

Часть VI

Комбинаторные методы в анализе структур (II)

Разделы

Общая комбинаторная схема

Задачи с решениями

Что ещё почитать

Мультимножества

Мультимножество — обобщение понятия множества, допускающее наличие нескольких экземпляров одного и того же элемента.

Примеры

- ▶ Мультимножество простых множителей целого числа.
Например, разложение числа 120 на простые множители имеет вид: $120 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1$, поэтому его мультимножество простых делителей есть $\{2, 2, 2, 3, 5\}$ или $\{3 * 2, 1 * 3, 1 * 5\}$.
- ▶ Мультимножество корней алгебраического уравнения.
Например, уравнение $x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0$ имеет корни $\{1, 2, 2\}$ или $\{1, 2 * 2\}$.

Если имеется бесконечное число экземпляров:

$\{ *a, *b, 5 * c \}$ — n -элементное мультимножество.

Производящая функция выбора

Пусть имеется n -элементное мультимножество, из которого берётся выборка объёма m . Тогда ПФ выбора:

$$F(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n \sum_j \alpha_{ij} x_i^j = \sum_{m_1 + \dots + m_n = m} u_{m_1, \dots, m_n} x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n},$$

где $\alpha_{ij} = 1$, если может быть выбрано j экземпляров i -го объекта и $\alpha_{ij} = 0$, иначе.

Если выбор элемента p эквивалентен r выборам элемента q , то число переменных сокращают, полагая $x_p = x_q^r$. Так все переменные могут быть выражены через одну них и в этом случае будем иметь

$$F(x) = \sum_{m \geq 0} u_m x^m.$$

Числа Белла, Стирлинга, Каталана и др. могут быть получены как частные случаи данной производящей функции.

Производящая функция выбора: пример 1

Пример 1. X — обычное (не мульти) множество.

Тогда каждый элемент может быть либо выбран, либо не выбран, т.е. $\alpha_{i0} = \alpha_{i1} = 1$, $\alpha_{i2} = \alpha_{i3} = \dots = 0$.

Следовательно

$$F(x) = (1 + x_1)(1 + x_2) \dots (1 + x_n).$$

Если нас интересует только объём выборки m , то полагаем $x_1 = \dots = x_n = x$ и

$$F(x) = (1 + x)^n = \sum_{m=0}^n C_n^m x^m,$$

т.е. таких выборов C_n^m (это мы и так знали).

Производящая функция выбора: пример 2

Пример 2. Дано мультимножество из n элементов, из которого берётся выборка объёма m , причём каждый элемент м/б выбран не более r раз, тогда

$$F(x) = (1 + x + \dots + x^r)^n = \sum_{m=0}^{nr} u_m x^m.$$

Например, $n = 3$; $A = \{ *a, *b, *c \}$, $m = 2$.

Если бы это было обычное множество, то

$$u_m = \binom{n}{m} = \binom{3}{2} = 3 : (a, b), (a, c), (b, c).$$

Если рассматривается мультмножество, то добавляются (a, a) , (b, b) , (c, c) :

$$u_m = \left(\binom{n}{m} \right) = \overline{C}_n^m \text{ и } \left(\binom{3}{2} \right) = 6.$$

Производящая функция выбора: пример 2...

Если число выборов элементов неограничено, то ПФ есть

$$F(x) = (1 + x + x^2 + \dots)^n = \frac{1}{(1-x)^n}.$$

Разлагаем данную функцию в ряд, формально рассматривая биномиальные коэффициенты при отрицательных параметрах:

$$\frac{1}{(1-x)^n} = (1-x)^{-n} = \sum_{m \geq 0} (-1)^m \binom{-n}{m} x^m = \sum_{m \geq 0} u_m x^m.$$

Итого имеем $u_m = (-1)^m \binom{-n}{m} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\binom{n}{m} \right) =$

$$= (-1)^m \frac{(-n)(-n-1)\dots(-n-m+1)}{m!} =$$

$$= \frac{(n+m-1)(n+m)\dots n}{m!} = \binom{n+m-1}{m} = C_n^m = \bar{C}_n^m.$$

Производящая функция выбора: пример 2...

В нашем случае $\overline{C}_3^2 = \binom{3}{2} = \binom{4}{2} = 6$.

\overline{C}_n^k есть также и число решений уравнения

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$$

в целых неотрицательных числах (порядок слагаемых существенен).

Представляем число k в виде набора k одинаковых шариков, лежащих на прямой, и каждому разложению числа k сопоставим расстановку на $n - 1$ палочки между шариками.

x_i = число шариков между палочками с номерами i и $i - 1$.

Вместе палочки и шарiki составляют $n + k - 1$ предмет, а назначить $n - 1$ палочек можно $C_{n+k-1}^{n-1} = C_{n+k-1}^k$ способами.

Было: число распределений n неразличимых шаров по k различным урнам, когда некоторые урны могут остаться пустыми — $w = C_{n+k-1}^{k-1} = C_{n+k-1}^n$.

Производящая функция выбора: пример 3

Пример 3. В том же мультимножестве их n элементов берётся выборка объёма m , причём каждый элемент д/б выбран хотя бы 1 раз (т.е. $m \geq n \geq 1$).

ПФ искомым выбором есть

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{m \geq 0} u_m x^m = (x + x^2 + \dots)^n = \\ &= (x(1 + x + x^2 + \dots))^n = x^n (1 + x + x^2 + \dots)^n = \\ &= x^n \sum_{m \geq 0} \binom{n}{m} x^m = \sum_{m \geq 0} \binom{n}{m} x^{m+n}. \end{aligned}$$

Заменяя $m \mapsto m - n$, получаем

$$F(x) = \sum_{m \geq n} \binom{n}{m-n} x^m = \sum_{m \geq n} \binom{m-1}{m-n} x^m.$$

Задача о размене монет

Пример 4. Сколькими способами можно разменять 1 руб. монетами достоинствами 1, 5, 10 и 50 коп.?

Строим ПФ:

$$F(x) = \sum_{k \geq 0} u_k x^k = (1 + x_1 + x_1^2 + \dots) \cdot \dots \cdot (1 + x_4 + x_4^2 + \dots).$$

Учитываем достоинства монет: $x_1 = x$, $x_2 = x^5$, $x_3 = x^{10}$, $x_4 = x^{50}$. Поэтому

$$F(x) = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^5} \cdot \frac{1}{1-x^{10}} \cdot \frac{1}{1-x^{50}}.$$

Разложение в ряд полученного выражения технически очень громоздко. Нам же нужно лишь значение u_{100} .

Задача о размене монет...

Поэтому можно действовать следующим образом. Имеем

$$u_0 = u_1 = u_1 = u_1 = u_4 = 1,$$

$$u_5 = u_6 = u_7 = u_8 = u_9 = 2, u_{10} = 4.$$

$$10 \text{ коп.} = 10 \cdot 1 \text{ коп.} = 5 \text{ коп.} + 5 \cdot 1 \text{ коп.} = 2 \cdot 5 \text{ коп.}$$

— итого 4 способа.

Положим

$$A(x) = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^5} \cdot \frac{1}{1-x^{10}} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots,$$

$$B(x) = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^5} = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots,$$

причём $b_0 = b_1 = \dots = b_4 = 1$ (представление 0, 1, 2, 3 и 4 копеек) и, кроме того, $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$

Задача о размене монет...

Имеем

$$A(x) = (1 - x^{50}) \cdot F(x);$$

$$B(x) = (1 - x^{10}) \cdot A(x);$$

$$\frac{1}{1 - x} = (1 - x^5) \cdot B(x).$$

Отсюда

$$\begin{cases} a_k = u_k - u_{k-50}, & \text{при } k \geq 50, \\ b_k = a_k - a_{k-10}, & \text{при } k \geq 10, \\ 1 = b_k - b_{k-5}, & \text{при } k \geq 5. \end{cases}$$

Из последнего соотношения — $b_k = \left\lfloor \frac{k}{5} \right\rfloor + 1$, $k \geq 0$ или

$$B(x) \doteq (1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, \dots).$$

Задача о размене монет...

Таким образом,

$$\begin{cases} u_k = a_k + u_{k-50}, & k \geq 50, \\ a_k = b_k + a_{k-10}, & k \geq 10. \end{cases}$$

Из первого равенства — $u_{100} = a_{100} + a_{50} + u_0$ и далее:

$$a_{100} = b_{100} + b_{90} + \dots + b_{60} + b_{50} + \dots + b_{10} + a_0$$

$$a_{50} = b_{50} + b_{40} + \dots + b_{10} + a_0.$$

Поскольку $u_0 = a_0 = 1$, имеем

$$\begin{aligned} u_{100} &= b_{100} + b_{90} + b_{80} + b_{70} + b_{60} + 2 \cdot (b_{50} + b_{40} + b_{30} + b_{20} + b_{10} + 1) + 1 = \\ &= 21 + 19 + 17 + 15 + 13 + 2 \cdot (11 + 9 + 7 + 5 + 3 + 1) + 1 = \\ &= 85 + 2 \cdot 36 + 1 = 86 + 72 = 158. \end{aligned}$$

Задача о размене монет: замечания

В общем случае, число представлений суммы в k единиц монетами по r_1, \dots, r_m единиц равно коэффициенту u_k в разложении по x ПФ

$$F(x) = \frac{1}{1 - x^{r_1}} \cdot \dots \cdot \frac{1}{1 - x^{r_m}}.$$

При $r_i = i$, $i = 1, 2, \dots$ имеем

$$F(x) = \frac{1}{1 - x} \cdot \frac{1}{1 - x^2} \cdot \frac{1}{1 - x^3} \cdot \dots$$

Коэффициент $u_n = p(n)$ разложения этой ПФ в ряд по x называется *числом разбиений n* — это число представлений n в виде суммы положительных целых слагаемых без учёта порядка.

Для $p(n)$ неизвестно выражение в замкнутом виде.

Задача о размене монет: замечания

Для первых значений n имеем

$$p(1) = 1, p(2) = 2, p(3) = 3, p(4) = 5, p(6) = 11, p(7) = 15.$$

Например,

$$4 = \underbrace{4 \cdot 1}_1 = \underbrace{3 + 1}_2 = \underbrace{2 + 2}_3 = \underbrace{2 + 1 + 1}_4 = \underbrace{1 + 1 + 1 + 1}_5.$$

С. Рамануджан показал, что

$$p(5n + 4) \equiv_5 0, \quad p(7n + 5) \equiv_7 0, \quad p(11n + 6) \equiv_{11} 0.$$

$$p(n) \sim A_n e^{\pi \left(\sqrt{\frac{2}{3} \left(n - \frac{1}{24} \right)} \right)}$$

$$\text{где } A_n = \frac{1}{2\pi\sqrt{2}} \left(\frac{\pi}{\sqrt{6} \left(n - \frac{1}{24} \right)} - \frac{1}{2 \left(n - \frac{1}{24} \right)^{3/2}} \right)$$

$$p(200) = 3\,972\,999\,029\,388 \text{— точное значение}$$

Рамануджан



Сриниваса Рамануджан Айенгор

(англ. Srinivasa Ramanujan Iyengar,
1887–1920)

— математический гений Индии.

У него тамильское имя без фамилии: Рамануджан — имя,

Сриниваса — отчество, Айенгор — каста.

Не имея специального математического образования, доказал справедливость около 120 ранее неизвестных теоретико-числовых формул.

Рамануджан до 27 занимался математикой самостоятельно.

Затем, по настоянию Г. Харди переезжает в Кембридж, где становится профессором и членом Лондонского королевского общества.

Его результаты порождены неповторимой математической фантазией и фантастической интуицией.

Доказано Рамануджаном

$$\pi = \frac{9801}{2\sqrt{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(4k)!}{(k!)^4} \cdot \frac{1103+26390k}{(4.99)^{4k}} \right)}.$$

Уже при $k = 100$ достигается огромная точность — 600 верных значащих цифр!

$$\sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4\sqrt{1 + \dots}}}} = 3.$$

$$x^3 + y^3 + z^3 = w^3, \quad \text{где}$$

$$x = 3a^2 + 5ab - 5b^2, \quad z = 4a^2 - 4ab + 6b^2,$$

$$y = 5a^2 - 5ab - 3b^2, \quad w = 6a^2 - 4ab + 4b^2.$$

Сам Рамануджан говорил, что формулы ему во сне внушает богиня Намагири Тхайяр.

Разделы

Общая комбинаторная схема

Задачи с решениями

Что ещё почитать

Задача Comb-1

Показать, что $S(n, n-1) = C_n^2$.

Решение

Из рекуррентного соотношения для чисел Стирлинга II рода:

$$\begin{aligned} S(n, n-1) &= (n-1) \underbrace{S(n-1, n-1)}_{=1} + S(n-1, n-2) = \dots \\ &\dots = (n-1) + (n-2) + \dots + 1 = \frac{n(n-1)}{2} = C_n^2. \end{aligned}$$

Задача Comb-2

Показать, что $S(n, n-2) = 3C_n^4 + C_n^3$

(полезна формула суммирования биномиальных

коэффициентов по нижнему индексу $\sum_{k=0}^n C_k^m = C_{n+1}^{m+1}$).

Решение

Из рекуррентного соотношения для чисел Стирлинга II рода последовательно получаем (подчёркнут итеративный член):

$$\begin{aligned} S(n, n-2) &= (n-2)S(n-1, n-2) + \underline{S(n-1, n-3)} = \\ &= (n-2)C_{n-1}^2 + (n-3)S(n-2, n-3) + S(n-2, n-4) = \\ &= (n-2)C_{n-1}^2 + (n-3)C_{n-2}^2 + \underline{S(n-2, n-4)} = \dots \\ &= \sum_{i=1}^{n-2} C_{n-i}^2 (n-i-1) = \sum_{i=1}^{n-2} C_{n-i}^2 (n-i-2) + \sum_{i=1}^{n-2} C_{n-i}^2. \end{aligned}$$

Задача Comb-2...

Имеем далее

$$C_{n-i}^2(n-i-2) = \frac{(n-i)!(n-i-2)}{2!(n-i-2)!} = \frac{3!}{2!} \cdot \frac{(n-i)!}{3!(n-i-3)!} = 3C_{n-i}^3$$

Затем

$$\sum_{i=1}^{n-2} C_{n-i}^3 = \sum_{i=2}^{n-1} C_i^3 = \sum_{i=0}^{n-1} C_i^3 = C_n^4$$

— второе равенство получено по $C_n^k = 0$ при $n < k$,
последнее — по формуле суммирования по нижнему индексу.

Аналогично $\sum_{i=1}^{n-2} C_{n-i}^2 = \sum_{i=2}^{n-1} C_i^2 = C_n^3$ и получаем требуемое.

Задача Comb-3

Сколькими способами можно разложить n *различимых* объектов в *неразличимые* коробки так, чтобы ни одна из них не оказалась пустой?

Решение.

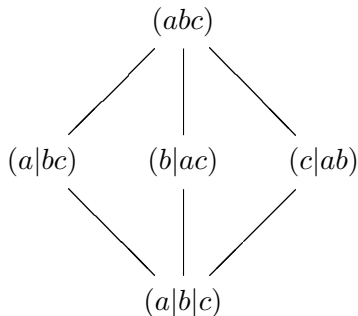
При разложении n объектов одновременно задействовано может быть максимум n коробок, а каждому допустимому разложению соответствует некоторое разбиение множества из n объектов.

Количество таких разбиений равно числу Белла $B(n)$.

Задача Comb-4

Построить диаграмму Хассе беллиана 3-элементного множества $\{a, b, c\}$.

Решение



Имеем: $S(3, 1) = 1$, $S(3, 2) = 3$, $S(3, 3) = 1$.

Задача Comb-5

Найти явный вид общего члена последовательности $u_0 = 1, u_1, u_2, \dots$, удовлетворяющую условиям

$$\sum_{j=0}^k u_j u_{k-j} = 1, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (*)$$

Решение. Напоминание:

$$A = \sum_{i \geq 0} a_i, \quad B = \sum_{i \geq 0} b_i, \quad A \cdot B = C = \sum_{k \geq 0} c_k,$$

$$c_k = \sum_{j=0}^k a_j b_{k-j} \text{ — свёртка коэффициентов } a_i \text{ и } b_i.$$

Теперь ясно, что левая часть (*) есть коэффициент при x в $(\sum_{k \geq 0} u_k x^k)^2$.

Задача Comb-5...

Положим $F(x) = \sum_{k \geq 0} u_k x^k$. Тогда по (*)

$$F^2(x) = 1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x}.$$

Следовательно,

$$F(x) = (1-x)^{-1/2} = \sum_{k \geq 0} \binom{-1/2}{k} (-1)^k x^k.$$

Находим u_k :

$$\begin{aligned} u_k &= (-1)^k \binom{-1/2}{k} = (-1)^k \frac{\left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) \left(-\frac{5}{2}\right) \dots \left(-\frac{2k-1}{2}\right)}{k!} = \\ &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-1)}{2^k k!} = \frac{(2k-1)!!}{2^k k!}. \end{aligned}$$

Задача Comb-6

Для последовательности $(u_0, u_1, \dots) = (2, 5, 13, \dots)$, где $u_k = 2^k + 3^k$ найти обычную и экспоненциальную ПФ.

Решение

► Обычная ПФ:

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{k \geq 0} u_k x^k = \sum_{k \geq 0} 2^k x^k + \sum_{k \geq 0} 3^k x^k = \\ &= \frac{1}{1-2x} + \frac{1}{1-3x} = \frac{2-5x}{1-5x+6x^2}. \end{aligned}$$

► Экспоненциальная ПФ:

$$F(x) = \sum_{k \geq 0} u_k \frac{x^k}{k!} = \sum_{k \geq 0} \frac{2^k x^k}{k!} + \sum_{k \geq 0} \frac{3^k x^k}{k!} = e^{2x} + e^{3x}.$$

Задача Comb-7

С помощью ПФ доказать тождество

$$C_{2n}^m = \sum_{k=0}^n \left(C_n^k \right)^2.$$

Решение.

$$(1+x)^{2n} = (1+x)^n(1+x)^n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{2n} C_{2n}^i x^i = \left(\sum_{k=0}^n C_n^k x^k \right) \left(\sum_{m=0}^n C_n^m x^m \right).$$

Сравнивая коэффициенты при x^n , получим

$$C_{2n}^m = \sum_{k=0}^n C_n^k C_n^{m-k} = \sum_{k=0}^n \left(C_n^k \right)^2.$$

Задача Comb-8

Найти ПФ для последовательности чётных и нечётных номеров чисел Фиббоначи.

Решение. Пусть $F(x)$ — ПФ для $(u_0, u_1, u_2, u_3 \dots)$.

Тогда $F(-x)$ — ПФ для $(u_0, -u_1, u_2, -u_3 \dots)$.

Имеем $\frac{F(x) + F(-x)}{2}$ — ПФ для $(u_0, 0, u_2, 0 \dots)$.

Отсюда $\frac{F(y) + F(-y)}{2} \Big|_{y^2=x}$ — ПФ для (u_0, u_2, u_4, \dots) и

$\frac{F(y) - F(-y)}{2y} \Big|_{y^2=x}$ — ПФ для (u_1, u_3, u_5, \dots) .

ПФ для чисел Фиббоначи: $F(x) = \frac{1}{1 - x - x^2}$.

Задача Comb-8...

Имеем

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-x-x^2} + \frac{1}{1+x-x^2} \right) = \frac{1-x^2}{1-3x^2+x^4}.$$

$$F(x)_{\text{чётн}} = \frac{1-x}{1-3x+x^2}.$$

$$\frac{1}{2x} \left(\frac{1}{1-x-x^2} - \frac{1}{1+x-x^2} \right) = \frac{\cancel{x}}{\cancel{x} \cdot (1-3x^2+x^4)}.$$

$$F(x)_{\text{нечётн}} = \frac{1}{1-3x+x^2}.$$

Задача Comb-9

Вывести формулу для определителя Δ_n трёхдиагональной матрицы n -го порядка

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

методами производящих функций и линейных рекуррентных последовательностей; считаем, что $\Delta_0 = 1$.

Задача Comb-9...

Решение *методом производящих функций*

Имеем $\Delta_1 = 3$ и $\Delta_{n+1} = 3\Delta_n - 2\Delta_{n-1}$ для $n \geq 1$.

Найдём производящую функцию

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{n \geq 0} u_n x^n = 1 + 3x + \sum_{n \geq 2} u_n x^n = \\ &= 1 + 3x + \sum_{n \geq 2} (3u_{n-1} - 2u_{n-2}) x^n = \\ &= 1 + 3x + 3x \sum_{n \geq 2} u_{n-1} x^{n-1} - 2x^2 \sum_{n \geq 2} u_{n-2} x^{n-2} = \\ &= 1 + 3x + 3x(F(x) - 1) - 2x^2 F(x) = \\ &= 1 + 3xF(x) - 2x^2 F(x) \Rightarrow \\ &\Rightarrow F(x)(1 - 3x + 2x^2) = 1 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{1 - 3x + 2x^2}. \end{aligned}$$

Задача Comb-9...

$$1 - 3x + 2x^2 = (1 - ax)(1 - bx) = 1 - (a + b)x + abx^2.$$

$$\begin{cases} a + b = 3, \\ ab = 2, \end{cases} \Rightarrow a = 1, b = 2.$$

$$\frac{1}{(1-x)(1-2x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1-2x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A - 2Ax + B - Bx = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A + B = 1, \\ 2A + B = 0, \end{cases} \Rightarrow A = -1, B = 2.$$

$$F(x) = \sum_{n \geq 0} u_n x^n = \frac{-1}{1-x} + \frac{2}{1-2x} =$$

$$= \sum_{n \geq 0} (-1)x^n + \sum_{n \geq 0} 2(2^n)x^n =$$

$$= \sum_{n \geq 0} (2^{n+1} - 1)x^n \Rightarrow \Delta_n = 2^{n+1} - 1.$$

Задача Comb-9...

Решение методом л.р.с.

Соотношение — $\Delta_{n+2} - 3\Delta_{n+1} + 2\Delta_n = 0$.

Характеристическое уравнение:

$$P(x) = x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 2.$$

Общее решение: $u_n = \beta_1 + \beta_2 \cdot 2^n$.

Используя начальные условия —

$$\begin{cases} \beta_1 + \beta_2 = 1 \\ \beta_1 + 2\beta_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta_2 = 2 \\ \beta_1 = -1 \end{cases}.$$

Решение: $u_n = 2^{n+1} - 1$.

Задача Comb-10

Сколькими способами можно разменять монету 20 коп. монетами по 1, 2, 3 и 5 коп.?

Решение. Строим ПФ по общей комбинаторной схеме.

$$\begin{aligned}
 F(x_1, \dots, x_5) &= (1 + x_1 + x_1^2 + \dots) \cdot (1 + x_2 + x_2^2 + \dots) \cdot \\
 &\quad (1 + x_3 + x_3^2 + \dots) \cdot (1 + x_4 + x_4^2 + \dots) = \\
 &\quad \left(\text{замена: } x_1 \mapsto x, \quad x_2 \mapsto x^2, \quad x_3 \mapsto x^3, \quad x_4 \mapsto x^5 \right) \\
 &= (1 + x + x^2 + \dots) \cdot (1 + x^2 + x^4 + \dots) \cdot \\
 &\quad (1 + x^3 + x^6 + \dots) \cdot (1 + x^5 + x^{10} + \dots) = \\
 &= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1-x^3} \cdot \frac{1}{1-x^5} = \sum_{k \geq 0} u_k x^k;
 \end{aligned}$$

u_k — число разменов k копеек.

Задача Comb-10...

Обозначим

$$A(x) = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1-x^3} = \sum_{k \geq 0} a_k x^k, \quad a_0 = a_1 = 1; a_2 = 2;$$

$$B(x) = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} = \sum_{k \geq 0} b_k x^k, \quad b_0 = b_1 = 1;$$

$$C(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$$

Непосредственно вычисляется

$$u_0 = u_1 = 1; u_2 = 2, u_3 = 3; u_4 = 4, u_5 = 6.$$

Имеем

$$A(x) = \sum_{k \geq 0} a_k x^k = (1-x^5) = \sum_{k \geq 0} u_k x^k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_k - u_{k-5} = a_k, \quad k \geq 5.$$

Задача Comb-10...

Аналогично

$$\begin{cases} a_k - a_{k-3} = b_k, & k \geq 3, \\ b_k - b_{k-2} = 1, & k \geq 2. \end{cases}$$

Или

$$\begin{cases} u_k = a_k + u_{k-5}, & k \geq 5, \\ a_k = b_k + a_{k-3}, & k \geq 3, \\ b_k = 1 + b_{k-2}, & k \geq 2. \end{cases}$$

Из последнего соотношения

$$B(x) \doteq (1, 1, 2, 2, 3, 3, \dots), \quad \text{или} \quad b_k = \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil + 1.$$

Задача Comb-10...

Раскрываем

$$u_{20} = u_{15} + a_{20} = a_{20} + a_{15} + u_{10} = a_{20} + a_{15} + a_{10} + u_5.$$

Раскрываем коэффициенты a :

$$a_{20} = b_{20} + b_{17} + b_{14} + b_{11} + b_8 + b_5 + a_2 = 44,$$

$$a_{15} = b_{15} + b_{12} + b_9 + b_6 + b_3 + a_0 = 27,$$

$$a_{10} = b_{10} + b_7 + b_4 + a_1 = 14.$$

Окончательно, $u_{20} = 44 + 27 + 14 + 6 = 91.$

Задача Comb-11

Найти асимптотику (скорость роста) чисел Каталана t_k при $k \rightarrow \infty$.

Решение. Имеем

$$t_k = \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k} = \frac{1}{k+1} \cdot \frac{(2k)!}{k!k!},$$

и используя формулу Стирлинга $n! \sim \sqrt{2\pi n} \cdot (n/e)^n$ —

$$t_k \approx \frac{4^k}{k\sqrt{\pi k}}.$$

└ Что ещё почитать






Разделы

Общая комбинаторная схема






Задачи с решениями

Что ещё почитать

Литература I

-  *Андерсон Дж.* Дискретная математика и комбинаторика. — М.: Издательский дом “Вильямс”, 2004.
-  *Олдендерфер М. С., Блэшфилд Р. К.* Кластерный анализ / Факторный, дискриминантный и кластерный анализ. — М.: Финансы и статистика, 1989.
-  *Баранов В.И., Стечкин Б.С.* Экстремальные комбинаторные задачи и их приложения. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2014.
-  *Дюран Б., Оддел П.* Кластерный анализ. — М.: Статистика, 1977.
-  *Грекхэм Р., Кнут Д., Паташник О.* Конкретная математика. — М.: Мир, 1998.

Литература II

-  *Ландо С. К.* Лекции о производящих функциях. — М.: МЦНМО, 2007.
-  *Сачков В. Н.* Вероятностные методы в комбинаторном анализе. — М.: Наука, 1978.
-  *Сачков В. Н.* Введение в комбинаторные методы дискретной математики — М.: Наука, 1982.
-  *Стенли Р.* Перечислительная комбинаторика. — М.: Мир, Volume I — 1990, Volume II — 2005.
-  *Яблонский С. В.* Введение в дискретную математику. — М.: Высшая школа, 2001.