Поиск минимальной функциональной категории по набору прецедентов

Александр Кульков
Научный руководитель: Академик РАН К. В. Рудаков
19 июня 2020 г.

Московский физико-технический институт

Постановка

Категория

Класс **объектов**, такой что:

1. Для каждой пары объектов задано $\hom(A, B)$;
2. Если $f \in \hom(A, B)$ и $g \in \hom(B, C)$, то $g \circ f \in \hom(A, C)$;
3. Для любого A задан тождественный $\mathrm{id}_A \in \hom(A, A)$.

Примеры

1. Объекты – множества, морфизмы – отображения;
2. Объекты – лин. пространства, морфизмы – лин. отображения;
3. Объекты – группы, морфизмы – гомоморфизмы групп.

Постановка

Функциональная сигнатура

Набор $\varphi = (S_1, \ldots, S_n, \lambda)$, где:

1. $\lambda : \{1, 2, \ldots, n\} \mapsto \{1, 2, \ldots, t\}$;
2. Если $\lambda_i = \lambda_j$, то $|S_i| = |S_j| = z(\lambda_i)$;
3. $S_i = \xi_1^{(i)}, \ldots, \xi_{z(\lambda_i)}^{(i)}$ – *упорядоченные* области зависимости.

φ-отображение

Такое отображение $f : \mathbb{Z}^n \mapsto \mathbb{Z}^n$, что:

$$f(a)_j = f_{\lambda_j}(a_{\xi_1^{(j)}}, \ldots, a_{\xi_{z(\lambda_j)}^{(j)}})$$

Где $f_1, \ldots, f_t$ – набор функций, таких что $f_k : \mathbb{Z}^{z(\lambda_k)} \mapsto \mathbb{Z}$.

Постановка

Примеры φ-отображений

1. Скользящее среднее: $f(a)_k = \frac{a_{k-1}+a_k+a_{k+1}}{3}$;
2. Умножение на скаляр: $f(a)_k = s \cdot a_k$;
3. Линейное преобразование: $f(a)_k = \sum_{j=1}^{n} A_{kj} a_j$.

Функциональная категория

Категория, морфизмами которой являются φ-отображения.

Задача

Дан набор пар $(A_1, B_1), \dots, (A_m, B_m)$, где $A_k, B_k \in \mathbb{Z}^n$.

Построить сигнатуру φ, такую что $t \to \min$ и $|S_1| + \dots + |S_n| \to \min$ и при этом существует φ-отображение f, такое что $f(A_k) = B_k$.

Категориальность

Критерий категориальности

φ-отображения образуют морфизмы некоторой категории *iff*:

1. $i \in S_i$ для любого i;
2. Если $\lambda_i = \lambda_j$, то $i = \xi_k^{(i)} \iff j = \xi_k^{(j)}$;
3. Если $i \in S_j$, то $S_i \subset S_j$;
4. Если $\lambda_i = \lambda_j$, то $\lambda_{\xi_k^{(i)}} = \lambda_{\xi_k^{(j)}}$ для всех k;
5. Если $\lambda_i = \lambda_j$, то $\xi_{k_1}^{(\xi_k^{(i)})} = \xi_{k_2}^{(i)} \iff \xi_{k_1}^{(\xi_k^{(j)})} = \xi_{k_2}^{(j)}$.

Примеры

1. Умножение на скаляр: порождает категорию;
2. Скользящее среднее: не порождает категорию.

Категориальность

Графовый критерий

Рассмотрим ориентированный граф G, в котором $i \mapsto j$ если $j \in S_i$.

1. Граф транзитивно замкнут (если $a \mapsto b$ и $b \mapsto c$, то $a \mapsto c$);
2. λ_i интерпретируются как цвета вершин графа;
3. Если $\lambda_i = \lambda_j$, то подграфы i и j – изоморфны.

Подграф i – граф, порождённый достижимыми из i вершинами.

Симметрическая сигнатура

Сигнатура, в которой S_i – неупорядочены. Интерпретации:

1. Функции $f_1, \ldots, f_t$ – симметрические: не порождает категорию;
2. Порядок в $\xi^{(i)}$ задаётся вместе с конкретным отображением.

Построение сигнатуры

Основные этапы

1. Выделение областей зависимости;
2. Выделение одинаковых функций;
3. Выделение изоморфных подграфов.

Выделение областей зависимости

1. Экспертная оценка;
2. Анализ линейной и статистической независимости;
3. Взятие транзитивного замыкания.

Выделение одинаковых функций

Постановка

Даны матрицы X, Y такие что $x_{ij} \in \mathbb{Z}^d$ и $y_{ij} \in \mathbb{Z}$. Нужно разбить строки матриц на t блоков, чтоб k-му блоку соответствовала f_k такая что $f_k(x_{ij}) = y_{ij}$ для всех i из блока. При этом $t \mapsto \min$.

NP-полнота

Пусть $d = 1$. Сведём задачу о хроматическом числе графа.

1. $x_{ij} = x_{ji} = n \cdot i + j$, где n – число вершин в графе;
2. $y_{ij} = 0$, $y_{ji} = 1$ если между (i, j) есть ребро;
3. $y_{ij} = 1$, $y_{ji} = 1$ если между (i, j) нет ребра.

Считаем, что $i < j$ и вершины нумеруются $0, 1, \ldots, n - 1$.

Выделение изоморфных подграфов

Постановка

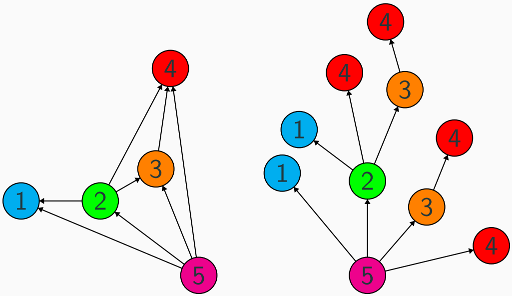
Дан транзитивно-замкнутый орграф. Для некоторых пар вершин известно, могут ли они быть одинаково окрашены. Нужно покрасить граф в наименьшее число цветов, чтобы подграфы вершин одинакового цвета были изоморфны друг другу.

Решение

Считаем граф ациклическим.

1. Рассматриваем вершины по увеличению размера подграфа;
2. Сравниваем подграфы для определения изоморфизма;
3. Решаем предыдущую задачу внутри классов эквивалентности.

Развёртка графов



Проверка изоморфизма

- В общем случае трудна;
- Решаема для частных случаев;
- Сравниваем не подграфы, а древесные схемы.

Заключение

Результаты

- Исследована задача построения минимальных сигнатур;
- Показана NP-полнота рассматриваемой задачи;
- Предложен эвристический алгоритм решения.

Планируется

- Исследовать синхронизацию компонент сильной связности;
- Рассмотреть использование сокращения вместо замыкания.

Спасибо

Спасибо за внимание!