Лекция 2. Одномерная минимизация

Курс «Методы оптимизации в машинном обучении»

28 сентября 2015 г.

Схема метода золотого сечения

Вход: Интервал $[x_{L,0}, x_{U,0}]$, точность ε;
Выход: Точка и значение минимума x_{min}, f_{min};

Инициализация $K = (\sqrt{5} - 1)/2$, $I_0 = x_{U,0} - x_{L,0}$;
$I_1 = KI_0$, $x_{b,1} = x_{L,0} + I_1$, $x_{a,1} = x_{U,0} - I_1$;
Вычислить $f_{a,1} = f(x_{a,1})$, $f_{b,1} = f(x_{b,1})$;
для $k = 1, \ldots, \#iter$
  $I_{k+1} = KI_k$;
  если $f_{a,k} \geq f_{b,k}$ **то**
    $x_{L,k+1} = x_{a,k}$, $x_{U,k+1} = x_{U,k}$, $x_{a,k+1} = x_{b,k}$,
    $x_{b,k+1} = x_{L,k+1} + I_{k+1}$;
    $f_{a,k+1} = f_{b,k}$, $f_{b,k+1} = f(x_{b,k+1})$;
  иначе
    $x_{L,k+1} = x_{L,k}$, $x_{U,k+1} = x_{b,k}$, $x_{a,k+1} = x_{U,k+1} - I_{k+1}$,
    $x_{b,k+1} = x_{a,k}$;
    $f_{a,k+1} = f(x_{a,k+1})$, $f_{b,k+1} = f_{a,k}$;
если $I_{k+1} < \varepsilon$ **то**
  $f_{min} = \min(f_{a,k+1}, f_{b,k+1})$, $x_{min} = \arg\min(f_{a,k+1}, f_{b,k+1})$;

Схема комбинированного метода Брента

Вход: (a, b, c), $f_b < f_a$, $f_b < f_c$;
Выход: Точка и значение минимума x_{min}, f_{min};
Инициализация $x = w = v = b$, $f_x = f_w = f_v = f_b$;
пока Итерации до сходимости
если Значения f_x, f_w, f_v – разные **то**
Параболическая аппроксимация, находим u;
если u находится внутри $[a, c]$, отстоит от границы минимум на ε и отстоит от x максимум на половину от длины предпредыдущего шага **то**
Принимаем u;
иначе
Находим u с помощью золотого сечения бОльшего из интервалов $[a, x]$ и $[x, c]$;
Вычисляем $f_u = f(u)$;
Модифицируем все величины по четверке (a, u, x, c);

Схема комбинированного метода Брента с производными

Вход: (a, b, c), $f_b < f_a$, $f_b < f_c$;

Выход: Точка и значение минимума x_{min}, f_{min};

Инициализация $x = w = v = b$, $f_x = f_w = f_v = f_b$, $f'_x = f'_w = f'_v = f'_b$;

пока Итерации до сходимости

если $f'_x \neq f'_w$ **то**

Параболическая апроксимация по f'_x, f'_w, находим u_1;

если u_1 находится внутри (a, c), согласуется с f'_x и находится от x не далее половины длины предпредыдущего шага **то**

Принимаем u_1 как кандидата на следующую точку;

если $f'_x \neq f'_v$ **то**

Аналогичн. параболическая апроксимация по f'_x, f'_v, находим u_2;

если u_1 или u_2 являются кандидатами **то**

u есть u_1 или u_2, соответствующее минимуму длины шага;

иначе

Находим u путем деления отрезка (a, x) или (x, c) пополам в зависимости от знака f'_x;

Вычисляем $f_u = f(u)$ и $f'_u = f'(u)$;

Модифицируем все величины по четверке (a, u, x, c);