{-1, 1\}$

$$\hat{J}_t(x) = \min_{x_{t+1}} \left\{ \hat{J}_{t+1}(x_{t+1}) + [J_t(x) + \log q(x, x_{t+1})] - \min_{x'} [J_t(x') + \gamma_{t+1}(x', x_{t+1})] \right\}$$

Решение: $\hat{x}_t = \arg \max \hat{J}_t(x)$

Алгоритм оценивания скрытого поля в трехмерном массиве

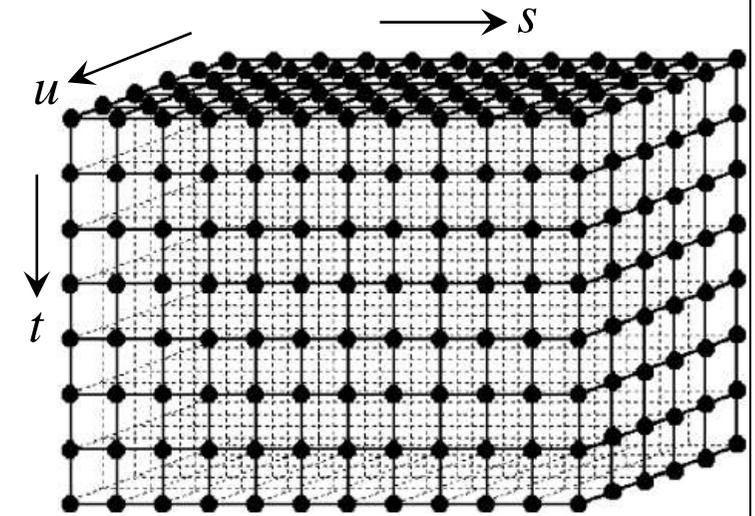
Применим процедуру динамического программирования ко всем горизонтальным строкам во фронтальном направлении $u=1, 2, \dots, N^{fp}$, сохранив в узлах решетки $\mathbf{t}=(s, u, t)$ маргинальные функции $\hat{J}_t^{fp}(x)$.

Затем применим эту же процедуру к горизонтальным строкам в боковом направлении $s=1, 2, \dots, N^{бок}$,

используя функции $\hat{J}_t^{fp}(x)$ вместо узловых $\log \frac{p(x|\mathbf{z}_t)}{q(x)}$,

и запомним новые маргинальные функции $\hat{J}_t^{бок}(x)$.

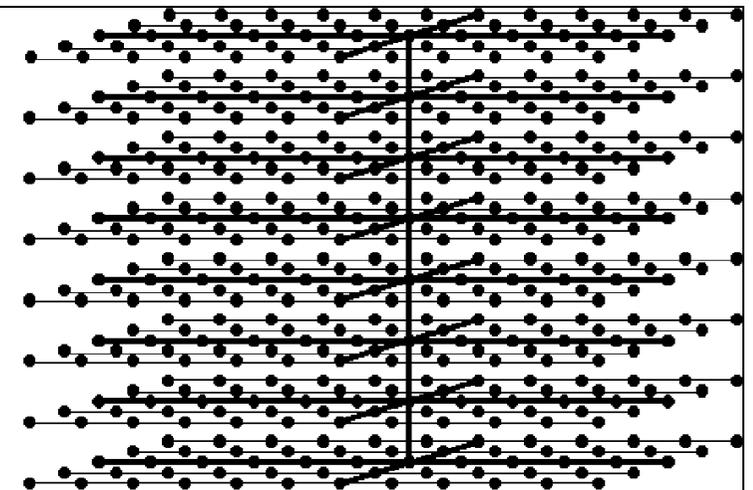
Наконец, сделаем то же самое во всех вертикальных строках $t=1, 2, \dots, N^{вер}$.



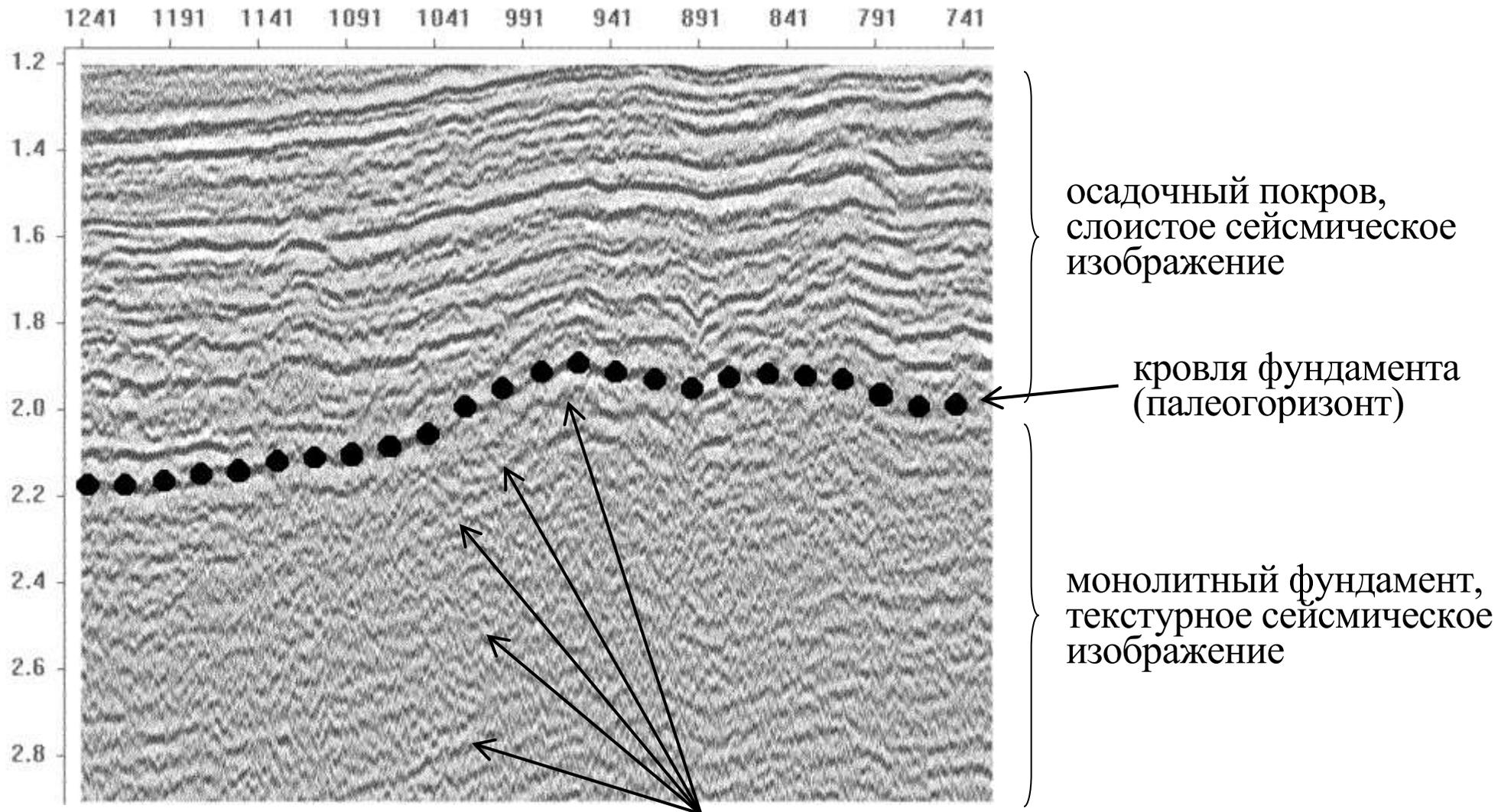
Результат: Во всех узлах трехмерной решетки $\mathbf{t}=(s, u, t)$ определены маргинальные функции $\hat{J}_t(x)$.

С каждым узлом свяжем значение скрытого поля $\hat{x}_t = \arg \max \hat{J}_t(x)$.

Теорема. В каждой вертикальной строке массива найденные значения \hat{x}_t , $\mathbf{t}=(s, u, t)$, являются решениями задачи оценивания скрытого поля для древовидного графа смежности.

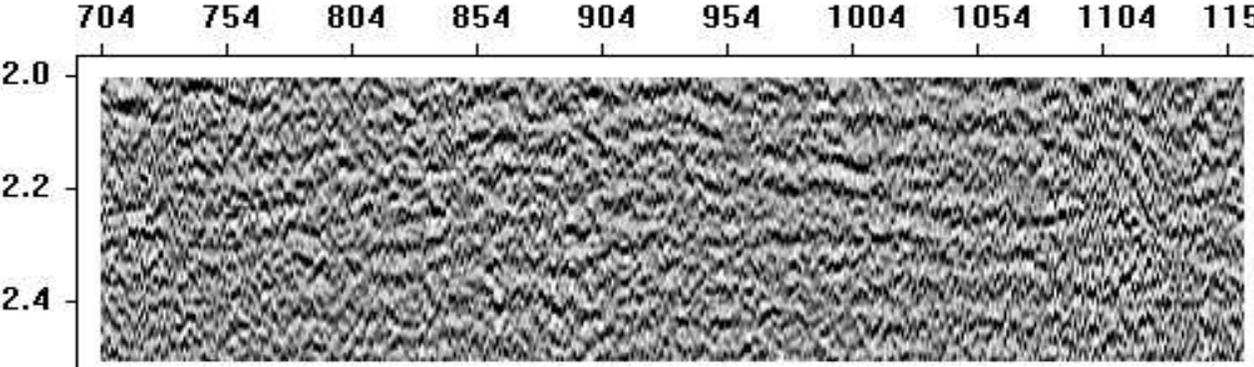
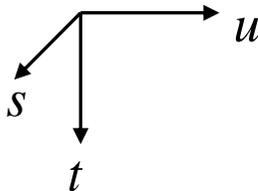
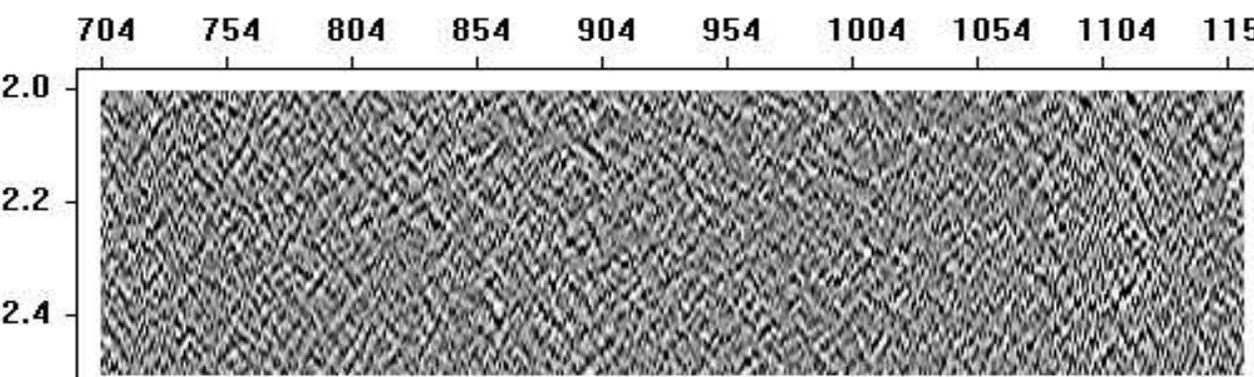


Слоистый осадочный покров и монолитный фундамент земной коры



Проблема подавления кратных отражений от границ вышележащих осадочных слоев

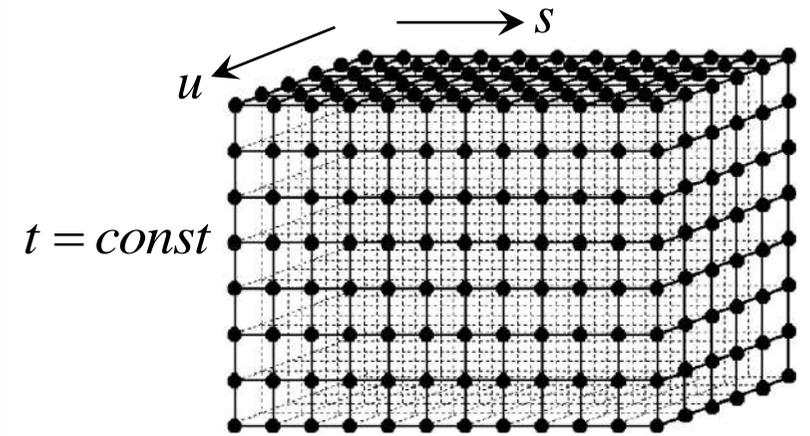
Подавление кратных отражений

	<p>Фрагмент вертикального сейсмического разреза, выровненного по поверхности палеогоризонта</p>
 <p>Исходный сигнал y_{sut}</p>	<p>1) Сглаживание в палеогоризонтальном направлении</p> $\bar{Y}_t = \arg \min_{\substack{y'_{sut}, u=1, \dots, N^{\text{бок}} \\ s=1, \dots, N^{\text{фп}}}} \left\{ \sum_{s=1}^{N^{\text{бок}}} \sum_{u=1}^{N^{\text{фп}}} (y'_{sut} - y_{sut})^2 + \alpha \sum_{s=2}^{N^{\text{бок}}} \sum_{u=1}^{N^{\text{фп}}} (y'_{s-1, ut} - y'_{sut})^2 + \alpha \sum_{s=1}^{N^{\text{бок}}} \sum_{u=2}^{N^{\text{фп}}} (y'_{s, u-1, t} - y'_{sut})^2 \right\}$ <p>2) Вычитание сглаженного сигнала из исходного</p> $\hat{y}_{sut} = y_{sut} - \bar{y}_{sut}$
	<p>Тот же фрагмент после предварительной обработки, направленной на подавление кратных отражений</p>

Сглаживание двумерного поля

Сглаживание в палеогоризонтальной плоскости

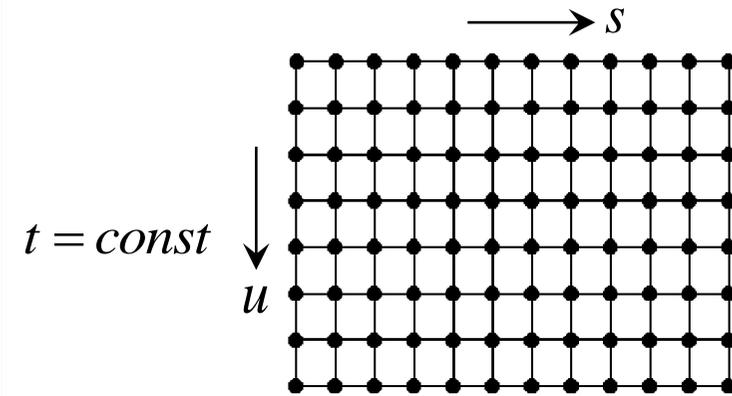
$$\bar{Y}_t = \arg \min_{\substack{y'_{ust} \\ u=1, \dots, N^{\text{бок}}, s=1, \dots, N^{\text{фп}}}} \left\{ \sum_{s=1}^{N^{\text{бок}}} \sum_{u=1}^{N^{\text{фп}}} (y'_{sut} - y_{sut})^2 + \right. \\ \left. \alpha \sum_{s=2}^{N^{\text{бок}}} \sum_{u=1}^{N^{\text{фп}}} (y'_{s-1, ut} - y'_{sut})^2 + \alpha \sum_{s=1}^{N^{\text{бок}}} \sum_{u=2}^{N^{\text{фп}}} (y'_{s, u-1, t} - y'_{sut})^2 \right\}$$



Сглаживание двумерного поля

Сглаживание в палеогоризонтальной плоскости

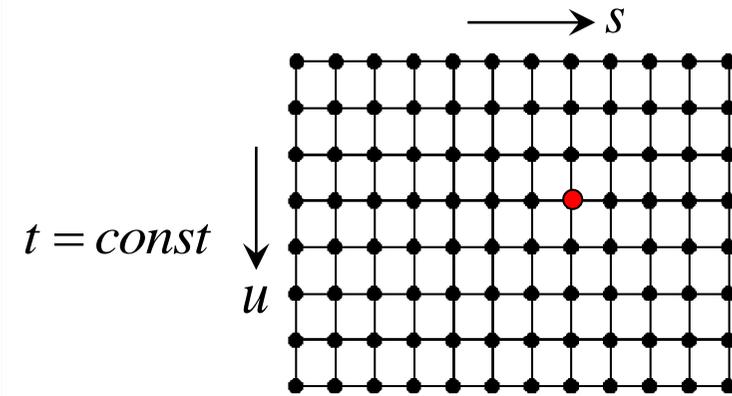
$$\bar{Y}_t = \arg \min_{\substack{y'_{ust} \\ u=1, \dots, N^{\text{бок}}, s=1, \dots, N^{\text{фп}}}} \left\{ \sum_{s=1}^{N^{\text{бок}}} \sum_{u=1}^{N^{\text{фп}}} (y'_{sut} - y_{sut})^2 + \right. \\ \left. \alpha \sum_{s=2}^{N^{\text{бок}}} \sum_{u=1}^{N^{\text{фп}}} (y'_{s-1,ut} - y'_{sut})^2 + \alpha \sum_{s=1}^{N^{\text{бок}}} \sum_{u=2}^{N^{\text{фп}}} (y'_{s,u-1,t} - y'_{sut})^2 \right\}$$



Сглаживание двумерного поля

Сглаживание в палеогоризонтальной плоскости

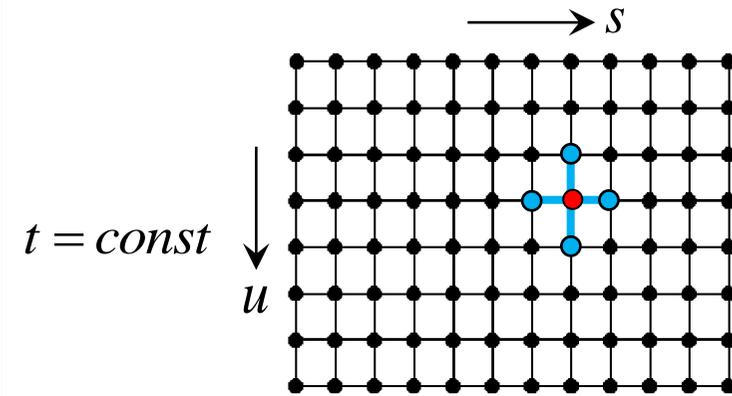
$$\bar{Y}_t = \arg \min_{\substack{y'_{ust} \\ u=1, \dots, N^{\text{бок}}, s=1, \dots, N^{\text{фп}}}} \left\{ \sum_{s=1}^{N^{\text{бок}}} \sum_{u=1}^{N^{\text{фп}}} \underbrace{(y'_{sut} - y_{sut})^2}_{\text{узловые функции}} + \right. \\ \left. \alpha \sum_{s=2}^{N^{\text{бок}}} \sum_{u=1}^{N^{\text{фп}}} (y'_{s-1,ut} - y'_{sut})^2 + \alpha \sum_{s=1}^{N^{\text{бок}}} \sum_{u=2}^{N^{\text{фп}}} (y'_{s,u-1,t} - y'_{sut})^2 \right\}$$



Сглаживание двумерного поля

Сглаживание в палеогоризонтальной плоскости

$$\bar{Y}_t = \arg \min_{\substack{y'_{ust} \\ u=1, \dots, N^{\text{бок}}, s=1, \dots, N^{\text{фп}}}} \left\{ \sum_{s=1}^{N^{\text{бок}}} \sum_{u=1}^{N^{\text{фп}}} \underbrace{(y'_{sut} - y_{sut})^2}_{\text{узловые функции}} + \right. \\ \left. \alpha \sum_{s=2}^{N^{\text{бок}}} \sum_{u=1}^{N^{\text{фп}}} \underbrace{(y'_{s-1,ut} - y'_{sut})^2}_{\text{функции связи}} + \alpha \sum_{s=1}^{N^{\text{бок}}} \sum_{u=2}^{N^{\text{фп}}} \underbrace{(y'_{s,u-1,t} - y'_{sut})^2}_{\text{функции связи}} \right\}$$



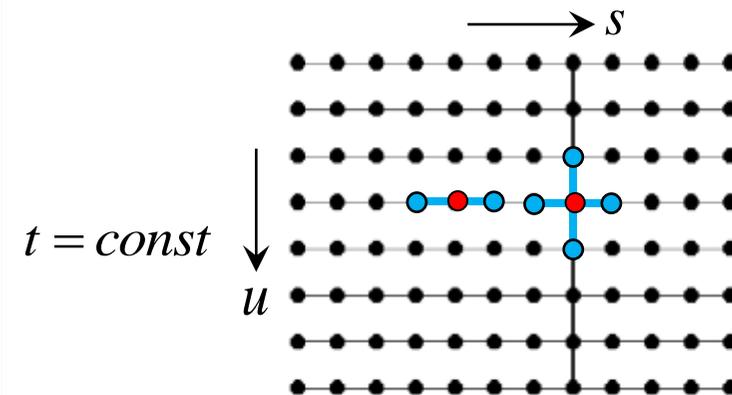
Задача решения системы линейных уравнений. Число переменных и уравнений $N^{\text{фп}} N^{\text{бок}}$.
Замена решетки деревом:

Парно-сепарабельная задача относительно дерева G_t :

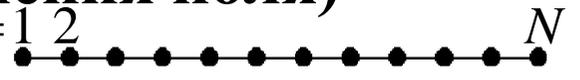
$$\bar{Y}_t = \arg \min_{\bar{y}_{ust}, (s,u) \in T_t} \left[\sum_{(s,u) \in T_t} \underbrace{(\bar{y}_{sut} - y_{sut})^2}_{\text{узловые функции}} + \alpha \sum_{((s'u), (su)) \in G_t} \underbrace{(\bar{y}_{s'ut} - \bar{y}_{sut})^2}_{\text{функции связи}} \right]$$

Система уравнений имеет трехдиагональную матрицу и решается методом прогонки.

Эквивалентная терминология – квадратичное динамическое программирование, фильтр-интерполятор Калмана-Бьюси.



Вспомогательная задача: Сглаживание числовой последовательности (одномерного сечения поля)

Строка массива $Y_{t=const} = (y_1, \dots, y_N)$ (например, горизонтальная) 

$J(\bar{Y} Y) = \sum_{s=1}^N \underbrace{(\bar{y}_s - y_s)^2}_{\text{узловые функции}} + \sum_{s=1}^N \underbrace{(\bar{y}_{s-1} - \bar{y}_s)^2}_{\text{функции связи}} \rightarrow \min$	Парно-сепарабельная целевая функция $\bar{y}_t, y_t \in \mathbb{R}$ Процедура динамич. программирования
---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Цель: Для всех $s=1, 2, \dots, N$ найти маргинальные функции, показывающие зависимость условного минимума целевой функции от фиксированного значения s -й переменной

$$J_{s|N}(\bar{y}) = \max_{\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{s-1}, \bar{y}_{s+1}, \dots, \bar{y}_N} J(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{s-1}, \bar{y}, \bar{y}_{s+1}, \dots, \bar{y}_N)$$

Прямой ход $s=1, 2, \dots, N$: Последовательное вычисление и запоминание функций Беллмана $J_{s|s}(\bar{y}), \bar{y} \in \mathbb{R}$

$$J_{0|0}(\bar{y}) \equiv 0, \quad J_s(\bar{y}) = (\bar{y} - y_{s|s})^2 + \min_{\bar{y}_{s-1}} \left[(\bar{y}_{s-1} - \bar{y})^2 + J_{s-1}(\bar{y}_{s-1|s-1}) \right].$$

Все функции Беллмана квадратичны $J_{s|s}(\bar{y}) = b_{s|s} + a_{s|s}(\bar{y} - \bar{y}_{s|s})^2$, парам. $(b_{s|s}, a_{s|s}, \bar{y}_{s|s}) \in \mathbb{R}^3$

Обратный ход $s=N-1, N-2, \dots, 1$: Последовательное вычисление и запоминание маргинальных функций $\hat{J}_{s|N}(\bar{y}), \bar{y} \in \mathbb{R}$

$$J_{s|N}(\bar{y}) = \min_{\bar{y}''} \left\{ \hat{J}_{s+1|N}(\bar{y}'') + [J_s(\bar{y}) + \log q(\bar{y}, \bar{y}'')] - \min_{\bar{y}'} [J_t(\bar{y}') + \log q(\bar{y}', \bar{y}'')] \right\}$$

Маргинальные функции квадратичны $J_{s|N}(\bar{y}) = b_{s|N} + a_{s|N}(\bar{y} - \bar{y}_{s|N})^2$, $(\hat{b}_{s|N}, \hat{a}_{s|N}, \hat{y}_{s|N}) \in \mathbb{R}^3$

Сглаженные значения: $\bar{y}_{s|N} = \arg \min J_{s|N}(\bar{y})$

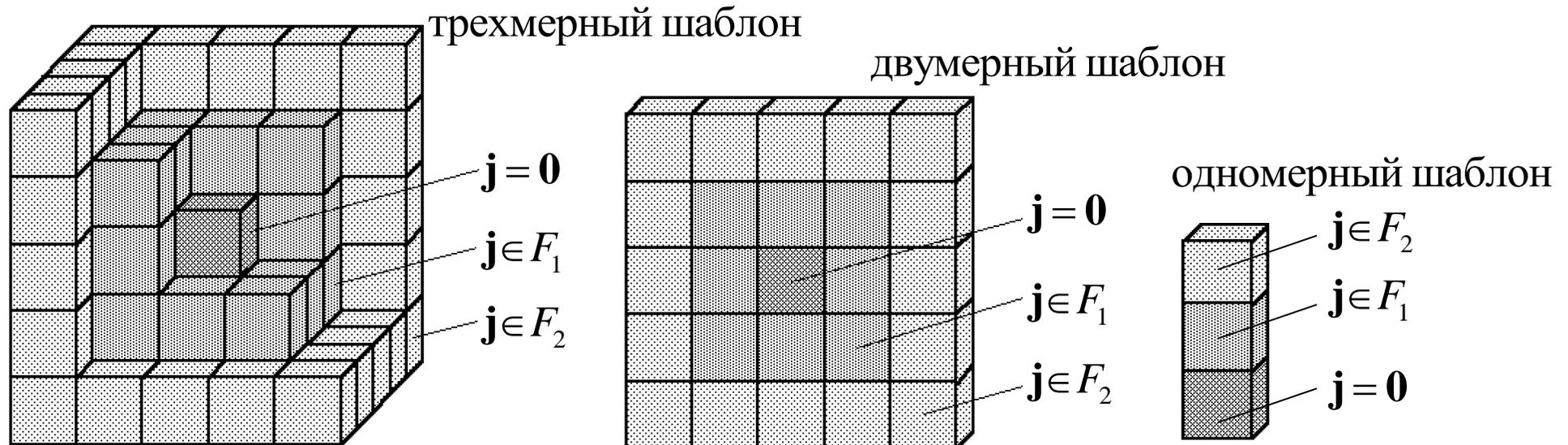
Модель локальной текстуры сейсмической картины: Пространственная авторегрессия с плавно изменяющимися параметрами

Массив сейсмических данных $Y = (y_t, \mathbf{t} \in T)$, $\mathbf{t} = (s, u, t)$ – отдельная точка массива. Трехмерное случайное поле, представляемое марковской моделью пространственной авторегрессии

$$y_t = \sum_{\mathbf{j} \in F} a_t^{(\mathbf{j})} y_{t+\mathbf{j}} + \sigma_t \xi_t, \quad \xi_t \text{ – стандартный белый шум, } M(\xi_{t'} \xi_{t''}) = 0, \mathbf{t}' \neq \mathbf{t}'', M(\xi_t^2) = 1$$

F – шаблон авторегрессии,

$[\mathbf{a}_t = (a_t^{(\mathbf{j})}, \mathbf{j} \in F), \sigma_t]$, $\mathbf{t} = (s, u, t)$ – вектор параметров локальной модели авторегрессии



Массив параметров локальной авторегрессии $((\mathbf{a}_t, \sigma_t), \mathbf{t} \in T)$.

Вектор $(\mathbf{a}_t, \sigma_t) \in \mathbb{R}^{m+1}$ плавно изменяется в пространстве $\mathbf{t} = (s, u, t) \in T$.

Массив параметров локальной текстуры $Z = (\mathbf{z}_t, \mathbf{t} \in T)$, $\mathbf{t} = (s, u, t)$, $\mathbf{z}_t \in \mathbb{R}^n$

Математическое определение трехмерного поля локальных параметров пространственной авторегрессии

Массив сейсмических данных $Y = (y_t, \mathbf{t} \in T)$, $\mathbf{t} = (s, u, t)$ – отдельная точка массива.

Модель пространственной авторегрессии второго порядка

$$y_t = \sum_{j=1}^2 a_t^{(j)} \bar{y}_{t, F_j} + \sigma_t \xi_t$$

\bar{y}_{t, F_j} – среднее значение сейсмического сигнала в окрестности F_j точки $\mathbf{t} = (s, u, t)$

$[\mathbf{a}_t = (a_t^{(1)}, a_t^{(2)}) \in \mathbb{R}^2, \sigma_t]$ – локальная модель авторегрессии в точке $\mathbf{t} = (s, u, t)$.

Априорное предположение: Вектор $\mathbf{a}_t \in \mathbb{R}^m$ плавно изменяется в пространстве $\mathbf{t} \in T$.

G :

$\|\mathbf{a}_{t'} - \mathbf{a}_{t''}\|^2 \rightarrow 0,$
 $(\mathbf{t}', \mathbf{t}'') \in G$

$$\hat{\mathbf{A}} = (\hat{\mathbf{a}}_t \in \mathbb{R}^2, \mathbf{t} = (s, u, t) \in T) = \arg \min_{\mathbf{a}_t, \mathbf{t} = (s, u, t) \in T} \left\{ \sum_{s=1}^{N^s} \sum_{u=1}^{N^u} \sum_{t=1}^{N^t} \left(y_{sut} - \sum_{j=1}^2 a_{sut}^{(j)} \bar{y}_{sut, F_j} \right)^2 + \right.$$

$$\left. \alpha \sum_{s=2}^{N^s} \sum_{u=1}^{N^u} \sum_{t=1}^{N^t} \|\mathbf{a}_{s-1, ut} - \mathbf{a}_{sut}\|^2 + \alpha \sum_{s=1}^{N^s} \sum_{u=2}^{N^u} \sum_{t=1}^{N^t} \|\mathbf{a}_{s, u-1, t} - \mathbf{a}_{sut}\|^2 + \beta \sum_{s=1}^{N^s} \sum_{u=1}^{N^u} \sum_{t=2}^{N^t} \|\mathbf{a}_{su, t-1} - \mathbf{a}_{sut}\|^2 \right\}$$

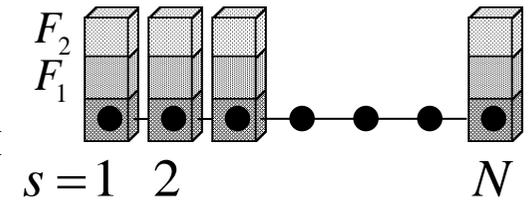
Задача минимизации квадратичной функции с $2|T| = 2N^s N^u N^t$ переменными. Решение соответствующей системы линейных уравнений. Вычислительно нереализуемая задача.

Вспомогательная задача: Авторегрессия с параметрами, плавно изменяющимися в одномерном сечении поля

Строка шаблонов авторегрессии (например, горизонтальная)

Неизвестная последовательность коэффициентов авторегрессии

$$A = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_N), \quad \mathbf{a}_s \in \mathbb{R}^2.$$



$J(A Y) = \sum_{s=1}^N \underbrace{\left(y_s - \sum_{j=1}^2 a_s^{(j)} \bar{y}_{s,F_j} \right)^2}_{\phi_s(\mathbf{a}_s) - \text{квадратичные узловые функции}} + \alpha \sum_{s=1}^N \underbrace{\ \mathbf{a}_{s-1} - \mathbf{a}_s\ ^2}_{\text{функции связи}}$	<p>Парно-сепарабельная целевая функция $\mathbf{a}_s \in \mathbb{R}^2$</p> <p>Процедура динамич. программирования</p>
-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Цель: Для всех $s=1, 2, \dots, N$ найти маргинальные функции, показывающие зависимость условного минимума целевой функции от фиксированного значения t -й переменной

$$J_{s|N}(\mathbf{a}) = \max_{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{s-1}, \mathbf{a}_{s+1}, \dots, \mathbf{a}_N} J(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{s-1}, \mathbf{a}, \mathbf{a}_{s+1}, \dots, \mathbf{a}_N)$$

Прямой ход $s=1, 2, \dots, N$: Последовательное вычисление и запоминание функций

Беллмана $J_{s|s}(\mathbf{a}), \mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$

$$J_{0|0}(\mathbf{a}) \equiv 0, \quad J_{s|s}(\bar{\mathbf{y}}) = \phi_s(\mathbf{a}) + \min_{\mathbf{a}'} \left[\alpha \|\mathbf{a}' - \mathbf{a}\|^2 + J_{s-1|s-1}(\mathbf{a}') \right].$$

Функции Беллмана квадратичны $J_{s|s}(\mathbf{a}) = b_{s|s} + (\mathbf{a} - \mathbf{a}_{s|s})^T \mathbf{C}_{s|s} (\mathbf{a} - \mathbf{a}_{s|s}), \quad (b_{s|s}, \mathbf{a}_{s|s} \in \mathbb{R}^2, \mathbf{C}_{s|s} (2 \times 2))$

Вспомогательная задача: Авторегрессия с параметрами, плавно изменяющимися в одномерном сечении поля

Неизвестная последовательность коэффициентов авторегрессии

$$A = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_N), \quad \mathbf{a}_s \in \mathbb{R}^2.$$

Цель: Для всех $s=1, 2, \dots, N$ найти маргинальные функции, показывающие зависимость условного минимума целевой функции от значения s -й переменной

$$J_{s|N}(\mathbf{a}) = \max_{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{s-1}, \mathbf{a}_{s+1}, \dots, \mathbf{a}_N} J(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{s-1}, \mathbf{a}, \mathbf{a}_{s+1}, \dots, \mathbf{a}_N)$$

Прямой ход $s=1, 2, \dots, N$: Последовательное вычисление и запоминание функций Беллмана $J_{s|s}(\mathbf{a}), \mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$

$$J_{0|0}(\mathbf{a}) \equiv 0, \quad J_{s|s}(\bar{\mathbf{y}}) = \phi_s(\mathbf{a}) + \min_{\mathbf{a}'} \left[\alpha \|\mathbf{a}' - \mathbf{a}\|^2 + J_{s-1|s-1}(\mathbf{a}') \right].$$

Функции Беллмана квадратичны $J_{s|s}(\mathbf{a}) = b_{s|s} + (\mathbf{a} - \mathbf{a}_{s|s})^T \mathbf{C}_{s|s} (\mathbf{a} - \mathbf{a}_{s|s})$, $(b_{s|s}, \mathbf{a}_{s|s} \in \mathbb{R}^2, \mathbf{C}_{s|s} (2 \times 2))$

Обратный ход $s=N-1, N-2, \dots, 1$: Последовательное вычисление и запоминание маргинальных функций $J_{s|N}(\mathbf{a}), \mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$

$$J_{s|N}(\mathbf{a}) = \min_{\mathbf{a}''} \left\{ J_{s+1|N}(\mathbf{a}'') + \left[J_s(\mathbf{a}) + \|\mathbf{a} - \mathbf{a}''\|^2 \right] - \min_{\mathbf{a}'} \left[J_s(\mathbf{a}') + \|\mathbf{a}' - \mathbf{a}''\|^2 \right] \right\}$$

Маргинальные функции квадратичны $J_{s|N}(\mathbf{a}) = b_{s|N} + (\mathbf{a} - \mathbf{a}_{s|N})^T \mathbf{C}_{s|N} (\mathbf{a} - \mathbf{a}_{s|N})$, $(b_{s|N}, \mathbf{a}_{s|N}, \mathbf{C}_{s|N})$.

Плавно изменяющиеся параметры авторегрессии: $\mathbf{a}_{s|N} = \arg \min J_{s|N}(\mathbf{a})$.

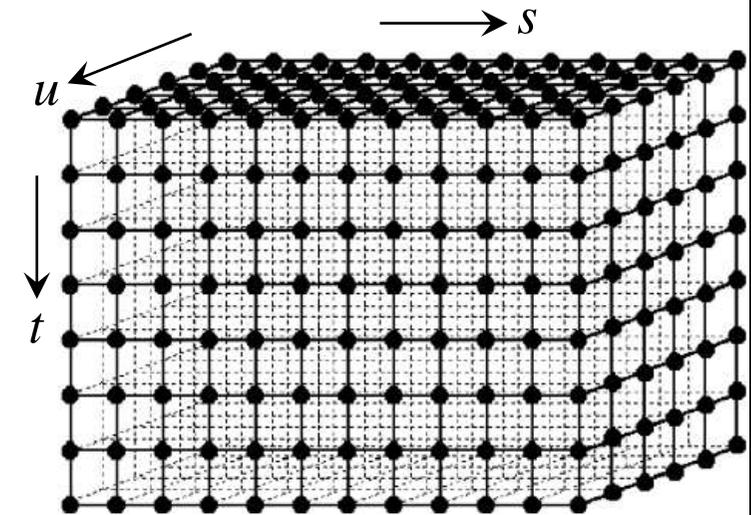
Процедура динамического программирования в точности совпадает с фильтром-интерполятором Калмана-Бьюси.

Алгоритм оценивания трехмерного поля авторегрессии

Применим фильтр-интерполятор Калмана-Бьюси ко всем горизонтальным строкам во фронтальном направлении $u=1, 2, \dots, N^{\text{фр}}$, сохранив в узлах решетки $\mathbf{t}=(s, u, t)$ маргинальные функции $J_t^{\text{фр}}(\mathbf{a})$.

Затем применим эту же процедуру к горизонтальным строкам в боковом направлении $s=1, 2, \dots, N^{\text{бок}}$, используя функции $J_t^{\text{фр}}(\mathbf{a})$ вместо узловых $\phi_t(\mathbf{a})$, и запомним новые маргинальные функции $J_t^{\text{бок}}(\mathbf{a})$.

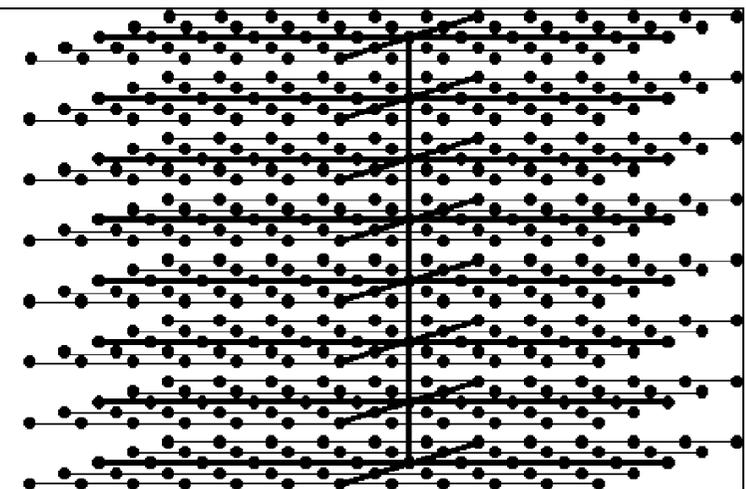
Наконец, сделаем то же самое во всех вертикальных строках $t=1, 2, \dots, N^{\text{вер}}$.



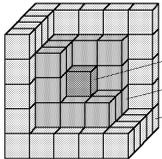
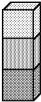
Результат: Во всех узлах трехмерной решетки $\mathbf{t}=(s, u, t)$ определены маргинальные функции $J_t(\mathbf{a})$.

С каждым узлом свяжем локальное значение вектора параметров авторегрессии $\hat{\mathbf{a}}_t = \arg \min J_t(\mathbf{a})$.

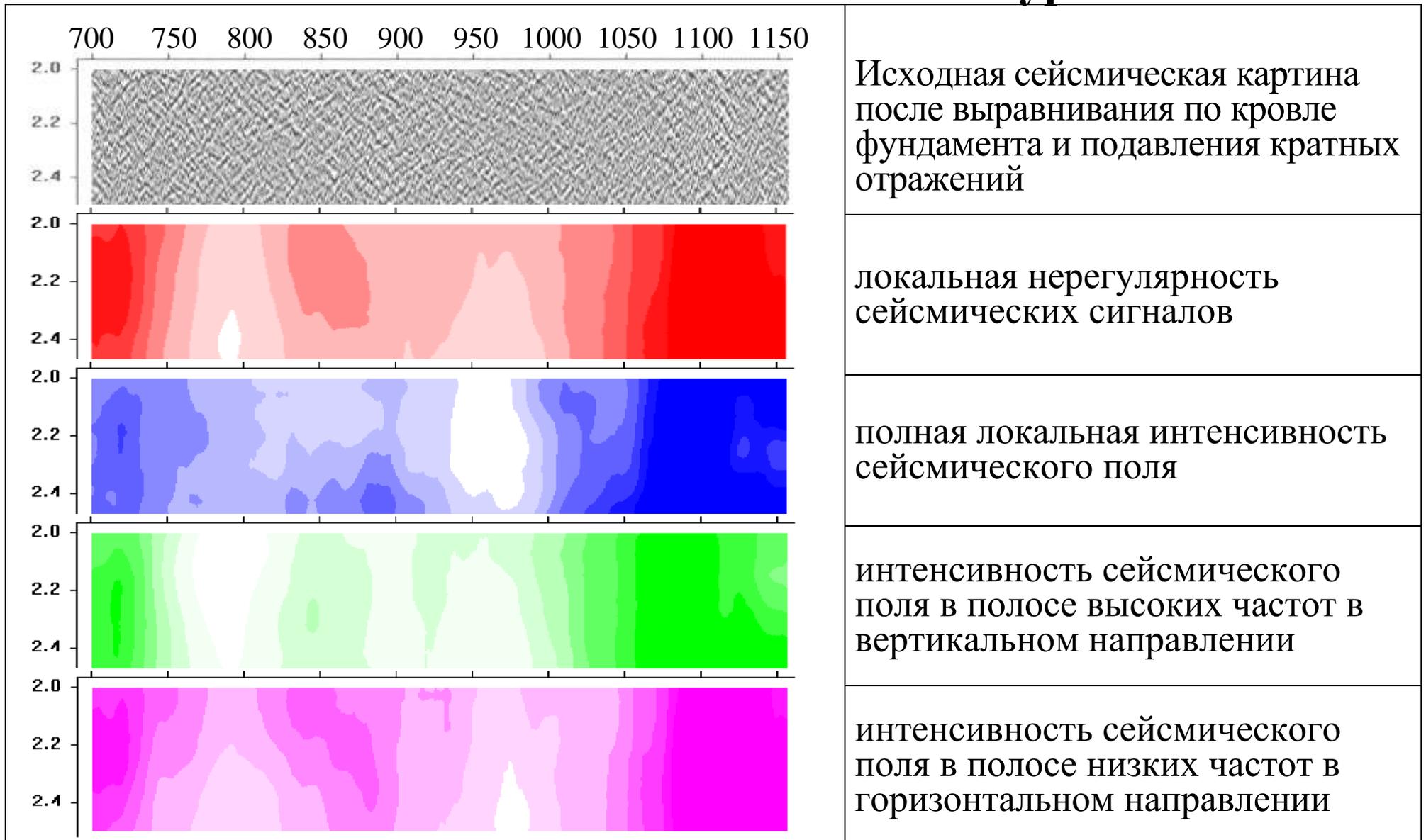
Теорема. В каждой вертикальной строке массива найденные значения $\hat{\mathbf{a}}_t$, $\mathbf{t}=(s, u, t)$, являются решениями задачи оценивания поля параметров авторегрессии для древовидного графа смежности.



Текстурные параметры сейсмической картины, отличающие трещиновато-кавернозные зоны от монолитных (параметры рассеянной компоненты сейсмического поля)

Локальные параметры пространственной текстуры	Зоны коллекторов	Зоны монолитной породы
<p>Нерегулярность сейсмического сигнала</p> 	<p>Повышенное значение коэффициента шума трехмерной авторегрессии σ_t</p>	<p>Пониженное значение коэффициента шума трехмерной авторегрессии σ_t</p>
<p>Интенсивность сейсмического сигнала</p> 	<p>Повышенная дисперсия вертикальной авторегрессии d_t</p>	<p>Пониженная дисперсия трехмерной авторегрессии d_t</p>
<p>Спектр вертикальных частот</p> 	<p>Высокая дисперсия в высоко- частотном диапазоне $d_t^{верт} (1/6, 1/2)$</p>	<p>Низкая дисперсия в высоко- частотном диапазоне $d_t^{верт} (1/6, 1/2)$</p>
<p>Спектр горизонтальных частот</p>  	<p>Высокая дисперсия в низко- частотном диапазоне $d_t^{верт} (0, 1/6)$</p>	<p>Низкая дисперсия в низко- частотном диапазоне $d_t^{верт} (0, 1/6)$</p>

Четыре признака слабо различимых локальных особенностей сейсмической текстуры



Данные "учителя" и карта найденных зон коллекторов на глубине 300 м под кровлей кристаллического фундамента месторождения Бомбей Хай в Индии

