Выбор суперпозиции моделей при прогнозировании грузовых железнодорожных перевозок

Двинских Дарина Михайловна

Московский физико-технический институт
Факультет управления и прикладной математики
Кафедра «Интеллектуальные системы»

Научный руководитель д.ф.-м.н., В. В. Стрижов

2016 г.

Цель исследования

Задача

Построить оптимальную систему моделей для краткосрочного прогнозирования объемов железнодорожных грузовых перевозок

Проблема

- Отсутствие единой прогностической модели
- Большая волатильность временных рядов
- Наличие нулевых объемов перевозок

Требования к моделям

- Валидность
- Устойчивость
- Полнота

Литература

- *Ю.И. Журавлев, К.В. Рудаков, А.Д. Корчагин, М.П. Кузнецов, А.П. Мотренко, С.С. Стенина, В.В. Стрижов,* Создание системы прогнозирования объемов сроса на грузовые железнодорожные перевозки, 2016
- *К.В. Рудаков, М.П. Кузнецов, А.П. Мотренко, М.М. Стенина, Д.О.Каширин, В.В. Стрижов,* Выбор отимальной модели прогнозирования грузовых железнодорожных перевозок, 2015

Определение

Суперпозиция

$\mathbf{x} = \{x_i\}_{i=1}^{T}$ — временной ряд,
f и g - две базовые функции прогнозирования
(f прогнозирует ряд, а g – его остатки)

$$f : T \to \varepsilon, g : \varepsilon \to X$$

Тогда функция

$$s = f \circ g,$$

определенная равенством $f \circ g(\varepsilon) = g(f)(\mathbf{t})$, и такая, что $T \to X$, называется **суперпозицией** функций f и g

Описание выборки

Посуточная загруженность железнодорожных путей:

$$\mathbf{X} = \{\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^{T}\}$$

Вектор x_i имеет 8 компонент

1. дата погрузки
2. код станции отправления
3. код станции назначения
4. количество вагонов
5. код груза
6. род вагона
7. суммарный вес груза
8. признак маршрутной отправки

Регрессионный анализ

$D = \{t_i, x_i\}_{i=1}^{T}$ — регрессионная выборка, t_i — временные метки, x_i — объемы грузовых перевозок
Предположение, накладываемое на значения выборки

$$x_i = s(\mathbf{w}, t_i) + \epsilon(t_i),$$

где $\hat{\mathbf{w}}$ — вектор оптимальных параметров, $\epsilon_i = \epsilon(t_i)$ — ошибка

$$\epsilon_i = s(\hat{\mathbf{w}}, t_i) - x_i$$

Требуется построить прогноз на t значений ряда вперед

$$\hat{x}_{T+h} = s(\hat{\mathbf{w}}, t),$$

где h — горизонт прогнозирования

Функция ошибки $S(\mathbf{w}|F, D)$ — функция, значение которой требуется минимизировать для получения оценок параметров $w \in \mathfrak{R}_{\mathfrak{s}}$ модели $s \in \mathfrak{F}$.

$$\hat{s}, \hat{\mathbf{w}} = \arg\min_{\mathbf{w}} \sum_{t \in \mathcal{T}} S(\mathfrak{F}, \mathfrak{R}_{\mathfrak{s}}),$$

$\mathrm{MAE} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |\epsilon_i|$

$\mathrm{MAPE} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\epsilon_i}{x_i}\right|$

$\mathrm{PMAD} = \sum_{i=1}^{n} |\epsilon_i| \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|\right)^{(-1)}$

$\mathrm{MSE} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i^2$

$\mathrm{RMSE} = \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i^2}$

$SS = 1 - \frac{MSE_{forecast}}{MSE_{history}}$

Анализ регрессионных остатков

1. Равенство нулю матожидания $\mathsf{E}(\epsilon) = 0$
2. Постоянство дисперсии $\mathsf{D}(\epsilon) = \sigma^2$
3. Нормальность остатков $\epsilon \backsim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$

Скользящее среднее

$$z_t = \frac{x_t + x_{t+1} + \ldots + x_{t+n-1}}{n} = \sum_{i=0}^{n-1} x_{t+i},$$

где n — ширина окна

$$\hat{x}_{T+h} = z_T$$

Экспоненциальное сглаживание

$$z_t = \alpha x_t + (1-\alpha) z_{t-1},$$

где $\mathbf{x}$ — исходный ряд, $\mathbf{z}$ — сглаженный ряд, α — параметр сглаживания ряда, $\alpha \in (0, 1)$.

$$\hat{x}_{T+h} = z_T$$

Метод Кростена

$\mathbf{d} = \{d_t\}_{t=1}^{T}$ — ненулевой спрос исходного временного ряда $\mathbf{x}$,

$\mathbf{q} = \{q_t\}_{t=1}^{T}$ — интервалы между ненулевым спросом ряда $\mathbf{x}$

Экспоненциальное сглаживания обоих рядов

$$z_t = \alpha d_t + (1-\alpha) z_{t-1}$$

$$p_t = \alpha q_t + (1-\alpha) p_{t-1}$$

$$\hat{x}_{T+h} = \frac{z_T}{p_T}$$

Модель ARIMA(p, d, q)

$$\triangle^d x_t = c + \sum_{i=1}^{p} a_i \triangle^d x_{t-i} + \sum_{j=1}^{q} b_j \varepsilon_{t-j} + \epsilon_t,$$

где ϵ_t - стационарный временной ряд;
c, a_i, b_j - параметры модели;
$\triangle^d$ - оператор разности временного ряда порядка d.

Модель VAR

$$Y = XW,$$

где матрица X — матрица объектов-признак, W — матрица весов, Y — матрица ответов.

$$W = (X^T X)^{-1} X^T Y$$

Тогда прогноз находится как

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x} W$$

Таблица: Сопоставление различных прогностических моделей свойствам временных рядов

Алгоритмы	Свойства временных рядов		
	нестац.	нул. знач.	внеш. факторы
Скользящее среднее	+	+	-
Экспонен. сглаживание.	+	+	-
Метод Кростона	+	+	-
ARIMA	+	-	-
VAR	-	-	+

1. С помощью базовой функции f вычисляется $n(g)$ прогнозов конца истории $\hat{x}^f_t, ..., \hat{x}^f_{t-n(g)+1}$ на одну точку.
2. Вычисляется $n(g)$ остатков $\hat{\varepsilon}_t, ..., \hat{\varepsilon}_{t-n(g)+1}$ в виде разницы

$$\hat{\varepsilon}_{t-k} = x_{t-k} - \hat{x}^f_{t-k}.$$

3. С помощью функции g прогнозируются остатки $\hat{\varepsilon}_{t+i}$ на $\max(i)$ отсчетов вперед.
4. Выполняется итеративный подсчет конечных прогнозов

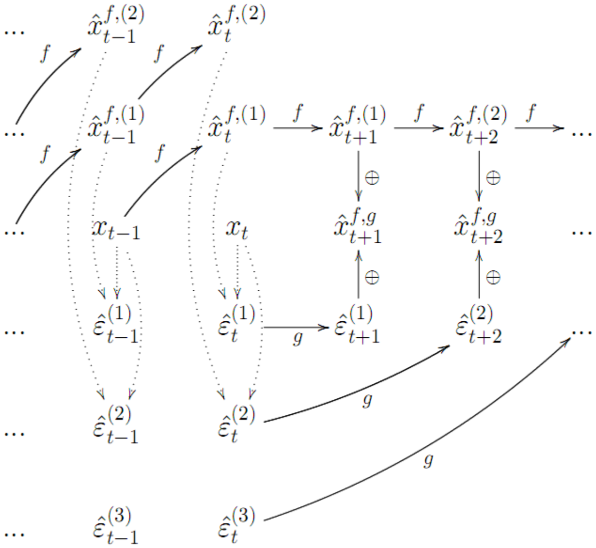
$$\hat{x}^{f,g}_{t+i} = \hat{x}^f_{t+i} + \hat{\varepsilon}_{t+i}$$

с последовательным подсчетом прогноза базовой функцией f на одну точку $\hat{x}^f_{t+i}$.

$$
\begin{tikzcd}
\dots & \hat{x}^{f}_{t-1} \arrow[dd, dotted, bend right] & \hat{x}^{f}_{t} \arrow[dd, dotted, bend right] & \hat{x}^{f}_{t+1} \arrow[d, "\oplus"] & \hat{x}^{f}_{t+2} \arrow[d, "\oplus"] & \dots \\
\dots \arrow[ur, "f"] & x_{t-1} \arrow[ur, "f"] \arrow[d, dotted] & x_{t} \arrow[ur, "f"] \arrow[d, dotted] & \hat{x}^{f,g}_{t+1} \arrow[ur, "f"] & \hat{x}^{f,g}_{t+2} \arrow[ur, "f"] & \dots \\
\dots & \hat{\varepsilon}_{t-1} & \hat{\varepsilon}_{t} \arrow[r, "g"'] & \hat{\varepsilon}_{t+1} \arrow[u, "\oplus"'] \arrow[r, "g"'] & \hat{\varepsilon}_{t+2} \arrow[u, "\oplus"'] \arrow[r, "g"'] & \dots
\end{tikzcd}
$$

1. С помощью базовой функции f вычисляется ретроспективный прогноз $\hat{x}_{t+1}^{f,(1)}, \dots, \hat{x}_{t+i}^{f,(i)}$ с горизонтом прогнозирования i, каждый — на глубине i.
2. С помощью базовой функции f вычисляется $\max(i)$ наборов прогнозов конца истории, $\hat{x}_{t}^{f,(i)}, \dots, \hat{x}_{t-n(g)+1}^{f,(i)}$, каждый набор — на глубине i, $i = 1, \dots, \max(i)$.
3. Вычисляется $\max(i)$ наборов остатков $\hat{\varepsilon}_{t}^{(i)}, \dots, \hat{\varepsilon}_{t-n(g)+1}^{(i)}$
$$\hat{\varepsilon}_{t-k}^{(i)} = x_{t-k} - \hat{x}_{t-k}^{f,(i)}, \quad i = 1, \dots, \max(i).$$
4. С помощью функции g прогнозируются остатки $\hat{\varepsilon}_{t+i}^{(i)}$, каждый прогноз выполняется на одну точку и использует вычисленную последовательность $\hat{\varepsilon}_{t}^{(i)}, \dots, \hat{\varepsilon}_{t-n(g)+1}^{(i)}$.
5. Выполняется подсчет конечных прогнозов
$$\hat{x}_{t+i}^{f,g} = \hat{x}_{t+i}^{f,(i)} + \hat{\varepsilon}_{t+i}^{(i)}.$$

Диаграмма прогнозирования исходного ряда и его остатков



Вычислительный эксперимент. Временные ряды

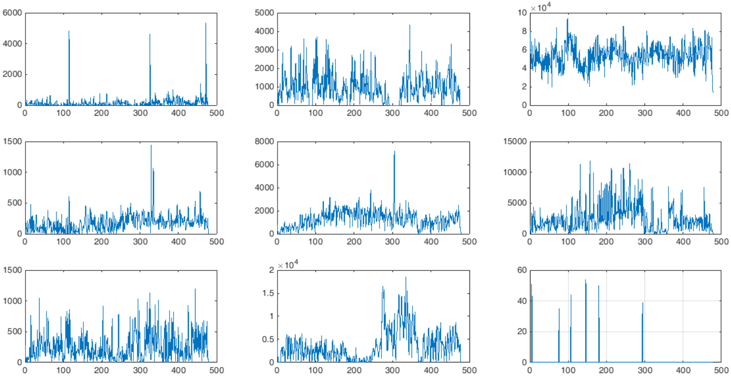
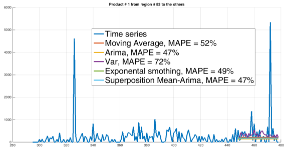
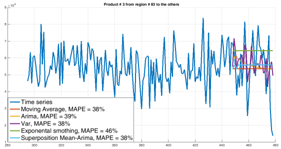
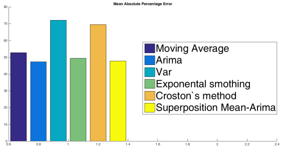
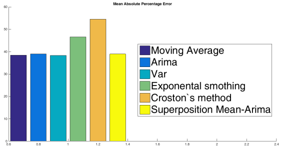


Рис.: Товары № 1, 2, 3, 12, 13, 15, 19, 30 и 34, отравленнные с 83 региона

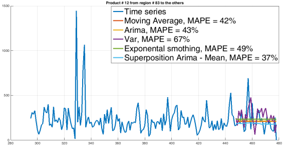

Product # 1 from region # 83 to the others
Time series
Moving Average, MAPE = 52%
Arima, MAPE = 47%
Var, MAPE = 72%
Exponental smothing, MAPE = 49%
Superposition Mean-Arima, MAPE = 47%

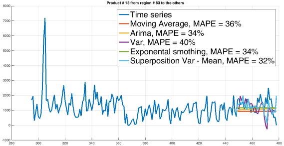

Product # 3 from region # 83 to the others
Time series
Moving Average, MAPE = 38%
Arima, MAPE = 39%
Var, MAPE = 38%
Exponental smothing, MAPE = 46%
Superposition Mean-Arima, MAPE = 38%

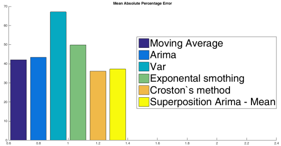

Mean Absolute Percentage Error
Moving Average
Arima
Var
Exponental smothing
Croston`s method
Superposition Mean-Arima

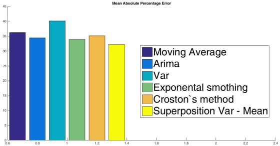

Mean Absolute Percentage Error
Moving Average
Arima
Var
Exponental smothing
Croston`s method
Superposition Mean-Arima

Вычислительный эксеримент









Заключение

- Проведена предварительная агрегация временных рядов по станциям и районам
- Выбраны базовые модели для прогнозирования с учетом специфики временных рядов
- Построены суперпозиции моделей
- Проведен вычислительный эксперимент, сравнивающий качество базовых моделей и построенных суперпозиций
- Показано, что на некоторых рядах суперпозиция работает лучше