

# Вероятностное тематическое моделирование: теория регуляризации ARTM и библиотека с открытым кодом BigARTM

Воронцов Константин Вячеславович

vokov@forecsys.ru

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,  
Московский физико-технический институт (государственный университет),  
Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН

17 января 2023 г.

## Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Основы тематического моделирования</b>	<b>8</b>
	Предварительная обработка текста. . . . .	8
	Гипотеза о существовании тем. . . . .	8
	Гипотеза «мешка слов». . . . .	9
	Гипотеза о вероятностном порождении данных. . . . .	9
	Гипотеза условной независимости. . . . .	9
	Вероятностная тематическая модель порождения текста. . . . .	9
	Задача тематического моделирования. . . . .	10
	Частотные оценки условных вероятностей. . . . .	12
	EM-алгоритм. . . . .	12
	Рациональный EM-алгоритм. . . . .	13
<b>3</b>	<b>Максимизация на единичных симплексах</b>	<b>14</b>
	Необходимые условия максимума. . . . .	14
	Лемма о максимизации гладкой функции на единичных симплексах. . . . .	14
	Сходимость итерационного процесса. . . . .	16
<b>4</b>	<b>Аддитивная регуляризация</b>	<b>16</b>
	Принцип максимума правдоподобия. . . . .	17
	Регуляризация некорректно поставленных задач. . . . .	17
	Основная теорема ARTM. . . . .	18
	Регуляризованный EM-алгоритм. . . . .	18
	Промежуточная форма записи EM-алгоритма. . . . .	19
	Условия вырожденности. . . . .	20

	Модель PLSA . . . . .	20
	О стратегиях регуляризации. . . . .	21
	Относительные коэффициенты регуляризации. . . . .	21
<b>5</b>	<b>Вероятностная регуляризация и модель LDA</b>	<b>23</b>
	Принцип максимума апостериорной вероятности. . . . .	23
	Априорные распределения Дирихле. . . . .	24
	Не-байесовская интерпретация и обобщение модели LDA. . . . .	26
	Дивергенция Кульбака–Лейблера . . . . .	27
<b>6</b>	<b>Теория EM-алгоритма</b>	<b>28</b>
	Общий EM-алгоритм с регуляризацией. . . . .	28
	Общий EM-алгоритм для ARTM. . . . .	30
<b>7</b>	<b>Байесовское обучение модели LDA</b>	<b>31</b>
	Концепция байесовского обучения. . . . .	32
	Свойства распределения Дирихле. . . . .	32
	Вариационный байесовский вывод. . . . .	32
	Сэмплирование Гиббса. . . . .	35
	Оптимизация гиперпараметров в модели LDA. . . . .	37
	Графическая нотация. . . . .	38
	Сравнение ARTM и байесовского подхода. . . . .	39
<b>8</b>	<b>Разреживание, сглаживание, декоррелирование</b>	<b>41</b>
	Частичное обучение. . . . .	41
	Предметные и фоновые темы. . . . .	42
	Сфокусированный тематический поиск. . . . .	42
	Декоррелирование тем. . . . .	43
	Комбинирование регуляризаторов . . . . .	44
<b>9</b>	<b>Моделирование мультимодальных данных</b>	<b>44</b>
	Мультимодальная ARTM. . . . .	44
	Мультязычные модели. . . . .	46
	Модальности категорий и авторов. . . . .	47
	Модальность времени и темпоральные модели. . . . .	49
<b>10</b>	<b>Моделирование транзакционных данных</b>	<b>51</b>
	Тематические модели на гиперграфах. . . . .	52
	Гиперграфовый EM-алгоритм. . . . .	53
	Типы транзакций и их весовые коэффициенты. . . . .	54
	Гиперграфовые модели для рекомендательных систем. . . . .	54
	Симметризованные гиперграфовые модели . . . . .	55
	Транзакции с главными и подчинёнными терминами. . . . .	57
	Гиперграфовые языковые модели. . . . .	57

<b>11 Моделирование зависимостей</b>	<b>58</b>
Классификация. . . . .	58
Регрессия. . . . .	59
Корреляции тем. . . . .	60
Числовые модальности. . . . .	61
<b>12 Моделирование связей между документами</b>	<b>63</b>
Ссылки и цитирование. . . . .	64
Геолокации. . . . .	64
Графы и социальные сети. . . . .	65
<b>13 Моделирование иерархий и выбор числа тем</b>	<b>66</b>
Определение числа тем по внешним критериям. . . . .	67
Энтропийное разреживание для отбора тем . . . . .	67
Иерархическое тематическое моделирование. . . . .	68
Вероятностная модель межуровневых связей. . . . .	68
Разреживание межуровневых связей . . . . .	69
Спектр тем и визуализация иерархий. . . . .	70
<b>14 Моделирование сочетаемости слов</b>	<b>72</b>
Модели контактной сочетаемости. . . . .	72
Модель битермов. . . . .	74
Модель сети слов. . . . .	75
Когерентность. . . . .	75
Модели векторных представлений слов . . . . .	76
<b>15 Моделирование связного текста</b>	<b>77</b>
Тематическая модель предложений. . . . .	78
Гиперграфовые модели связного текста. . . . .	79
Тематическая модель сегментации. . . . .	79
Регуляризатор E-шага. . . . .	80
Разреживание распределений $p(t d, w)$ . . . . .	82
Разреживающий регуляризатор E-шага для сегментации. . . . .	83
Гипотеза об эквивалентности пост-обработки и регуляризации. . . . .	83
Однопроходный E-шаг для быстрой тематизации документов. . . . .	84
Тематизация локальных контекстов. . . . .	87
<b>16 Критерии качества тематических моделей</b>	<b>88</b>
Внешние критерии . . . . .	88
Перплексия. . . . .	88
Интерпретируемость . . . . .	90
Когерентность. . . . .	90
Разреженность и лексические ядра тем. . . . .	91
Доля фоновой лексики. . . . .	91
Различность тем. . . . .	92

<b>17 Критерии условной независимости</b>	<b>92</b>
Гипотеза условной независимости . . . . .	93
Обобщённые средневзвешенные статистики. . . . .	95
Меры несогласованности, толерантные к повторяемости слов. . . . .	95
Перплексия темы. . . . .	96
Дивергенция Кресси–Рида. . . . .	96
<b>18 Особенности реализации EM-алгоритма</b>	<b>96</b>
Пакетный алгоритм . . . . .	97
Оффлайновый алгоритм . . . . .	97
Онлайновый алгоритм . . . . .	98
Параллельный алгоритм. . . . .	98
Улучшение сходимости. . . . .	98
Произвольные функции потерь и E-шаг без нормировки. . . . .	99
<b>19 Проект BigARTM</b>	<b>100</b>
Подготовка данных. . . . .	101
Словари BigARTM . . . . .	101
Регуляризаторы . . . . .	102
Многопоточный пакетный EM-алгоритм. . . . .	104
Метрики качества . . . . .	104
Выгрузка параметров модели. . . . .	105
<b>20 Разведочный информационный поиск</b>	<b>106</b>
Тематический поиск. . . . .	106
Оценивание качества разведочного поиска. . . . .	108
Эксперименты по подбору тематической модели для разведочного поиска . . . . .	108
Визуализация. . . . .	108
<b>21 Заключение</b>	<b>109</b>
Замена фундамента. . . . .	109
Мифы о тематическом моделировании. . . . .	110
Открытые проблемы. . . . .	111
Что осталось за бортом. . . . .	112
Благодарности. . . . .	112

# 1 Введение

Тематическое моделирование — одна из современных технологий *обработки естественного языка* (natural language processing, NLP), активно развивающаяся с конца 90-х годов. Тематическая модель коллекции текстовых документов определяет, к каким темам относится каждый документ, и какие слова образуют каждую тему. Тематическое моделирование не претендует на полноценное *понимание естественного языка* (natural language understanding, NLU), однако выявление тематики можно считать определённым шагом в этом направлении.

Тематическое моделирование принято относить к *машинному обучению без учителя* (unsupervised machine learning), поскольку темы строятся полностью автоматически по данным текстовой коллекции. Для этого не требуется никакой разметки, никаких словарей или баз экспертных знаний. В то же время, существуют продвинутые тематические модели, способные учитывать такого рода дополнительные данные как для улучшения самих тем, так и для решения более трудных задач текстовой аналитики. Такие модели тоже рассматриваются в данной книге.

Тематическое моделирование похоже на *кластеризацию документов*. Отличие в том, что при обычной «жёсткой» кластеризации (hard clustering) документ целиком относится к одному кластеру, тогда как тематическая модель осуществляет *мягкую кластеризацию* (soft clustering), распределяя содержимое документа по нескольким кластерам-темам. Тематическое моделирование называют также *мягкой би-кластеризацией*, поскольку каждое слово также распределяется по темам.

*Вероятностная тематическая модель* (probabilistic topic model, PTM) описывает каждую тему дискретным распределением вероятностей слов, а каждый документ — дискретным распределением вероятностей тем. Такие модели способны предсказывать, с какими вероятностями слова встречаются в документах. То есть они являются разновидностью *вероятностных моделей языка* (probabilistic language model). Следует признать, что в этом качестве тематические модели довольно слабы. Хорошо предсказать слово возможно только при тщательном анализе его локального контекста, однако в классических вариантах тематических моделей порядок слов вообще не учитывается. Есть модели, которые преодолевают это ограничение (и они тоже рассматриваются в данной книге), но остаётся другая проблема. Появление слова вряд ли определяется только его тематикой, даже с учётом контекста. Глубокие нейронные сети на основе моделей внимания [27] и архитектуры трансформера, такие как BERT [53] и GPT-3 [87] моделируют весь комплекс языковых явлений и предсказывают слова в тексте лучше, чем это делают люди. Они способны генерировать фейковые новости, которые люди не отличают от настоящих. Однако эти модели неинтерпретируемы: мы пока не научились узнавать, какие именно языковые явления и каким образом смоделировала нейросеть. Также неясно, какой смысл имеет каждая координата векторного представления текста.

Тематическая модель, как и нейросетевая, преобразует текст в *векторное представление* или эмбединг (embedding). Тематический эмбединг — это вектор вероятностей тем. Его преимущество в том, что он, как правило, разреженный, то есть состоит из небольшого числа тем, и он интерпретируемый. Каждая тема способна рассказать о себе словами естественного языка или даже целыми фразами [106].

Мы почти не будем касаться вопроса, как «объединить лучшее от двух миров» — предсказательную и генеративную способность нейросетевых моделей языка и ин-

терпретируемость тематических моделей. Это открытая научная проблема на момент написания данного предисловия. Хотелось бы верить, что математический инструментарий, предлагаемый в данной книге, поможет мотивированным читателям в решении этой новой увлекательной задачи.

Вероятностные тематические модели находят множество применений. Это выявление трендов в новостных потоках, патентных базах, научных публикациях [192, 158], многоязычный информационный поиск [168, 167], классификация и категоризация документов [142, 196], тематическая сегментация текстов [179, 139], суммаризация текстов [95], поиск тематических сообществ в социальных сетях [195, 160, 131, 38], тегирование веб-страниц [84], обнаружение текстового спама [15]. Существуют и не-текстовые приложения тематического моделирования в анализе изображений и видеопотоков [69, 94, 61, 159], в рекомендательных системах [186, 174, 89, 189, 188], в популяционной генетике [134], в биоинформатике для анализа нуклеотидных [85] и аминокислотных последовательностей [147, 83]. Другие приложения тематических моделей упоминаются в обзорах [50, 32, 40, 138, 75, 47].

Построение тематической модели является некорректно поставленной оптимизационной задачей, имеющей бесконечно много решений. Согласно теории регуляризации А.Н.Тихонова [16], решение такой задачи возможно доопределить и сделать устойчивым. Для этого к оптимизационному критерию добавляется *регуляризатор* — дополнительный критерий, учитывающий специфические особенности данных или предметной области. Практический опыт убеждает, что тематическое моделирование обладает огромным «запасом решений». Можно добавить регуляризатор, сильно улучшив один критерий качества, затем добавить второй и улучшить модель по другому критерию, и так несколько раз.

*Аддитивная регуляризация тематических моделей* (additive regularization of topic models, ARTM) — это многокритериальный подход, в котором модель оптимизируется по взвешенной сумме критериев [4, 165]. ARTM позволяет строить модели с требуемыми свойствами, перенося регуляризаторы из одних моделей в другие или объединяя регуляризаторы от различных моделей. Для обучения любых моделей и их комбинаций используется один и тот же алгоритм, к которому регуляризаторы подключаются как модули [163, 62, 81]. Модульная технология реализована в библиотеке **BigARTM** с открытым кодом, <http://bigartm.org> [163, 62].

Подчеркнём, что ARTM не является ещё одной моделью или методом — это общий подход к построению и комбинированию тематических моделей.

До настоящего времени доминирующим подходом в тематическом моделировании оставалось байесовское обучение. В отличие от ARTM, в нём нет разделения моделей на общий алгоритм и унифицируемые модули-регуляризаторы. Для каждой байесовской модели приходится заново выводить вычислительные формулы, реализовывать и тестировать программный код. Из-за математической сложности байесовского вывода в статьях часто опускаются важные для понимания детали. Иногда авторы ограничиваются упрощённым описанием модели в виде порождающего процесса (generative story) или графической нотации (plate notation), однако последующий переход к алгоритму и его реализации остаётся неоднозначным и неочевидным. Эти барьеры препятствуют широкому использованию тематического моделирования. В индустрии анализа текстов редко применяются модели сложнее морально устаревшей LDA (Latent Dirichlet Allocation) [36]. Сотни перспективных моделей так и остаются «академическими исследованиями для одной статьи».

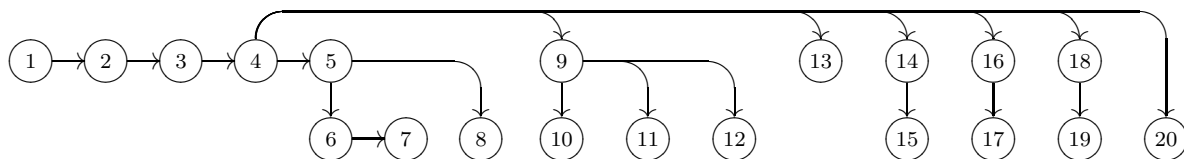
Основная цель книги — показать огромное разнообразие тематических моделей, сосредоточившись на постановках оптимизационных задач. Показать, что регуляризация является не менее выразительным средством моделирования, чем байесовское обучение. На этом языке возможно не только строить и комбинировать тематические модели, но также объяснять их намного лаконичнее, без «заметания под ковёр» сложной математики. Сопоставимый по охвату и обстоятельности обзор байесовских моделей занял бы много сотен страниц.

Основоположник современной теории вероятностей А. Н. Колмогоров неоднократно утверждал в своих лекциях, что «представляется важной задача освобождения всюду, где это возможно, от излишних вероятностных допущений» [12, стр. 252]. Оказалось, что в тематическом моделировании освобождение от излишних байесовских допущений приводит к более изящной математической теории. Лемма о максимизации гладкой функции на единичных симплексах доказывается довольно просто, это будет сделано в разделе 3. Из этой леммы выводятся все EM-подобные алгоритмы тематического моделирования, от самых простых до самых сложных. Тематическое моделирование становится «теорией одной леммы». Это должны по достоинству оценить исследователи, исписавшие тонны черновиков формулами байесовского вывода тематических моделей, хоть немного более сложных, чем LDA.

Разделы 2–5 являются базовыми. В разделах 6–7 излагаются основы байесовской теории; она не обязательна для понимания последующего материала, но может быть полезна при чтении научной литературы. В разделах 8–15 в терминах регуляризации описываются различные виды тематических моделей. Они практически не связаны друг с другом, их можно читать в произвольном порядке или использовать как путеводитель по литературе. Разделы 16–17 описывают критерии качества тематических моделей. В разделе 18 рассматриваются особенности реализации алгоритмов, в том числе приёмы ускорения сходимости и распараллеливания. Раздел 19 содержит начальные сведения о библиотеке `BigARTM`. В разделе 20 обсуждается применение тематического моделирования для разведочного информационного поиска и социо-гуманитарных исследований. В разделе 21 подводятся итоги, развенчиваются мифы и обсуждаются открытые проблемы.

В начале каждого раздела приводится краткая мотивация и неформальное пояснение, что будет происходить далее, и почему это важно.

На схеме зависимости разделов в верхнем ряду расположены основные разделы, в нижнем — дополнительные. При построении учебного курса их можно исключать.



Книга написана по материалам курса, читаемого студентам факультета ВМК МГУ с 2013 года и школы ФПМИ МФТИ с 2019 года.

*Константин Воронцов  
январь 2023 г.*

## 2 Основы тематического моделирования

В этом разделе мы введём основные понятия и поставим задачу тематического моделирования как задачу приближённого низкорангового стохастического матричного разложения. С помощью формулы Байеса и частотных оценок условных вероятностей получим итерационный процесс, называемый EM-алгоритмом. Почему он действительно решает поставленную задачу, узнаем в следующем разделе.

**Предварительная обработка текста.** Перед построением тематических моделей текст естественного языка обычно подвергается серии преобразований.

*Лемматизация* — это приведение каждого слова в документе к его нормальной форме. В русском языке нормальными формами считаются: для существительных — именительный падеж, единственное число; для прилагательных — именительный падеж, единственное число, мужской род; для глаголов, причастий, деепричастий — глагол в инфинитиве. Хорошими лемматизаторами для русского языка считаются последние версии *mystem* и *rumorphy*.

*Стемминг* — это отбрасывание окончаний и других изменяемых частей слов. Он подходит для английского языка, для русского предпочтительна лемматизация.

*Удаление стоп-слов.* Это частые слова, встречающиеся в текстах любой тематики — предлоги, союзы, числительные, местоимения, некоторые глаголы, прилагательные, наречия. Число таких слов обычно варьируется в пределах нескольких сотен. Они бесполезны для тематических моделей. Их отбрасывание почти не влияет на объём словаря, но может приводить к заметному сокращению длины текстов.

*Удаление редких слов* и строк, не являющихся словами естественного языка (например, содержащих цифры или спецсимволы), помогает во много раз сокращать объём словаря, снижая затраты времени и памяти на построение моделей. Редкие слова, как правило, не влияют на тематику коллекции.

*Выделение ключевых фраз* — характерных словосочетаний и терминов предметной области — используется для улучшения интерпретируемости тем. Выделять их можно с помощью тезаурусов [13] или методов автоматического выделения терминов (automatic term extraction, ATE), не требующих привлечения экспертов [58, 96, 144].

*Распознавание именованных сущностей* (named entities recognition, NER). Это названия объектов реального мира, относящихся к определённым категориям: персоны, организации, геолокации, события, даты, и т. д. В каждой предметной области могут быть свои категории: болезни, методы лечения, химические вещества, виды растений и животных, небесные тела, изделия, товары, и т. д. Для распознавания именованных сущностей используются различные методы машинного обучения [116, 86, 122].

Пусть  $D$  — конечное множество (коллекция) текстовых документов,  $W$  — конечное множество (словарь) всех употребляемых в них термов. *Термами* могут быть слова, нормальные формы слов, словосочетания или термины, в зависимости от того, какие виды предварительной обработки текстов были выполнены. Каждый документ  $d \in D$  представляет собой последовательность  $n_d$  термов  $w_1, \dots, w_{n_d}$  из словаря  $W$ .

**Гипотеза о существовании тем.** Каждое вхождение терма  $w$  в документ  $d$  связано с некоторой темой  $t$  из заданного конечного множества  $T$ . Коллекция документов представляет собой последовательность троек  $\Omega_n = \{(w_i, d_i, t_i) \mid i = 1, \dots, n\}$ . Тер-



мы  $w_i$  и документы  $d_i$  являются наблюдаемыми переменными, темы  $t_i$  не известны и являются *латентными* (скрытыми) переменными.

**Гипотеза «мешка слов».** Порядок термов в документах не важен для выявления тематики, то есть тематику документа можно узнать даже после произвольной перестановки термов, хотя для человека такой текст теряет смысл. Это предположение называют гипотезой «мешка слов» (bag of words). Порядок документов в коллекции также не имеет значения — это предположение называют гипотезой «мешка документов». Гипотеза «мешка слов» позволяет перейти к компактному представлению документа как *мультимножества* — подмножества термов  $d \subset W$ , в котором каждый терм  $w \in d$  повторён  $n_{dw}$  раз.

**Гипотеза о вероятностном порождении данных.** Множество  $\Omega = D \times W \times T$  является конечным *вероятностным пространством* с неизвестной функцией вероятности  $p(d, w, t)$ . Коллекция документов является выборкой троек  $(d_i, w_i, t_i)$ , порождаемых случайно и независимо друг от друга из распределения  $p(d, w, t)$ . Это предположение является вероятностным уточнением гипотезы «мешка слов».

Благодаря предположению о независимости, реализовавшуюся выборку  $\Omega_n$  элементов из  $\Omega$  можно рассматривать как новое вероятностное пространство с  $n$  равновероятными элементарными исходами. В пространстве  $\Omega_n$  легко находить вероятности различных событий, причём они совпадают с частотными оценками вероятностей тех же событий в пространстве  $\Omega$ . В частности, в пространстве  $\Omega_n$  выражение

$$\hat{p}(d, w, t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [d_i = d] [w_i = w] [t_i = t]$$

равно вероятности события «терм  $w$  документа  $d$  связан с темой  $t$ », а в пространстве  $\Omega$  оно равно выборочной частотной оценке вероятности того же события.

Договоримся в дальнейшем записывать все вероятности в пространстве  $\Omega$ , если не оговорено иного. Многие выкладки будут справедливы в обоих пространствах. Пространство  $\Omega_n$  имеет формальное ограничение — оно строится по фиксированной коллекции. Если в коллекцию добавляются новые документы, то пространство  $\Omega_n$  изменяется, тогда как пространство  $\Omega$  можно полагать неизменным.

**Гипотеза условной независимости.** Появление термов в документе  $d$  по теме  $t$  зависит от темы, но не зависит от документа  $d$ , и описывается общим для всех документов распределением  $p(w|t)$ :

$$p(w|d, t) = p(w|t). \tag{1}$$

**Вероятностная тематическая модель порождения текста.** Согласно формуле полной вероятности и гипотезе условной независимости, распределение термов в документе  $p(w|d)$  описывается *вероятностной смесью* распределений термов в темах  $\varphi_{wt} = p(w|t)$  с весами  $\theta_{td} = p(t|d)$ :

$$p(w|d) = \sum_{t \in T} p(w|t, d) p(t|d) = \sum_{t \in T} p(w|t) p(t|d) = \sum_{t \in T} \varphi_{wt} \theta_{td}. \tag{2}$$

Вероятностная модель (2) описывает процесс порождения коллекции по известным распределениям  $p(w|t)$  и  $p(t|d)$ . Этот процесс показан в алгоритме 1 и на рис. 1.

---

**Алгоритм 1.** Вероятностный процесс порождения коллекции документов.
 

---

**Вход:** распределения  $p(w|t)$ ,  $p(t|d)$ ; длины документов  $n_d$ ;

**Выход:** выборка пар  $(d_i, w_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ ;

- 1  $i := 0$ ;
  - 2 для всех  $d \in D$
  - 3     для всех  $j = 1, \dots, n_d$
  - 4          $i := i + 1$ ;  $d_i := d$ ;
  - 5         выбрать случайную тему  $t_i$  из распределения  $p(t|d_i)$ ;
  - 6         выбрать случайный терм  $w_i$  из распределения  $p(w|t_i)$ ;
- 

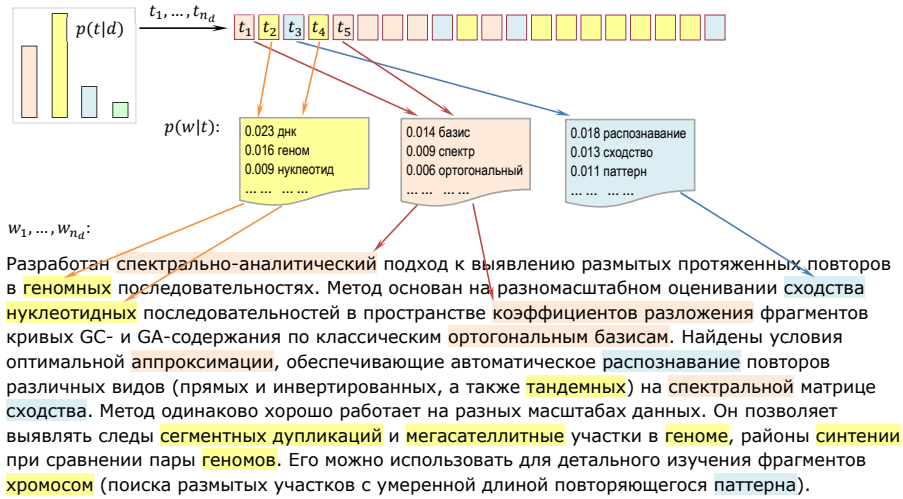


Рис. 1: Процесс порождения текстовой коллекции вероятностной тематической моделью (2): в каждой позиции  $i$  документа  $d_i$  сначала порождается тема  $t_i \sim p(t|d_i)$ , затем терм  $w_i \sim p(w|t_i)$ .

**Задача тематического моделирования** — это обратная задача: по заданной коллекции  $D$  требуется найти параметры  $\varphi_{wt}$  и  $\theta_{td}$ , при которых тематическая модель (2) хорошо приближает частотные оценки условных вероятностей  $\hat{p}(w|d) = \frac{n_{dw}}{n_d}$ .

Для лучшего понимания тематического моделирования полезно рассмотреть постановку задачи с нескольких точек зрения.

Во-первых, это задача приближённого низкорангового стохастического матричного разложения. Чтобы пояснить все эти понятия, перепишем равенство (2) в матричном виде  $P \approx \Phi\Theta$ , где  $P = (\hat{p}(w|d))_{W \times D}$  — матрица частот термов в документах,  $\Phi = (\varphi_{wt})_{W \times T}$  — матрица термов тем и  $\Theta = (\theta_{td})_{T \times D}$  — матрица тем документов, см. рис. 2. Матрица  $P$  известна, это исходные данные. Правая часть равенства представляет собой произведение двух неизвестных матриц. Во всех трёх матрицах  $P, \Phi, \Theta$  столбцы  $p_d, \varphi_t, \theta_d$  неотрицательны, нормированы и определяют дискретные вероятностные распределения. Такие матрицы называются *стохастическими*. Ранг произведения  $\Phi\Theta$  не превышает числа тем  $|T|$ , которое, как правило, много меньше входных размерностей  $|D|$  и  $|W|$ . Матрица  $P$  в общем случае имеет полный ранг, поэтому не может быть в точности равна  $\Phi\Theta$ . Таким образом, стохастическое матричное разложение  $\Phi\Theta$  является в типичном случае низкоранговым и приближённым.

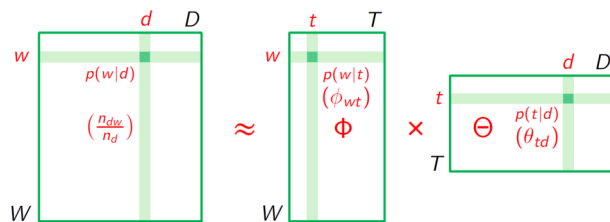


Рис. 2: Построение тематической модели сводится к вычислительной задаче поиска приближённого низкорангового стохастического матричного разложения  $P = \left(\frac{n_{dw}}{n_d}\right) \approx \Phi\Theta$ .

Во-вторых, это способ мягкой би-кластеризации документов по множеству тематических кластеров  $T$ . При обычной «жёсткой» кластеризации (hard clustering) каждый документ целиком относится к одному кластеру. Тематическая модель распределяет содержимое документа  $d$  по кластерам-темам согласно распределению  $p(t|d)$ . Такая кластеризация называется «мягкой» (soft clustering). Аналогично, каждый терм  $w$  мягко распределяется согласно  $p(t|w)$  по тем же кластерам. Поэтому тематическое моделирование называют *мягкой би-кластеризацией*.

В-третьих, это способ векторизации текста, т.е. получения тематических распределений для любого документа  $p(t|d)$ , термина  $p(t|w)$ , термина в контексте документа  $p(t|d, w)$ , текстового фрагмента или предложения  $p(t|s)$ . Вообще, распределение вида  $p(t|x)$  называют тематическим векторным представлением, тематическим эмбедингом или *тематикой* объекта  $x$ .

В-четвёртых, это автокодировщик документов. *Кодировщик*  $f_\Phi: p_d \rightarrow \theta_d$  преобразует векторное представление документа  $p_d = \hat{p}(w|d)$  высокой размерности  $|W|$  в тематическое векторное представление  $\theta_d = p(t|d)$  низкой размерности  $|T|$ . *Декодировщик*  $g_\Phi: \theta_d \rightarrow \Phi\theta_d$  реконструирует исходное представление. Чем точнее реконструкция, тем больше информации об исходном документе удалось закодировать в векторе  $\theta_d$ . В тематическом моделировании декодировщик линейный, он умножает матрицу  $\Phi$  на вектор  $\theta_d$ . Матрица  $\Phi$  является параметром как кодировщика, так и декодировщика. Матрица  $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_D)$  является не параметром, а результатом кодирования всех документов коллекции. Это важное различие ролей двух матриц ускользает от внимания, если рассматривать тематическую модель только с точки зрения матричного разложения.

В-пятых, это языковая модель, которая предсказывает появление слов в документах. Следует признать, что в данном качестве обычные тематические модели довольно слабы. Хорошо предсказать слово возможно только при тщательном анализе его локального контекста, который разрушается гипотезой «мешка слов». В тематическом моделировании изобретено довольно много способов отказаться от этой гипотезы и обрабатывать текст как последовательность термов. Но есть и другой, неустранимый, недостаток: вряд ли стоит ожидать, что появление слова определяется только тематикой, даже если она аккуратно оценивается по локальному контексту. Глубокие нейронные сети на основе моделей внимания [27] и архитектуры трансформера, такие как BERT [53] и GPT-3 [87] моделируют весь комплекс языковых явлений и предсказывают слова в тексте лучше, чем это делают люди. Однако эти модели неинтерпретируемы: мы не можем знать, какие именно языковые явления и каким образом смоделировала нейросеть. Также неясно, какой смысл имеет каждая координата векторного представления текста.

Тематические эмбединги, в отличие от нейросетевых, обладают свойством интерпретируемости. Тема может рассказать о себе наиболее частотными словами из распределения  $p(w|t)$ , либо целыми фразами, отобранными из текстов методами экстрактивной суммаризации или автоматического именования тем [106]. Также и любой тематический эмбединг  $p(t|x)$  способен рассказать о себе словами или фразами естественного языка.

Подытожим. Целью тематического моделирования является не столько предсказание слов в документах  $p(w|d)$ , сколько выявление тематической кластерной структуры текстовой коллекции, определение тематики документов и связанных с ними объектов  $p(t|x)$ , описание каждой темы  $t$  словами естественного языка с помощью распределений  $p(w|t)$ .

**Частотные оценки условных вероятностей.** В пространстве  $\Omega_n$  вероятности, выражающиеся через переменные  $d$  и  $w$ , совпадают с частотами соответствующих наблюдаемых событий:

$$p(d, w) = \frac{n_{dw}}{n}, \quad p(d) = \frac{n_d}{n}, \quad p(w) = \frac{n_w}{n}, \quad p(w|d) = \frac{n_{dw}}{n_d}; \quad (3)$$

$n_{dw}$  — число вхождений термина  $w$  в документ  $d$ ;

$n_d = \sum_w n_{dw}$  — длина документа  $d$  в терминах;

$n_w = \sum_d n_{dw}$  — число вхождений термина  $w$  во все документы коллекции;

$n = \sum_d \sum_w n_{dw}$  — длина коллекции в терминах.

Вероятности, связанные со скрытой переменной  $t$ , тоже определяются как частоты:

$$p(t) = \frac{n_t}{n}, \quad p(w|t) = \frac{n_{wt}}{n_t}, \quad p(t|d) = \frac{n_{td}}{n_d}, \quad p(t|d, w) = \frac{n_{tdw}}{n_{dw}}; \quad (4)$$

$n_{tdw}$  — число троек, в которых терм  $w$  документа  $d$  связан с темой  $t$ ;

$n_{td} = \sum_w n_{tdw}$  — число троек, в которых терм документа  $d$  связан с темой  $t$ ;

$n_{wt} = \sum_d n_{tdw}$  — число троек, в которых терм  $w$  связан с темой  $t$ ;

$n_t = \sum_d \sum_w n_{tdw}$  — число троек, связанных с темой  $t$ .

В отличие от (3), эти частотные оценки не могут быть вычислены непосредственно по исходным данным, так как темы  $t_i$  неизвестны.

Согласно закону больших чисел, при  $n \rightarrow \infty$  частотные оценки, определяемые формулами (3)–(4), стремятся к соответствующим вероятностям в пространстве  $\Omega$ .

**EM-алгоритм.** Заметим, что все оценки (4) выражаются через  $n_{tdw} = n_{dw}p(t|d, w)$ . Зная условные распределения  $p(t|d, w)$ , можно оценить искомые параметры тематической модели  $\varphi_{wt} = p(w|t)$  и  $\theta_{td} = p(t|d)$ . И, наоборот, зная параметры модели, можно выразить условные вероятности  $p(t|d, w)$  по формуле Байеса:

$$p(t|d, w) = \frac{p(t, w|d)}{p(w|d)} = \frac{p(w|t)p(t|d)}{p(w|d)} = \frac{\varphi_{wt}\theta_{td}}{\sum_s \varphi_{ws}\theta_{sd}}. \quad (5)$$

---

**Алгоритм 2.** Рациональный EM-алгоритм для тематической модели (2).
 

---

**Вход:** коллекция  $D$ , число тем  $|T|$ , число итераций  $i_{\max}$ ;

**Выход:** матрицы термов тем  $\Phi$  и термов документов  $\Theta$ ;

- 1 инициализация  $\varphi_{wt}, \theta_{td}$  для всех  $d \in D, w \in W, t \in T$ ;
  - 2 **для всех** итераций  $i = 1, \dots, i_{\max}$
  - 3     обнулить  $n_{wt}, n_{td}, n_t$  для всех  $d \in D, w \in W, t \in T$ ;
  - 4     **для всех** документов  $d \in D$  и всех термов  $w \in d$
  - 5          $n_{tdw} := n_{dw} \varphi_{wt} \theta_{td} / \sum_z \varphi_{wz} \theta_{zd}$  для всех  $t \in T$ ;
  - 6         увеличить  $n_{wt}, n_{td}, n_t$  на  $n_{tdw}$  для всех  $t \in T$ ;
  - 7      $\varphi_{wt} := n_{wt} / n_t$  для всех  $w \in W, t \in T$ ;
  - 8      $\theta_{td} := n_{td} / n_d$  для всех  $d \in D, t \in T$ ;
- 

Таким образом, получаем систему нелинейных уравнений относительно параметров модели  $\varphi_{wt}, \theta_{td}$  и вспомогательных переменных  $p_{tdw}, n_{wt}, n_{td}, n_t$ :

$$p_{tdw} = \frac{\varphi_{wt} \theta_{td}}{\sum_s \varphi_{ws} \theta_{sd}}; \quad (6)$$

$$\varphi_{wt} = \frac{n_{wt}}{n_t}; \quad n_{wt} = \sum_{d \in D} n_{dw} p_{tdw}; \quad n_t = \sum_{w \in W} n_{wt}; \quad (7)$$

$$\theta_{td} = \frac{n_{td}}{n_d}; \quad n_{td} = \sum_{w \in d} n_{dw} p_{tdw}. \quad (8)$$

Для её решения удобно применять метод простых итераций: сначала выбираются начальные приближения параметров  $\varphi_{wt}$  и  $\theta_{td}$ , по ним вычисляются вспомогательные переменные  $p_{tdw}$ , которые позволяют найти следующее приближение параметров  $\varphi_{wt}$  и  $\theta_{td}$ . Вычисления по формулам (6)–(8) продолжаются в цикле до сходимости.

Этот итерационный процесс является частным случаем EM-алгоритма, предназначенного для построения вероятностных моделей со скрытыми переменными [52]. Вычисление условных распределений скрытых переменных (6) называется E-шагом (expectation), вычисление параметров модели (7)–(8) — M-шагом (maximization).

**Рациональный EM-алгоритм.** Вычисление переменных  $n_{wt}, n_{td}, n_t$  на M-шаге требует однократного прохода коллекции в цикле по всем термам  $w \in d$  всех документов  $d \in D$ . Внутри этого цикла значение  $p_{tdw}$  вычисляется только один раз. Поэтому E-шаг можно встроить внутрь M-шага без дополнительных вычислительных затрат и без хранения трёхмерной матрицы  $p_{tdw}$ . Этот вариант реализации EM-алгоритма будем называть *рациональным*; он показан в Алгоритме 2.

Далее мы выведем EM-алгоритм из общей оптимизационной постановки задачи. Сейчас мы пришли к нему элементарным путём, который даёт простое интуитивное понимание сути EM-алгоритма, но оставляет без ответов важные вопросы: сходится ли алгоритм к решению системы уравнений, единственно ли это решение, и почему эта система описывает тематическую модель, приближающую  $\hat{p}(w|d)$ .

### 3 Максимизация на единичных симплексах

В этом разделе будет доказана лемма о максимизации гладкой функции на единичных симплексах. С её помощью выводятся формулы EM-подобных итерационных процессов для любых тематических моделей, от самых простых до самых сложных. Применимость этой леммы выходит далеко за пределы тематического моделирования. Она позволяет оптимизировать любые модели, параметрами которых являются неотрицательные нормированные векторы.

**Необходимые условия максимума.** Классическим инструментом решения задач оптимизации с ограничениями равенствами и неравенствами являются *условия Каруша–Куна–Таккера*. Рассмотрим задачу математического программирования

$$\begin{cases} f(x) \rightarrow \max_x; \\ g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m; \\ h_j(x) = 0, \quad j = 1, \dots, k. \end{cases}$$

**Теорема 3.1.** Пусть функции  $f(x)$ ,  $g_i(x)$ ,  $h_j(x)$  непрерывно дифференцируемы в точке  $x$ . Если  $x$  — точка локального максимума и задача удовлетворяет условиям регулярности, то существуют значения  $\mu_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $\lambda_j$ ,  $j = 1, \dots, k$ , называемые множителями Лагранжа, такие, что:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0, \quad \mathcal{L}(x; \mu, \lambda) = f(x) - \sum_{i=1}^m \mu_i g_i(x) - \sum_{j=1}^k \lambda_j h_j(x); \\ g_i(x) \leq 0; \quad h_j(x) = 0; \quad (\text{исходные ограничения}) \\ \mu_i \geq 0; \quad (\text{двойственные ограничения}) \\ \mu_i g_i(x) = 0; \quad (\text{условие дополняющей нежёсткости}) \end{cases} \quad (9)$$

Условия регулярности могут формулироваться по-разному. В задачах с линейными ограничениями они выполнены всегда.

Задача (15), (14) относится к классу невыпуклых задач математического программирования. Для неё возможно найти лишь локальный экстремум, качество которого будет зависеть от начального приближения. Далее мы не будем уделять много внимания вопросам инициализации, сосредоточившись на модификациях самой функции  $f$ , которые способны влиять на решение гораздо сильнее.

**Лемма о максимизации гладкой функции на единичных симплексах.** Введём оператор  $\text{norm}$ , который преобразует произвольный вектор  $(x_i)_{i \in I}$  в вектор вероятностей  $(p_i)_{i \in I}$  дискретного распределения путём обнуления отрицательных элементов и нормировки:

$$p_i = \text{norm}_{i \in I}(x_i) = \frac{(x_i)_+}{\sum_{k \in I} (x_k)_+}, \quad \text{для всех } i \in I,$$

где  $(x)_+ = \max\{0, x\}$  — операция положительной срезки. Если  $x_i \leq 0$  для всех  $i \in I$ , то результатом оператора  $\text{norm}$  по определению является нулевой вектор.

**Лемма 3.2 (о максимизации на симплексах).** Пусть функция  $f(\Omega)$  непрерывно дифференцируема по набору векторов  $\Omega = (\omega_j)_{j \in J}$ ,  $\omega_j = (\omega_{ij})_{i \in I_j}$ , вообще говоря, различных размерностей  $|I_j|$ . Тогда векторы  $\omega_j$  локального экстремума задачи

$$\begin{cases} f(\Omega) \rightarrow \max_{\Omega}; \\ \sum_{i \in I_j} \omega_{ij} = 1, \quad j \in J; \\ \omega_{ij} \geq 0, \quad i \in I_j, j \in J; \end{cases}$$

при условии  $1^0 : (\exists i \in I_j) \omega_{ij} \frac{\partial f}{\partial \omega_{ij}} > 0$  удовлетворяют уравнениям

$$\omega_{ij} = \operatorname{norm}_{i \in I_j} \left( \omega_{ij} \frac{\partial f}{\partial \omega_{ij}} \right), \quad i \in I_j; \quad (10)$$

при условии  $2^0 : (\forall i \in I_j) \omega_{ij} \frac{\partial f}{\partial \omega_{ij}} \leq 0$  и  $(\exists i \in I_j) \omega_{ij} \frac{\partial f}{\partial \omega_{ij}} < 0$  — уравнениям

$$\omega_{ij} = \operatorname{norm}_{i \in I_j} \left( -\omega_{ij} \frac{\partial f}{\partial \omega_{ij}} \right), \quad i \in I_j;$$

в противном случае (условие  $3^0$ ) — однородным уравнениям  $\omega_{ij} \frac{\partial f}{\partial \omega_{ij}} = 0$ ,  $i \in I_j$ .

**Доказательство.** Запишем лагранжиан оптимизационной задачи с ограничениями неотрицательности и нормированности векторов:

$$\mathcal{L}(\Omega) = f(\Omega) - \sum_{j \in J} \lambda_j \left( \sum_{i \in I_j} \omega_{ij} - 1 \right) + \sum_{j \in J} \sum_{i \in I_j} \mu_{ij} \omega_{ij},$$

где множители  $\lambda_j$  соответствуют ограничениям нормировки,  $\mu_{ij}$  — ограничениям неотрицательности. Запишем условия Каруша–Куна–Таккера (9), приравняв нулю производные лагранжиана по параметрам модели:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega_{ij}} = \frac{\partial f}{\partial \omega_{ij}} - \lambda_j + \mu_{ij} = 0; \quad \mu_{ij} \omega_{ij} = 0. \quad (11)$$

Зафиксируем  $j \in J$ . Предположим, что  $\omega_{ij} > 0$ . Тогда  $\mu_{ij} = 0$ . Умножив обе части равенства (11) на  $\omega_{ij}$ , получим уравнение

$$\omega_{ij} \frac{\partial f}{\partial \omega_{ij}} = \omega_{ij} \lambda_j.$$

Обозначим левую часть этого равенства через  $A_{ij}$ . Тогда  $A_{ij} = \omega_{ij} \lambda_j$ .

Возможны три случая.

1. Пусть существует индекс  $k \in I_j$  такой, что  $A_{kj} > 0$ . Тогда  $\lambda_j > 0$ . Если  $A_{ij} \leq 0$  при некотором  $i \in I_j$ , то уравнение не может быть выполнено, и полученное противоречие означает, что сделанное вначале предположение  $\omega_{ij} > 0$  не верно, следовательно,  $\omega_{ij} = 0$ . Объединяя уравнение  $\omega_{ij} \lambda_j = A_{ij}$  при  $A_{ij} > 0$  с нулевым решением  $\omega_{ij} = 0$  при  $A_{ij} \leq 0$ , получим  $\omega_{ij} \lambda_j = (A_{ij})_+$ . Суммируя левую и правую части этого уравнения по  $i$ , выразим двойственную переменную:  $\lambda_j = \sum_{i \in I_j} (A_{ij})_+$ . Подставляя полученное значение  $\lambda_j$  в формулу  $\omega_{ij} = \frac{1}{\lambda_j} (A_{ij})_+$ , получим искомое уравнение (10).

2. Если  $A_{ij} \leq 0$  для всех  $i \in I_j$  и хотя бы одно из этих неравенств строгое, то  $\lambda_j < 0$ , и аналогичным образом мы получаем второе искомое уравнение.

3. Если  $A_{ij} = 0$  для всех  $i \in I_j$ , то  $\lambda_j = 0$ , и вектор  $\omega_{ij}$  определяется из системы однородных уравнений  $\omega_{ij} \frac{\partial f}{\partial \omega_{ij}} = 0$  при условиях неотрицательности и нормировки.

Лемма доказана.

Для решения системы уравнений удобно использовать метод простой итерации. Сначала выбирается начальное приближение для всех векторов  $\omega_j$ , затем их значения многократно обновляются по формуле (10). Очередность и периодичность обновлений могут влиять на сходимость процесса и конечный результат.

Заметим, что итерационный процесс похож на градиентный метод максимизации, но последний требует выбора градиентного шага  $\eta$  и не учитывает ограничений неотрицательности и нормировки:

$$\omega_{ij} = \omega_{ij} + \eta \frac{\partial f}{\partial \omega_{ij}}.$$

Лемма о максимизации на единичных симплексах может применяться не только в тематическом моделировании, но и для оптимизации любых моделей, параметрами которых являются дискретные вероятностные распределения или неотрицательные нормированные векторы. В частности, её можно использовать для обучения нейронных сетей, в которых такие ограничения накладываются на некоторые векторы параметров. При этом градиенты  $\frac{\partial f}{\partial \omega_i}$  можно по-прежнему вычислять методом обратного распространения ошибки. Ограничения приводят к модификации градиентного шага, но никак не сказываются на вычислении самих градиентов.

**Сходимость итерационного процесса.** Рассмотрим итерационный процесс, основанный на формуле (10), при некотором начальном приближении  $\Omega^0 = (\omega_j^0)_{j \in J}$ :

$$\omega_{ij}^{t+1} = \operatorname{norm}_{i \in I_j} \left( \omega_{ij}^t \frac{\partial f(\Omega^t)}{\partial \omega_{ij}^t} \right), \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (12)$$

**Теорема 3.3.** Пусть  $f(\Omega)$  — ограниченная сверху, непрерывно дифференцируемая функция, и все  $\Omega^t$ , начиная с некоторой итерации  $t^0$  обладают свойствами:

- 1)  $\forall j \in J \quad \forall i \in I_j \quad \omega_{ij}^t = 0 \rightarrow \omega_{ij}^{t+1} = 0$  (сохранение нулей);
- 2)  $\exists \epsilon > 0 \quad \forall j \in J \quad \forall i \in I_j \quad \omega_{ij}^t \notin (0, \epsilon)$  (отделимость от нуля);
- 3)  $\exists \delta > 0 \quad \forall j \in J \quad \exists i \in I_j \quad \omega_{ij}^t \frac{\partial f(\Omega^t)}{\partial \omega_{ij}^t} \geq \delta$  (невыврожденность);

Тогда  $|\omega_{ij}^{t+1} - \omega_{ij}^t| \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Данная теорема является обобщением результатов о сходимости EM-алгоритма в тематическом моделировании [11] и приводится здесь без доказательства. В условиях Теоремы 3.3 все предельные точки последовательности  $\{\Omega^t\}_{t=0}^{\infty}$  являются неподвижными точками преобразования (12). На практике свойства 1–3 могут быть гарантированы при реализации итерационного алгоритма.

## 4 Аддитивная регуляризация

В этом разделе мы введём общий формализм аддитивной регуляризации, который позволяет наделять тематические модели разнообразными полезными свойствами.



Что это за свойства и как они формализуются с помощью регуляризации, будем разбираться в следующих разделах. Здесь мы поставим задачу тематического моделирования как задачу максимизации на единичных симплексах. С помощью леммы 3.2 выведем EM-алгоритм буквально в две строчки.

**Принцип максимума правдоподобия** используется в математической статистике для оценивания неизвестных параметров вероятностных моделей по наблюдаемым данным. Согласно этому принципу, выбираются такие значения параметров, при которых наблюдаемая выборка наиболее правдоподобна.

*Функция правдоподобия* определяется как зависимость вероятности наблюдаемой выборки  $X = (d_i, w_i)_{i=1}^n$  от параметров модели  $\Phi, \Theta$ . В силу гипотезы о независимости элементов выборки она равна произведению вероятностей термов в документах:

$$p(X; \Phi, \Theta) = \prod_{i=1}^n p(d_i, w_i) = \prod_{d \in D} \prod_{w \in d} p(w | d)^{n_{dw}} \underbrace{p(d)^{n_{dw}}}_{\text{const}} \rightarrow \max_{\Phi, \Theta}.$$

Прологарифмировав правдоподобие, перейдём от произведения к сумме и отбросим слагаемые, не зависящие от параметров модели. Получим задачу максимизации log-правдоподобия при ограничениях неотрицательности и нормировки:

$$\sum_{d \in D} \sum_{w \in d} n_{dw} \ln \sum_{t \in T} \varphi_{wt} \theta_{td} \rightarrow \max_{\Phi, \Theta}; \quad (13)$$

$$\sum_{w \in W} \varphi_{wt} = 1; \quad \varphi_{wt} \geq 0; \quad \sum_{t \in T} \theta_{td} = 1; \quad \theta_{td} \geq 0. \quad (14)$$

**Регуляризация некорректно поставленных задач.** Задача называется *корректно поставленной* по Адамару, если её решение существует, единственно и устойчиво.

Задача стохастического матричного разложения является некорректно поставленной, так как множество её решений в общем случае бесконечно. Если  $\Phi\Theta$  — решение, то  $(\Phi S)(S^{-1}\Theta)$  также является решением для всех невырожденных матриц  $S$ , при условии, что матрицы  $\Phi S$  и  $S^{-1}\Theta$  — стохастические.

Существует общий подход к решению некорректно поставленных обратных задач, называемый *регуляризацией* [16]. Когда оптимизационная задача недоопределена, к основному критерию добавляют дополнительный критерий — регуляризатор, учитывающий специфику решаемой задачи и знания предметной области. В практических задачах автоматической обработки текстов дополнительных критериев и ограничений на решение может быть много.

*Аддитивная регуляризация тематических моделей* (ARTM) [4] основана на максимизации линейной комбинации логарифма правдоподобия и *регуляризаторов*  $R_i(\Phi, \Theta)$  с неотрицательными *коэффициентами регуляризации*  $\tau_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ :

$$\sum_{d \in D} \sum_{w \in d} n_{dw} \ln \sum_{t \in T} \varphi_{wt} \theta_{td} + R(\Phi, \Theta) \rightarrow \max_{\Phi, \Theta}; \quad R(\Phi, \Theta) = \sum_{i=1}^k \tau_i R_i(\Phi, \Theta); \quad (15)$$

при ограничениях неотрицательности и нормировки (14).

Преобразование вектора критериев в один скалярный критерий — это один из базовых приёмов в многокритериальной оптимизации, называемый *скаляризацией*.

**Основная теорема ARTM.** Применим лемму 3.2 к набору вектор-столбцов двух матриц  $\Omega = (\Phi, \Theta)$ . В дальнейшем эта лемма пригодится нам и в более сложных случаях, когда матриц будет больше двух.

**Теорема 4.1.** Пусть функция  $R(\Phi, \Theta)$  непрерывно дифференцируема. Тогда точка  $(\Phi, \Theta)$  локального экстремума задачи (15) с ограничениями (14) удовлетворяет системе уравнений со вспомогательными переменными  $p_{tdw} = p(t|d, w)$ , если из решения исключить нулевые столбцы матриц  $\Phi, \Theta$ :

$$p_{tdw} = \operatorname{norm}_{t \in T}(\varphi_{wt}\theta_{td}); \quad (16)$$

$$\varphi_{wt} = \operatorname{norm}_{w \in W} \left( n_{wt} + \varphi_{wt} \frac{\partial R}{\partial \varphi_{wt}} \right); \quad n_{wt} = \sum_{d \in D} n_{dw} p_{tdw}; \quad (17)$$

$$\theta_{td} = \operatorname{norm}_{t \in T} \left( n_{td} + \theta_{td} \frac{\partial R}{\partial \theta_{td}} \right); \quad n_{td} = \sum_{w \in d} n_{dw} p_{tdw}. \quad (18)$$

**Доказательство.** Перепишем (16) в следующем виде:

$$p_{tdw} = \operatorname{norm}_{t \in T}(\varphi_{wt}\theta_{td}) = \frac{\varphi_{wt}\theta_{td}}{\sum_s \varphi_{ws}\theta_{sd}} = \frac{\varphi_{wt}\theta_{td}}{p(w|d)}.$$

Применим к задаче (15) основное решение (10) из леммы 3.2 и выделим в полученных выражениях вспомогательные переменные  $p_{tdw}$ :

$$\begin{aligned} \varphi_{wt} &= \operatorname{norm}_{w \in W} \left( \varphi_{wt} \frac{\partial}{\partial \varphi_{wt}} \left( \sum_{d \in D} \sum_{w \in d} n_{dw} \ln \sum_{t \in T} \varphi_{wt}\theta_{td} + R(\Phi, \Theta) \right) \right) = \\ &= \operatorname{norm}_{w \in W} \left( \varphi_{wt} \sum_{d \in D} n_{dw} \frac{\theta_{td}}{p(w|d)} + \varphi_{wt} \frac{\partial R}{\partial \varphi_{wt}} \right) = \operatorname{norm}_{w \in W} \left( \sum_{d \in D} n_{dw} p_{tdw} + \varphi_{wt} \frac{\partial R}{\partial \varphi_{wt}} \right); \\ \theta_{td} &= \operatorname{norm}_{t \in T} \left( \theta_{td} \frac{\partial}{\partial \theta_{td}} \left( \sum_{d \in D} \sum_{w \in d} n_{dw} \ln \sum_{t \in T} \varphi_{wt}\theta_{td} + R(\Phi, \Theta) \right) \right) = \\ &= \operatorname{norm}_{t \in T} \left( \theta_{td} \sum_{w \in d} n_{dw} \frac{\varphi_{wt}}{p(w|d)} + \theta_{td} \frac{\partial R}{\partial \theta_{td}} \right) = \operatorname{norm}_{t \in T} \left( \sum_{w \in d} n_{dw} p_{tdw} + \theta_{td} \frac{\partial R}{\partial \theta_{td}} \right). \end{aligned}$$

Нулевые столбцы в матрицах  $\Phi$  и  $\Theta$  получаются в тех случаях, когда в лемме 3.2 вместо условия 1<sup>0</sup> реализуются условия 2<sup>0</sup> или 3<sup>0</sup>. В таких случаях основное решение (10) уже неприменимо, однако теорема исключает их из рассмотрения.

Теорема доказана.

**Регуляризованный EM-алгоритм.** Систему (16)–(18) удобно решать методом простых итераций. Сначала выбираются начальные приближения  $\varphi_{wt}, \theta_{td}$ , затем в цикле до сходимости чередуются *E-шаг* (16) и *M-шаг* (17)–(18). Каждая итерация представляет собой проход по всем термам всех документов коллекции.

*Рациональный EM-алгоритм с регуляризацией* строится аналогично алгоритму 2, только шаги 7 и 8 заменяются формулами M-шага (17)–(18). В Алгоритме 3 показано ещё несколько усовершенствований:

1) вектор  $\theta_d$  определяется по окончании обработки документа  $d$ , а не всей коллекции, поэтому далее он может не храниться, как и счётчики  $n_{td}$ ;

---

**Алгоритм 3.** Регуляризованный EM-алгоритм для ARTM.

---

**Вход:** коллекция  $D$ , число тем  $|T|$ , число итераций  $i_{\max}$ ;  
**Выход:** матрицы термов тем  $\Phi$  и тем документов  $\Theta$ ;

- 1 инициализация  $\varphi_{wt} := \operatorname{norm}_{w \in W}(p_w + \text{rand})$  для всех  $w \in W, t \in T$ ;
- 2 **для всех** итераций  $i = 1, \dots, i_{\max}$
- 3      $n_{wt} := 0$  для всех  $w \in W, t \in T$ ;
- 4     **для всех** документов  $d \in D$
- 5         инициализация  $\theta_{td} := \frac{1}{|T|}$  для всех  $t \in T$ ;
- 6         **повторять**
- 7              $n_{tdw} := n_{dw} \operatorname{norm}_{t \in T}(\varphi_{wt}\theta_{td})$  для всех  $w \in d, t \in T$ ;
- 8              $\theta_{td} := \operatorname{norm}_{t \in T}\left(\sum_{w \in d} n_{tdw} + \theta_{td} \frac{\partial R}{\partial \theta_{td}}\right)$  для всех  $t \in T$ ;
- 9         **пока**  $\theta_d$  не сойдётся;
- 10          $n_{wt} := n_{wt} + n_{tdw}$  для всех  $w \in d, t \in T$ ;
- 11      $\varphi_{wt} := \operatorname{norm}_{w \in W}\left(n_{wt} + \varphi_{wt} \frac{\partial R}{\partial \varphi_{wt}}\right)$  для всех  $w \in W, t \in T$ ;

---

2) при обработке документа  $d$  может быть сделано несколько итераций по всем словам документа  $w \in d$  до сходимости вектора  $\theta_d$ ;

3) вектор  $\theta_d$  инициализируется равномерным распределением;

4) вектор  $\varphi_t$  инициализируется случайным распределением, которое отделяется от нуля распределением  $p_w = n_w/n$ ;

Известно, что EM-алгоритм без регуляризации сходится в слабом смысле: на каждой итерации правдоподобие увеличивается [52]. Аналогичные условия слабой сходимости для ARTM получены в [11].

*Онлайновый EM-алгоритм* считается наиболее быстрым и хорошо распараллеливается [67, 29]. Обновления матрицы  $\Phi$  производятся не после прохода всей коллекции, а чаще — после обработки определённого объёма данных. Если коллекция большая, то матрица  $\Phi$  может сойтись и перестать меняться задолго до окончания первой итерации. Тогда одного прохода будет достаточно для построения модели. Поэтому онлайн-алгоритмы способны обрабатывать потоковые данные.

Детали параллельной реализации оффлайнового и онлайн-алгоритма в библиотеке **BigARTM** описаны в разделах 18 и 19, ещё подробнее — в статьях [62, 3].

**Промежуточная форма записи EM-алгоритма** представляет M-шаг в виде отдельной задачи максимизации для определения параметров модели при фиксированных переменных  $p_{tdw} = p(t|d, w)$ , вычисленных на E-шаге.

**Теорема 4.2.** В условиях теоремы 4.1 точка локального экстремума  $(\Phi, \Theta)$  оптимизационной задачи (15) с ограничениями (14) совпадает с точкой локального экс-

тремума оптимизационной задачи (20) с ограничениями (14) и (19):

$$p_{tdw} = \operatorname{norm}_{t \in T}(\varphi_{wt}\theta_{td}); \quad (19)$$

$$\sum_{d \in D} \sum_{w \in W} \sum_{t \in T} n_{dw} p_{tdw} \ln(\varphi_{wt}\theta_{td}) + R(\Phi, \Theta) \rightarrow \max_{\Phi, \Theta}. \quad (20)$$

**Доказательство.** Представив в (20) логарифм произведения суммой двух логарифмов, получим две суммы, первая зависит только от  $\Phi$ , вторая — только от  $\Theta$ :

$$\sum_{w \in W} \sum_{t \in T} n_{wt} \ln \varphi_{wt} + \sum_{d \in D} \sum_{t \in T} n_{td} \ln \theta_{td} + R(\Phi, \Theta) \rightarrow \max_{\Phi, \Theta}.$$

Применяя к этой задаче формулу (10) из леммы 3.2 при ограничениях (14) и фиксированных значениях переменных  $p_{tdw}$ , немедленно получим, что необходимое условие экстремума в задаче (20) эквивалентно паре уравнений (17)–(18).

**Условия вырожденности.** В тематическом моделировании случаи  $2^0$  и  $3^0$  из леммы 3.2 будем считать вырожденными. Если нормировочный знаменатель в (10) окажется равным нулю, то соответствующий вектор  $\omega_j$  будем полагать нулевым и исключать его из модели, сокращая размерность пространства параметров и считая это полезным побочным действием регуляризации. Если вырожденность нежелательна, то её нетрудно избежать, уменьшая коэффициент регуляризации.

Тема  $t$  называется *вырожденной*, если

$$n_{wt} + \varphi_{wt} \frac{\partial R}{\partial \varphi_{wt}} \leq 0 \text{ для всех } w \in W.$$

Вырожденность является следствием сильного разреживающего воздействия регуляризатора  $R$ . Обнуление столбца матрицы  $\Phi$  означает, что для максимизации регуляризатора выгодно исключить данную тему из модели.

Документ  $d$  называется *вырожденным*, если

$$n_{td} + \theta_{td} \frac{\partial R}{\partial \theta_{td}} \leq 0 \text{ для всех } t \in T.$$

Вырожденность документа может означать, что модель не в состоянии его описать, например, если он слишком короткий или не соответствует тематике коллекции. Обнуление столбца матрицы  $\Theta$  означает, что, для максимизации регуляризатора данный документ выгодно считать аномальным.

**Модель PLSA** или вероятностного латентного семантического анализа (probabilistic latent semantic analysis) исторически является первой вероятностной тематической моделью. Она была предложена Томасом Хофманном в 1999 году [68]. В ARTM она соответствует нулевому регуляризатору,  $R(\Phi, \Theta) = 0$ . В этом случае система (16)–(18) совпадает с системой (6)–(8), которую мы получили ранее из элементарных соображений. Добавление регуляризации не меняет формулу E-шага.

В модели PLSA не может быть вырожденных тем или документов, поскольку вырожденность возможна только при отрицательных производных регуляризатора.

**О стратегиях регуляризации.** Задача тематического моделирования по сути является многокритериальной. Темы должны удовлетворять многим требованиям одновременно: интерпретируемости, различности, разреженности и т. д. Тематическая модель обычно используется как вспомогательный инструмент для решения одной или сразу нескольких задач текстовой аналитики — информационного поиска, визуализации, категоризации, сегментации, суммаризации и т. д. Каждая задача предъявляет свои требования к модели. В ARTM все требования формализуются в виде критериев регуляризации  $R_i$  и балансируются с помощью коэффициентов  $\tau_i$ . Коэффициенты  $\tau_i$  приходится подбирать в каждой задаче экспериментально, чтобы найти компромисс между всеми критериями. Более того, для измерения качества модели обычно используются не сами регуляризаторы  $R_i$ , а какие-то другие *метрики качества*. Регуляризаторы должны быть гладкими функциями, удобными для вычислений на М-шаге. Метрики качества должны иметь удобные для интерпретации числовые значения. К сожалению, эти требования часто входят в противоречие. Например, общепринятые метрики качества информационного поиска почти никогда не являются гладкими функциями.

На практике проблема выбора коэффициентов регуляризации перерастает в более общую проблему *управления качеством* модели путём изменения коэффициентов  $\tau_i$  в ходе итераций. Одни регуляризаторы могут делать подготовительную работу для других. Некоторые регуляризаторы рекомендуется включать лишь после того, как EM-алгоритм начал сходиться. Другие лучше отключать после того, как они выполнили свою работу. Некоторые регуляризаторы могут нейтрализовать друг друга, и тогда их приходится применять поочерёдно. Образно говоря, регуляризаторы подобны лекарствам для модели — в малых дозах лечат, в больших смертельно опасны, в сочетаниях могут давать неожиданные эффекты. Систематизация этих эффектов становится предметом эмпирических исследований в ARTM.

*Стратегией регуляризации* будем называть правила изменения коэффициентов регуляризации  $\tau_i$  в ходе итераций EM-алгоритма. Эти правила могут использовать текущие значения метрик качества и параметров модели.

Общий подход к автоматической настройке коэффициентов регуляризации и других гиперпараметров для ARTM был предложен в [79] на основе эволюционного алгоритма и представления процесса обучения как многоэтапной стратегии изменения гиперпараметров. В последующей работе [78] этот метод был дополнен суррогатной моделью оценивания качества, что позволило примерно в 1,5 раза сократить время поиска гиперпараметров. В этих работах использовался обычный для *автоматического машинного обучения* (AutoML) подход: для каждой точки в пространстве гиперпараметров модель обучается заново по обучающей выборке, затем её качество оценивается по тестовой выборке. На больших данных такая стратегия представляется слишком затратной. Корректировать гиперпараметры хотелось бы чаще — либо по части коллекции, либо не дожидаясь окончательной сходимости параметров модели. Кроме того, для оценивания качества моделей хотелось бы использовать несколько различных метрик, дополняющих друг друга. Построение быстрых многокритериальных стратегий регуляризации пока остаётся открытой проблемой.

**Относительные коэффициенты регуляризации.** Коэффициенты регуляризации, тщательно подобранные для одной коллекции, могут плохо подходить для другой. Они могут зависеть от размера коллекции, мощности словаря, средней длины доку-

ментов. Если коллекция пополняется, то со временем может потребоваться их перенастройка. Проблема решается с помощью нормировки и введения *относительных коэффициентов регуляризации*, выражающих степень воздействия регуляризатора на тематическую модель. Относительные коэффициенты могут оставаться фиксированными по мере роста коллекции, и для них могут оцениваться универсальные рекомендуемые значения, подходящие для любых задач.

Рассмотрим формулу М-шага (17) со взвешенной суммой регуляризаторов  $R_i$ :

$$\varphi_{wt} = \operatorname{norm}_{w \in W} \left( n_{wt} + \sum_{i=1}^k \tau_i \varphi_{wt} \frac{\partial R_i}{\partial \varphi_{wt}} \right).$$

Введём *суммарное воздействие*  $r_{it}$  регуляризатора  $R_i$  на тему  $t$  и его *суммарное воздействие*  $r_i$  на все темы:

$$r_{it} = \sum_{w \in W} \left| \varphi_{wt} \frac{\partial R_i}{\partial \varphi_{wt}} \right|, \quad r_i = \sum_{t \in T} r_{it}.$$

Введение нормировки  $\tau_i = \tilde{\tau}_i \frac{n}{r_i}$  позволяет интерпретировать коэффициент  $\tilde{\tau}_i$  как *относительное воздействие* регуляризатора  $R_i$  на тематическую модель. Он показывает, во сколько раз влияние регуляризатора на модель сильнее влияния исходных данных. При  $\tilde{\tau}_i \rightarrow 0$  регуляризатор  $R_i$  отключается. При  $\tilde{\tau}_i \rightarrow \infty$  перерегуляризация может приводить к вырождению модели.

Введение другой нормировки  $\tau_i = \tilde{\tau}_i \frac{n_t}{r_{it}}$  позволяет интерпретировать коэффициент  $\tilde{\tau}_i$  как *относительное воздействие* регуляризатора  $R_i$  на отдельную тему  $t$ . Теперь абсолютный коэффициент регуляризации  $\tau_i$  становится зависящим от темы, однако его относительные воздействия на все темы одинаковы.

В общем случае не известно, какая из двух нормировок лучше. Для общности введём выпуклую комбинацию двух нормировок:

$$\tau_i = \tilde{\tau}_i \left( \gamma_i \frac{n_t}{r_{it}} + (1 - \gamma_i) \frac{n}{r_i} \right),$$

где  $\tilde{\tau}_i$  — *относительный коэффициент регуляризации*; параметр  $\gamma_i$  назовём *степенью индивидуализации* воздействия регуляризатора  $R_i$  на темы. При  $\gamma_i = 1$  коэффициенты  $\tau_i$  максимально различаются по темам, выравнивая относительные воздействия регуляризатора  $R_i$  на темы. При  $\gamma_i = 0$  коэффициенты  $\tau_i$  не различаются по темам. Параметр  $\gamma_i$  предлагается подбирать экспериментальным путём.

Аналогично рассмотрим формулу М-шага (18) со взвешенной суммой регуляризаторов  $R_i$ . Введём *суммарное воздействие*  $q_{id}$  регуляризатора  $R_i$  на документ  $d$  и его *суммарное воздействие*  $q_i$  на коллекцию:

$$q_{id} = \sum_{t \in T} \left| \theta_{td} \frac{\partial R_i}{\partial \theta_{td}} \right|, \quad q_i = \sum_{d \in D} q_{id}.$$

Представим коэффициент регуляризации  $\tau_i$  в виде

$$\tau_i = \tilde{\tau}_i \left( \gamma_i \frac{n_d}{q_{id}} + (1 - \gamma_i) \frac{n}{q_i} \right),$$

где  $\tilde{\tau}_i$  — относительный коэффициент регуляризации,  $\gamma_i$  — степень индивидуализации воздействия регуляризатора  $R_i$  на документы. При  $\gamma_i = 1$  коэффициенты максимально различаются по документам, выравнивая относительные воздействия регуляризатора на документы. Высокая индивидуализация полезна, когда документы коллекции существенно различаются по длинам  $n_d$ . При  $\gamma_i = 0$  коэффициенты не различаются по документам.

## 5 Вероятностная регуляризация и модель LDA

Модель латентного размещения Дирихле (latent Dirichlet allocation) LDA [36, 37] является, пожалуй, наиболее цитируемой в тематическом моделировании. В популярных обзорах её иногда отождествляют со всем тематическим моделированием, хотя в литературе можно найти сотни других моделей. Своей публикацией 2003 года Дэвид Блэй, Эндрю Ын и Майкл Джордан определили долгосрочный тренд развития тематического моделирования в рамках байесовского обучения.

В данном разделе мы дадим более простое обоснование LDA с позиций аддитивной регуляризации. Для этого нам не понадобятся ни априорные распределения Дирихле, ни сложный математический аппарат байесовского вывода, рассмотрение которого мы отложим до раздела 7.

**Принцип максимума апостериорной вероятности.** До сих пор мы предполагали, что данные порождаются вероятностной моделью с параметрами  $(\Phi, \Theta)$ , которые не известны и не случайны. Теперь предположим, что параметры сами являются случайными переменными и подчиняются *априорному распределению*  $p(\Phi, \Theta; \gamma)$  с неслучайным *вектором гиперпараметров*  $\gamma$ . В этом случае максимизация совместного правдоподобия данных  $X = (d_i, w_i)_{i=1}^n$  и модели  $(\Phi, \Theta)$  приводит к принципу *максимума апостериорной вероятности* (maximum a posteriori, MAP):

$$p(X, \Phi, \Theta; \gamma) = p(X | \Phi, \Theta) p(\Phi, \Theta; \gamma) = p(\Phi, \Theta; \gamma) \prod_{i=1}^n p(d_i, w_i | \Phi, \Theta) \rightarrow \max_{\Phi, \Theta, \gamma}.$$

После логарифмирования получаем модификацию задачи (13), в которой логарифм априорного распределения становится регуляризатором:

$$\sum_{d \in D} \sum_{w \in d} n_{dw} \ln \sum_{t \in T} \varphi_{wt} \theta_{td} + \underbrace{\ln p(\Phi, \Theta; \gamma)}_{R(\Phi, \Theta)} \rightarrow \max_{\Phi, \Theta, \gamma}. \quad (21)$$

Во многих случаях возможен и обратный переход. Регуляризатор  $R(\Phi, \Theta)$ , изначально не имеющий вероятностной интерпретации, можно преобразовать в априорное распределение путём экспоненцирования и нормировки:  $p(\Phi, \Theta) \propto \exp(R(\Phi, \Theta))$ . Нормировочный множитель не зависит от параметров модели, поэтому для максимизации апостериорной вероятности по  $(\Phi, \Theta)$  он не важен; его отсутствие можно компенсировать подбором коэффициента регуляризации. Однако если решать задачу оптимизации гиперпараметров  $\gamma$ , то его уже придётся вычислять и учитывать.

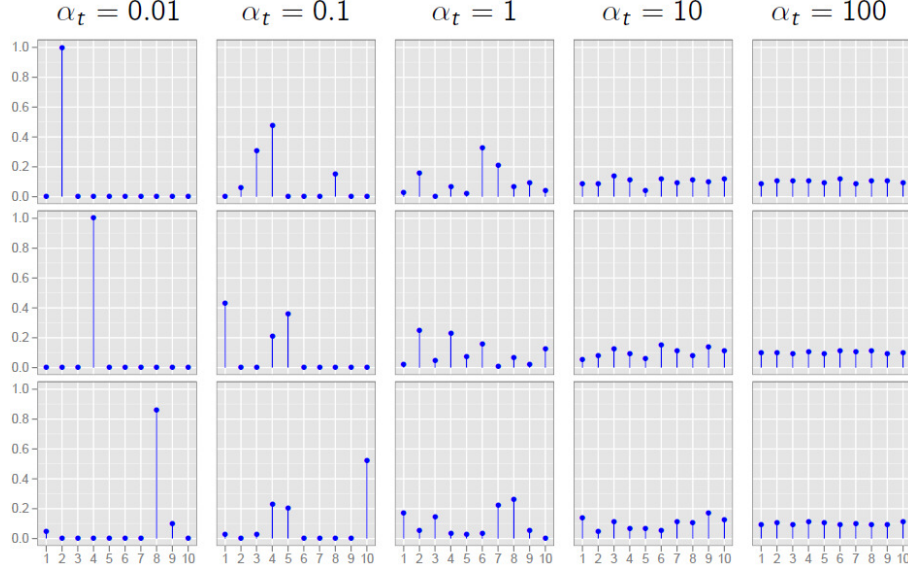


Рис. 3: Неотрицательные нормированные векторы  $\theta$  размерности  $|T| = 10$ , порождённые симметричными распределениями Дирихле, по три вектора для каждого из пяти значений параметра  $\alpha_t$ .

**Априорные распределения Дирихле.** Основной мотивацией для введения модели LDA в [37] было решение проблемы переобучения в модели PLSA. Проблема заключалась в том, что модель PLSA предсказывала вероятности термов  $p(w|d)$  на новых документах заметно хуже, чем на обучающей коллекции. Обычно переобучение связано с избыточной размерностью пространства параметров, поэтому на матрицы  $\Phi$ ,  $\Theta$  следует накладывать дополнительные ограничения. В [37] было введено предположение, что столбцы этих матриц являются случайными векторами и порождаются распределениями Дирихле с гиперпараметрами  $\alpha \in \mathbb{R}^T$  и  $\beta \in \mathbb{R}^W$  соответственно:

$$\text{Dir}(\theta_d; \alpha) = \frac{\Gamma(\alpha_0)}{\prod_t \Gamma(\alpha_t)} \prod_t \theta_{td}^{\alpha_t - 1}, \quad \alpha_t > 0, \quad \alpha_0 = \sum_t \alpha_t, \quad \theta_{td} > 0, \quad \sum_t \theta_{td} = 1;$$

$$\text{Dir}(\varphi_t; \beta) = \frac{\Gamma(\beta_0)}{\prod_w \Gamma(\beta_w)} \prod_w \varphi_{wt}^{\beta_w - 1}, \quad \beta_w > 0, \quad \beta_0 = \sum_w \beta_w, \quad \varphi_{wt} > 0, \quad \sum_w \varphi_{wt} = 1;$$

где  $\Gamma(z)$  — гамма-функция. Параметры распределения Дирихле связаны с математическим ожиданием порождаемых случайных векторов:  $\mathbf{E}\theta_{td} = \frac{\alpha_t}{\alpha_0}$ ,  $\mathbf{E}\varphi_{wt} = \frac{\beta_w}{\beta_0}$ .

Использование распределений Дирихле мотивировано тремя доводами.

Во-первых, распределения Дирихле способны породить как разреженные, так и плотные векторы дискретных распределений, рис. 3. Если вектор параметров состоит из равных значений  $\beta_w$ , то распределение Дирихле называется *симметричным*. При  $\beta_w \equiv 1$  симметричное распределение Дирихле совпадает с равномерным распределением на единичном симплексе. Чем меньше  $\beta_w$ , тем ближе к нулю условные вероятности  $\varphi_{wt} = p(w|t)$  в порождаемых векторах  $\varphi_t$ .

Гипотеза о разреженности распределений  $\varphi_{wt} = p(w|t)$  формализует естественное предположение, что каждая тема  $t$  имеет *семантическое ядро* — множество термов, характеризующих данную тему и имеющих в ней большие вероятности. Таких термов в каждой теме не может быть много, поскольку большинство термов словаря должны относиться к семантическим ядрам других тем.



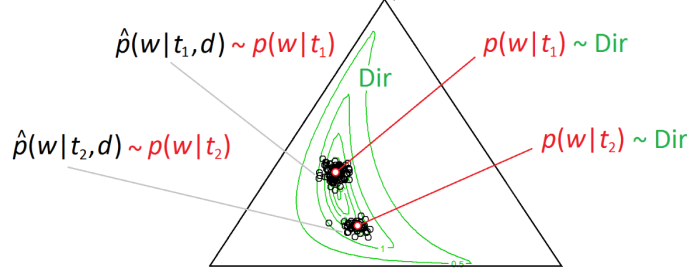


Рис. 4: Распределение  $\text{Dir}(\varphi|\alpha)$  порождает векторы тем  $\varphi_t = p(w|t)$ , которые порождают мультиномиальные распределения  $\hat{p}(w|t, d)$  на единичном симплексе в пространстве размерности  $|W| = 3$ .

Гипотеза о разреженности распределений  $\theta_{td} = p(t|d)$  формализует другое естественное предположение, что каждый документ относится к небольшому числу тем. Трудно представить себе документ обо всех темах (а если это энциклопедия, то в качестве документов стоит взять отдельные её статьи).

Во-вторых, двухуровневая модель порождения данных формализует предположение о существовании тематических кластерных структур в текстовой коллекции. Распределение Дирихле порождает векторы дискретных распределений  $\varphi_{wt} = p(w|t)$ , которые становятся центрами тематических кластеров. Каждый такой центр порождает тематические части документов — векторы дискретных распределений  $p(w|t, d)$ , которые плотно группируются вокруг своего центра, рис. 4.

В-третьих, распределение Дирихле является сопряжённым к мультиномиальному распределению. Это чрезвычайно удобно для методов байесовского вывода, которые рассматриваются в следующих разделах. Именно математическое удобство предопределило популярность распределения Дирихле и модели LDA в тематическом моделировании, хотя убедительных лингвистических обоснований оно не имеет.

Согласно (21), модели LDA соответствует регуляризатор, с точностью до константы равный сумме логарифмов априорных распределений Дирихле:

$$\begin{aligned}
 R(\Phi, \Theta) &= \ln \prod_{t \in T} \text{Dir}(\varphi_t; \beta) \prod_{d \in D} \text{Dir}(\theta_d; \alpha) + \text{const} = \\
 &= \sum_{t \in T} \sum_{w \in W} (\beta_w - 1) \ln \varphi_{wt} + \sum_{d \in D} \sum_{t \in T} (\alpha_t - 1) \ln \theta_{td}. \tag{22}
 \end{aligned}$$

Применение уравнений (17)–(18) к этому регуляризатору даёт формулы М-шага:

$$\varphi_{wt} = \text{norm}_{w \in W}(n_{wt} + \beta_w - 1); \quad \theta_{td} = \text{norm}_{t \in T}(n_{td} + \alpha_t - 1).$$

При  $\beta_w = 1$ ,  $\alpha_t = 1$  априорное распределение Дирихле совпадает с равномерным распределением на симплексе, формулы М-шага переходят в несмещённые частотные оценки условных вероятностей, а модель LDA переходит в PLSA [63].

При  $\beta_w > 1$ ,  $\alpha_t > 1$  регуляризатор имеет сглаживающий эффект, заставляя распределения  $\varphi_t$  и  $\theta_d$  приближаться к заданным распределениям  $\beta$  и  $\alpha$  соответственно.

При  $0 < \beta_w < 1$ ,  $0 < \alpha_t < 1$  распределения  $\varphi_t$  и  $\theta_d$ , наоборот, отдаляются от распределений  $\beta$  и  $\alpha$ . Регуляризатор имеет разреживающий эффект и способен обнулять малые условные вероятности. К сожалению, требование строгой положительности параметров  $\beta_w$  и  $\alpha_t$  в распределениях Дирихле ограничивает возможности управления разреженностью матриц  $\Phi, \Theta$  в модели LDA.

**Не-байесовская интерпретация и обобщение модели LDA.** Регуляризатор (22) можно было бы ввести непосредственно, ни слова не говоря об априорных распределениях Дирихле. Более того, можно снять ограничения положительности с параметров  $\beta_w$ ,  $\alpha_t$  и задавать их индивидуально для каждой ячейки матриц  $\Phi$  и  $\Theta$ .

Рассмотрим *обобщённый регуляризатор сглаживания и разреживания*:

$$R(\Phi, \Theta) = \sum_{t \in T} \sum_{w \in W} \beta_{wt} \ln \varphi_{wt} + \sum_{d \in D} \sum_{t \in T} \alpha_{td} \ln \theta_{td}. \quad (23)$$

Подставив этот регуляризатор в (17)–(18), получим формулы M-шага:

$$\varphi_{wt} = \text{norm}_{w \in W}(n_{wt} + \beta_{wt}); \quad (24)$$

$$\theta_{td} = \text{norm}_{t \in T}(n_{td} + \alpha_{td}). \quad (25)$$

При положительных  $\beta_{wt}$ ,  $\alpha_{td}$  регуляризатор (23) можно интерпретировать как максимизацию правдоподобия. Он одновременно приближает каждое из распределений  $\varphi_t$  к  $\text{poim}_w(\beta_{wt})$  и каждое из распределений  $\theta_d$  — к  $\text{poim}_t(\alpha_{td})$ .

При отрицательных  $\beta_{wt}$ ,  $\alpha_{td}$  минимизация правдоподобия, наоборот, отдаляет столбцы матрицы  $\Phi$  и  $\Theta$  от заданных распределений.

Положительное значение параметра  $\beta_{wt}$  или  $\alpha_{td}$  соответствует сглаживанию, отрицательное — разреживанию.

В общем случае разделим положительные и отрицательные параметры в каждом векторе на два отдельных вектора и оба их отнормируем:

$$\begin{aligned} \beta_{wt}^+ &= \text{norm}_{w \in W}(\beta_{wt}[\beta_{wt} > 0]), & \alpha_{td}^+ &= \text{norm}_{t \in T}(\alpha_{td}[\alpha_{td} > 0]), \\ \beta_{wt}^- &= \text{norm}_{w \in W}(-\beta_{wt}[\beta_{wt} < 0]), & \alpha_{td}^- &= \text{norm}_{t \in T}(-\alpha_{td}[\alpha_{td} < 0]). \end{aligned}$$

Затем перепишем регуляризатор (23) в виде взвешенной суммы  $2|T| + 2|D|$  регуляризаторов, каждый из которых воздействует на свой столбец матрицы  $\Phi$  или  $\Theta$ :

$$\begin{aligned} R(\Phi, \Theta) &= \sum_{t \in T} \beta_{0t}^+ \sum_{w \in W} \beta_{wt}^+ \ln \varphi_{wt} + \sum_{d \in D} \alpha_{0d}^+ \sum_{t \in T} \alpha_{td}^+ \ln \theta_{td} - \\ &- \sum_{t \in T} \beta_{0t}^- \sum_{w \in W} \beta_{wt}^- \ln \varphi_{wt} - \sum_{d \in D} \alpha_{0d}^- \sum_{t \in T} \alpha_{td}^- \ln \theta_{td}, \end{aligned}$$

где  $\beta_{0t}^+$ ,  $\alpha_{0d}^+$ ,  $\beta_{0t}^-$ ,  $\alpha_{0d}^-$  — положительные нормировочные множители, теперь играющие роль коэффициентов регуляризации.

Возможна эквивалентная запись этого регуляризатора, если вместо максимизации правдоподобия минимизировать дивергенцию Кульбака–Лейблера как меру различности двух вероятностных распределений:

$$\begin{aligned} R(\Phi, \Theta) &= - \sum_{t \in T} \beta_{0t}^+ \text{KL}_w(\beta_{wt}^+ \parallel \varphi_{wt}) - \sum_{d \in D} \alpha_{0d}^+ \text{KL}_t(\alpha_{td}^+ \parallel \theta_{td}) + \\ &+ \sum_{t \in T} \beta_{0t}^- \text{KL}_w(\beta_{wt}^- \parallel \varphi_{wt}) + \sum_{d \in D} \alpha_{0d}^- \text{KL}_t(\alpha_{td}^- \parallel \theta_{td}). \end{aligned}$$

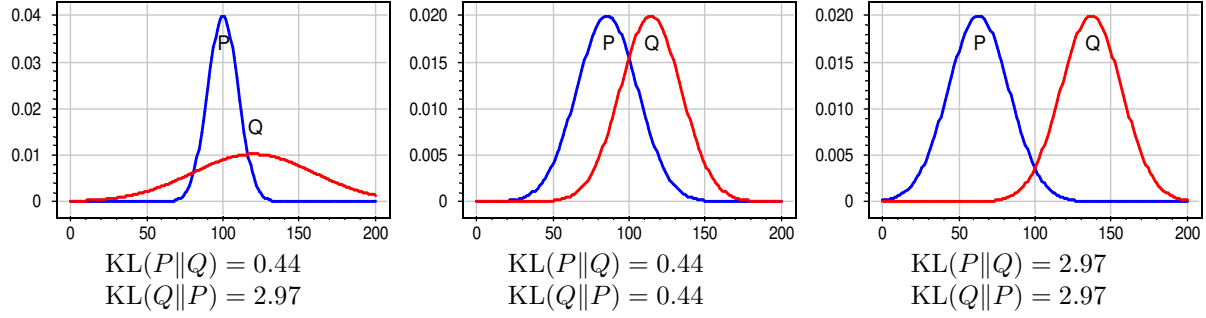


Рис. 5: Дивергенция Кульбака–Лейблера  $KL(P||Q)$  является несимметричной мерой вложенности распределения  $P = (p_i)_{i=1}^n$  в распределение  $Q = (q_i)_{i=1}^n$ . Вложенность  $P$  в  $Q$  численно совпадает на левом и среднем графиках, вложенность  $Q$  в  $P$  — на левом и правом графиках.

**Дивергенция Кульбака–Лейблера** (*KL-дивергенция* или относительная энтропия) далее будет одним из важнейших инструментов конструирования регуляризаторов. Это несимметричная функция расстояния между дискретными распределениями  $P = (p_i)_{i=1}^n$  и  $Q = (q_i)_{i=1}^n$  с совпадающими носителями,  $\{i: p_i > 0\} = \{i: q_i > 0\}$ :

$$KL(P||Q) = KL_i(p_i||q_i) = \sum_{i=1}^n p_i \ln \frac{p_i}{q_i} = H(P, Q) - H(P),$$

где  $H(P) = -\sum_i p_i \ln p_i$  — *энтропия* распределения  $P$ ,  $H(P, Q) = -\sum_i p_i \ln q_i$  — *кросс-энтропия* распределений  $P$  и  $Q$ . Обозначение  $KL_i$  не является общепринятым, но оно удобно для уточнения, по какому индексу производится суммирование.

KL-дивергенция неотрицательна и равна нулю тогда и только тогда, когда  $P = Q$ .

KL-дивергенция является мерой вложенности первого распределения во второе: если  $KL(P||Q) < KL(Q||P)$ , то  $P$  сильнее вложено в  $Q$ , чем  $Q$  в  $P$ , см. рис. 5.

Если  $P$  — эмпирическое распределение, а  $Q(\alpha)$  — параметрическая модель, то минимизация KL-дивергенции эквивалентна минимизации кросс-энтропии  $H(P, Q(\alpha))$  или максимизации правдоподобия:

$$KL(P||Q(\alpha)) = \sum_{i=1}^n p_i \ln \frac{p_i}{q_i(\alpha)} \rightarrow \min_{\alpha} \iff \sum_{i=1}^n p_i \ln q_i(\alpha) \rightarrow \max_{\alpha}.$$

Заметим также, что максимизация правдоподобия в задаче тематического моделирования (13) эквивалентна минимизации взвешенной суммы KL-дивергенций между эмпирическими распределениями  $\hat{p}(w|d) = \frac{n_{dw}}{n_d}$  и модельными  $p(w|d)$ :

$$\sum_{d \in D} n_d KL_w \left( \frac{n_{dw}}{n_d} \parallel \sum_{t \in T} \varphi_{wt} \theta_{td} \right) \rightarrow \min_{\Phi, \Theta},$$

где весом документа  $d$  является его длина  $n_d$ . Если веса  $n_d$  убрать, то все документы будут искусственно приведены к одинаковой длине. Такая модификация функционала качества может быть полезна при моделировании коллекций, содержащих документы одинаковой важности, но существенно разной длины.

## 6 Теория EM-алгоритма

В этом разделе мы погрузимся в теорию EM-алгоритма. Рассмотрим более общий классический способ его вывода, который позволяет обосновать сходимость. Заодно обогатим его возможностью аддитивной регуляризации. Материал этого раздела понадобится только в следующем разделе, ещё более теоретическом. Если нетерпится поскорее узнать о практических аспектах тематического моделирования, то оба раздела можно целиком пропустить.

**Общий EM-алгоритм с регуляризацией.** Классический EM-алгоритм [52] предназначен для построения широкого класса вероятностных порождающих моделей со скрытыми переменными. Тематическое моделирование для него — лишь частный случай. Сходимость EM-алгоритма удобно доказывать для общего случая, добавив возможность регуляризации. Поэтому перейдём к более общим обозначениям:

$X = (d_i, w_i)_{i=1}^n$  — исходные данные, *наблюдаемые переменные*;

$Z = (t_i)_{i=1}^n$  — *скрытые переменные*;

$\Omega = (\Phi, \Theta)$  — параметры порождающей вероятностной модели  $p(X, Z | \Omega)$ .

Задача заключается в том, чтобы по выборке  $X$  найти параметры модели  $\Omega$ , при которых достигается максимум *маргинализованного правдоподобия* (marginal likelihood)<sup>1</sup> с регуляризатором  $R(\Omega)$ :

$$\ln p(X | \Omega) + R(\Omega) = \ln \sum_Z p(X, Z | \Omega) + R(\Omega) \rightarrow \max_{\Omega}. \quad (26)$$

Эта задача неудобна тем, что суммирование под логарифмом производится по всевозможным значениям скрытых переменных  $Z$ . В случае тематического моделирования это множество всех  $n$ -мерных векторов тем, его мощность равна  $|T|^n$ .

**Теорема 6.1.** *Если функционал (26) достаточно гладкий, то точка  $\Omega$  его локального максимума удовлетворяет системе уравнений, решение которой методом простых итераций сводится к чередованию двух шагов:*

$$\text{E-шаг: } q(Z) = p(Z | X, \Omega); \quad (27)$$

$$\text{M-шаг: } \sum_Z q(Z) \ln p(X, Z | \Omega) + R(\Omega) \rightarrow \max_{\Omega}. \quad (28)$$

**Доказательство.** Запишем необходимые условия локального экстремума для задачи максимизации гладкого функционала (26):

$$\frac{1}{p(X | \Omega)} \sum_Z \frac{\partial p(X, Z | \Omega)}{\partial \Omega} + \frac{\partial R(\Omega)}{\partial \Omega} = 0.$$

Из формулы условной вероятности следует  $p(X | \Omega) = \frac{p(X, Z | \Omega)}{p(Z | X, \Omega)}$ . Воспользуемся этим тождеством, внося  $\frac{1}{p(X | \Omega)}$  под знак суммирования:

$$\sum_Z \frac{p(Z | X, \Omega)}{p(X, Z | \Omega)} \frac{\partial p(X, Z | \Omega)}{\partial \Omega} + \frac{\partial R(\Omega)}{\partial \Omega} = 0;$$

$$\sum_Z p(Z | X, \Omega) \frac{\partial}{\partial \Omega} \ln p(X, Z | \Omega) + \frac{\partial R(\Omega)}{\partial \Omega} = 0.$$

<sup>1</sup>Marginal likelihood на русский иногда переводится как предельное или неполное правдоподобие.

Полученное уравнение является необходимым условием локального экстремума задачи М-шага (28), если фиксировать распределение  $p(Z|X, \Omega)$  так, чтобы оно не зависело от параметра  $\Omega$ . Именно это и достигается вычислением  $q(Z)$  на Е-шаге (27) и последующей его подстановкой в (28). Таким образом, мы получили систему уравнений, эквивалентную необходимым условиям максимума функционала (26).

Теорема доказана.

**Следствие 6.2.** *Если задача оптимизации (26) имеет ограничения  $g_i(\Omega) \leq 0$ ,  $h_j(\Omega) = 0$ , то система уравнений (27)–(28) остаётся в силе, при этом задача оптимизации (28) имеет те же ограничения.*

Для доказательства необходимые условия локального экстремума заменяются условиями Каруша–Куна–Таккера, в остальном выкладки аналогичны.

**Теорема 6.3.** *В итерационном процессе (27)–(28) значение функционала не уменьшается на каждом шаге.*

**Доказательство.** Введём произвольное распределение  $q(Z)$ . Воспользуемся условием нормировки  $\sum_Z q(Z) = 1$  и тождеством  $p(X|\Omega) = \frac{p(X, Z|\Omega)}{p(Z|X, \Omega)}$ :

$$\ln p(X|\Omega) = \sum_Z q(Z) \ln p(X|\Omega) = \sum_Z q(Z) \ln \frac{p(X, Z|\Omega)}{p(Z|X, \Omega)}.$$

Добавим и отнимем  $\sum_Z q(Z) \ln q(Z)$ :

$$\ln p(X|\Omega) = \underbrace{\sum_Z q(Z) \ln \frac{p(X, Z|\Omega)}{q(Z)}}_{L(q, \Omega)} + \underbrace{\sum_Z q(Z) \ln \frac{q(Z)}{p(Z|X, \Omega)}}_{\text{KL}(q(Z) \| p(Z|X, \Omega)) \geq 0}. \quad (29)$$

Второе слагаемое в этой сумме является КЛ-дивергенцией между двумя распределениями, которая всегда неотрицательна. Поэтому первое слагаемое, обозначенное через  $L(q, \Omega)$ , является нижней оценкой логарифма правдоподобия  $\ln p(X|\Omega)$ .

Для максимизации регуляризованного log-правдоподобия  $\ln p(X|\Omega) + R(\Omega)$  по  $\Omega$  будем максимизировать его нижнюю оценку поочерёдно то по  $q$ , то по  $\Omega$ :

$$\text{Е-шаг: } L(q, \Omega) + R(\Omega) \rightarrow \max_q;$$

$$\text{М-шаг: } L(q, \Omega) + R(\Omega) \rightarrow \max_\Omega.$$

Максимизация  $L(q, \Omega)$  по  $q$  эквивалентна минимизации  $\text{KL}(q(Z) \| p(Z|X, \Omega))$  по  $q$ , поскольку их сумма (29) не зависит от  $q$ . Минимум КЛ-дивергенции равен нулю и достигается при  $q(Z) = p(Z|X, \Omega)$ , что совпадает с формулой Е-шага (27). Обнуление КЛ-дивергенции в (29) означает, что  $L(q, \Omega)$  является достигаемой нижней оценкой для  $\ln p(X|\Omega)$ , а задача максимизации на М-шаге совпадает с (28).

Таким образом, EM-алгоритм (27)–(28) является частным случаем итерационного процесса блочно-покоординатной оптимизации функционала  $L(q, \Omega) + R(\Omega)$ , на каждом шаге которого значение функционала может только увеличиться.

Теорема доказана.

EM-алгоритм не гарантирует ни достижения максимума с заданной точностью, ни глобальной сходимости. Оптимизационная задача является в общем случае многоэкстремальной. На практике это означает, что качество решения может зависеть от выбора начального приближения.

**Общий EM-алгоритм для ARTM.** Применим EM-алгоритм (27)–(28) к задаче тематического моделирования, вернувшись к исходным обозначениям:  $X = (d_i, w_i)_{i=1}^n$ ,  $Z = (t_i)_{i=1}^n$ ,  $\Omega = (\Phi, \Theta)$ . Согласно следующей лемме, это приведёт к уже знакомой постановке задачи (19)–(20), но путём более трудоёмкого доказательства.

**Теорема 6.4.** *Точка  $(\Phi, \Theta)$  локального максимума регуляризованного log-правдоподобия в задаче тематического моделирования (15) удовлетворяет системе уравнений, решение которой методом простых итераций сводится к чередованию двух шагов:*

$$E\text{-шаг: } p(t|d, w) = \operatorname{norm}_{t \in T}(\varphi_{wt}\theta_{td}), \quad \text{для всех } d \in D, w \in W, t \in T; \quad (30)$$

$$M\text{-шаг: } \sum_{d \in D} \sum_{w \in W} \sum_{t \in T} n_{dw} p(t|d, w) \ln(\varphi_{wt}\theta_{td}) + R(\Phi, \Theta) \rightarrow \max_{\Phi, \Theta}. \quad (31)$$

**Доказательство.** Запишем сначала формулу E-шага. Воспользовавшись условием независимости элементов выборки и применив формулу Байеса (5), разложим  $q(Z)$  в произведение условных вероятностей тем по всем позициям  $i$ :

$$q(Z) = p(Z|X, \Omega) = \prod_{i=1}^n p(t_i|d_i, w_i) = \prod_{i=1}^n \operatorname{norm}_{t_i}(\varphi_{w_i t_i} \theta_{t_i d_i}).$$

Подставим в общую формулу M-шага (28) распределения  $p(X, Z|\Omega)$  и  $q(Z)$ :

$$\begin{aligned} & \sum_{Z \in T^n} q(Z) \ln p(X, Z|\Omega) + R(\Omega) \rightarrow \max_{\Omega}; \\ & \sum_{t_1 \in T} \cdots \sum_{t_n \in T} \prod_{k=1}^n p(t_k|d_k, w_k) \ln \prod_{i=1}^n p(d_i, w_i, t_i|\Omega) + R(\Omega) \rightarrow \max_{\Omega}. \end{aligned}$$

Выразим логарифм произведения через сумму логарифмов и переставим местами знаки суммирования:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{t_1 \in T} \cdots \sum_{t_n \in T} \prod_{k=1}^n p(t_k|d_k, w_k) \ln p(d_i, w_i, t_i|\Omega) + R(\Omega) \rightarrow \max_{\Omega}.$$

Заметим, что среди  $n$  сумм по  $t_i \in T$  нетривиальна всегда только одна — та, для которой  $t_i = t_k$ . Все остальные суммы расходятся на образование полных вероятностей  $\sum_{t_k} p(t_k|d_k, w_k) = 1$ . Таким образом, функция в левой части упрощается:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{t \in T} p(t|d_i, w_i) \ln p(d_i, w_i, t|\Omega) + R(\Omega) \rightarrow \max_{\Omega}.$$

Заменяем суммирование по позициям термов  $i$  суммированием по документам  $d$ , затем по термам  $w$  в каждом документе, учитывая каждый терм  $n_{dw}$  раз. Затем

воспользуемся представлением  $p(d, w, t | \Omega) = p(w | t, \Phi) p(t | d, \Theta) p(d) = \varphi_{wt} \theta_{td} p_d$ , отбросив в нём множитель  $p_d$ , не зависящий от искомым параметров модели:

$$\sum_{d \in D} \sum_{w \in W} \sum_{t \in T} n_{dw} p(t | d, w) \ln(\varphi_{wt} \theta_{td}) + R(\Phi, \Theta) \rightarrow \max_{\Phi, \Theta}.$$

Теорема доказана.

Таким образом, мы ещё раз вывели промежуточную форму записи EM-алгоритма, которую ранее доказали в Теореме 4.2, причём тогда это было сделано гораздо проще. Показанный в этом разделе способ вывода является более общим, содержит в себе обоснование сходимости EM-алгоритма и считается классическим.

## 7 Байесовское обучение модели LDA

Целью байесовского обучения (Bayesian learning) является получение оценок плотности распределения для параметров вероятностной модели вместо обычных точечных оценок. В анализе данных есть масса практических задач и ситуаций, когда апостериорные оценки плотности действительно необходимы. Однако в практике тематического моделирования всегда используются точечные оценки элементов матриц  $\Phi$  и  $\Theta$ , а не плотности распределения  $p(\Phi)$ ,  $p(\Theta)$ .

Остаётся лишь догадываться, почему байесовское обучение оказалось доминирующим подходом в тематическом моделировании. Возможно, байесовские методы были на возрастающем тренде «кривой Гартнера», когда появилась модель PLSA Томаса Хофманна. Возможно, сказался безусловный научный авторитет авторов модели LDA. Фактически, тематическое моделирование проскочило естественную стадию развития. В регрессионном анализе, обработке сигналов и изображений постановка оптимизационных задач усложнялись постепенно, в том числе путём введения регуляризаторов. Когда возникли приложения, требующие знать больше о распределениях параметров, вместо обычной регуляризации стали применять байесовскую и использовать байесовский вывод. Тематическое моделирование оказалась относительно новой задачей в тот момент, когда байесовское обучение было на пике популярности. Простота и богатые возможности классической не байесовской регуляризации оказались незамеченными. Это упущение как раз и устраняет теория ARTM.

Несмотря на высказанные выше соображения, байесовское обучение крайне важно для тематического моделирования хотя бы потому, что за два десятилетия тысячи публикаций были написаны именно на этом математическом языке.

Мы рассмотрим два наиболее популярных подхода: вариационный байесовский вывод (variational Bayes, VB) [157] и сэмплирование Гиббса (Gibbs sampling, GS) [152]. Для простоты ограничимся моделью LDA и увидим, что оба подхода приводят к EM-подобным алгоритмам, незначительно отличающимся от знакомой нам версии.

Громоздкая техника байесовского вывода, описанная в данном разделе, далее использоваться не будет. Байесовские тематические модели, как правило, удаётся переформулировать в терминах регуляризации ещё на этапе постановки задачи, сделав математические выкладки и всё изложение намного яснее и проще. Примеров такой «дебайесизации» моделей будет много в следующих разделах.

**Концепция байесовского обучения.** Пусть  $X$  — наблюдаемая выборка данных,  $p(X|\Omega)$  — вероятностная модель данных с параметрами  $\Omega$ ,  $p(\Omega|\gamma)$  — *априорное распределение* в пространстве параметров модели, имеющее гиперпараметры  $\gamma$ . Тогда *апостериорное распределение* параметров, согласно формуле Байеса, имеет вид

$$p(\Omega|X, \gamma) = \frac{p(\Omega, X|\gamma)}{p(X|\gamma)} \propto p(\Omega, X|\gamma) \propto p(X|\Omega) p(\Omega|\gamma),$$

где символ  $\propto$  означает «равно с точностью до нормировки».

Если нам нужна лишь оценка максимума правдоподобия для апостериорного распределения, то достаточно воспользоваться принципом *максимума апостериорной вероятности*, который был рассмотрен в предыдущем разделе. Тогда задача сводится к максимизации логарифма правдоподобия с вероятностным регуляризатором:

$$\ln p(\Omega|X, \gamma) = \ln p(X|\Omega) + \ln p(\Omega|\gamma) + \text{const} \rightarrow \max_{\Omega, \gamma}.$$

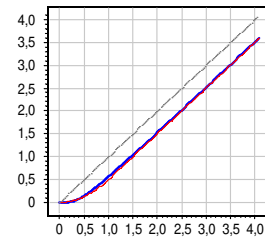
Альтернативный путь, называемый *байесовским выводом*, заключается в том, чтобы вычислить апостериорное распределение  $p(\Omega|X, \gamma)$  в явном виде. Это более сложная задача, поскольку вместо точечной оценки параметра  $\Omega$  строится его распределение. Такой подход даёт больше информации о параметрах модели, позволяет строить для них доверительные и интервальные оценки. С другой стороны, в практике тематического моделирования никакие оценки апостериорных распределений, кроме точечных оценок максимума правдоподобия, так и не нашли применения.

**Свойства распределения Дирихле.** Модель LDA основана на распределениях Дирихле, поэтому приведём в справочном порядке некоторые его свойства:

- $E\theta_t = \int \theta_t \text{Dir}(\theta|\alpha) d\theta = \frac{\alpha_t}{\alpha_0} = \text{norm}_t(\alpha_t)$  — математическое ожидание  $\theta_t$ ;
- $\hat{\theta}_t = \frac{\alpha_t - 1}{\alpha_0 - T} = \text{norm}_t(\alpha_t - 1)$  — мода;
- $D\theta_t = \frac{\alpha_t(\alpha_0 - \alpha_t)}{\alpha_0^2(\alpha_0 + 1)}$  — дисперсия;
- $E \ln \theta_t = \int \ln \theta_t \text{Dir}(\theta|\alpha) d\theta = \psi(\alpha_t) - \psi(\alpha_0)$  — математическое ожидание  $\ln \theta_t$ .

Дигамма-функция  $\psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$  очень похожа на логарифм. Известна простая, но весьма точная аппроксимация экспоненты дигамма-функции (на графике их линии практически неразличимы):

$$E(x) = \exp(\psi(x)) \approx \begin{cases} \frac{x^2}{2}, & 0 \leq x \leq 1; \\ x - \frac{1}{2}, & 1 \leq x. \end{cases}$$



**Вариационный байесовский вывод.** Идея этого подхода в том, чтобы искать совместное апостериорное распределение для параметров модели и скрытых переменных  $p(Z, \Phi, \Theta|X, \alpha, \beta)$ . Непосредственное вычисление данного распределения проблематично. Поэтому находят его приближение в виде разложения на множители, используя *основную теорему вариационного байесовского вывода*.



**Теорема 7.1.** Пусть задано разбиение множества переменных  $Y$  на блоки  $Y_j$ ,  $j \in J$ . Тогда решение задачи  $\text{KL}(q(Y) \parallel p(Y | X, \gamma)) \rightarrow \min_q$  в семействе факторизованных распределений  $q(Y) = \prod_{j \in J} q_j(Y_j)$  удовлетворяет системе уравнений

$$\ln q_j(Y_j) = \mathbb{E}_{q_{\setminus j}} \ln p(X, Y | \gamma) + \text{const}, \quad j \in J, \quad (32)$$

где  $\mathbb{E}_{q_{\setminus j}}$  — математическое ожидание по всем переменным кроме  $Y_j$ ,  $\text{const}$  — логарифм нормировочного множителя распределения  $q_j$ .

Доказательство можно найти, например, в [30].

Для решения системы (32) можно использовать метод простой итерации.

Применим эту теорему к нашему случаю, когда  $Y = (Z, \Phi, \Theta)$ ,  $\gamma = (\alpha, \beta)$ . Будем приближать распределение  $p(Y | X, \gamma) = p(Z, \Phi, \Theta | X, \alpha, \beta)$  произведением  $n + |T| + |D|$  распределений по блокам переменных  $t_i$ ,  $\varphi_t$ ,  $\theta_d$ :

$$q(Z, \Phi, \Theta) = \prod_{j \in J} q_j(Z, \Phi, \Theta) = \prod_{i=1}^n q_i(t_i) \prod_{t \in T} q_t(\varphi_t) \prod_{d \in D} q_d(\theta_d),$$

где  $J = \{1, \dots, n\} \sqcup T \sqcup D$  — индексы всех блоков переменных.

Заметим, что если блоки переменных  $Y_j$  независимы, то решение будет не приближённым, а точным. Таким образом, использование вариационного байесовского вывода связано с предположением, что можно пренебречь зависимостями между темами термов  $t_i$ , векторами тем  $\varphi_t$  и векторами документов  $\theta_d$ .

Чтобы записать систему уравнений (32), распишем логарифм распределения  $p(X, Z, \Phi, \Theta | \alpha, \beta)$ , переводя слагаемые, не зависящие от переменных  $t_i, \varphi_t, \theta_d$ , в  $\text{const}$ :

$$\begin{aligned} \ln p(X, Z, \Phi, \Theta | \alpha, \beta) &= \ln p(X, Z | \Phi, \Theta) p(\Phi | \beta) p(\Theta | \alpha) = \\ &= \ln \prod_{i=1}^n p(d_i, w_i, t_i | \Phi, \Theta) + \ln \prod_{t \in T} \text{Dir}(\varphi_t | \beta) + \ln \prod_{d \in D} \text{Dir}(\theta_d | \alpha) = \\ &= \sum_{i=1}^n \ln(\varphi_{w_i t_i} \theta_{t_i d_i}) + \sum_{t, w} (\beta_w - 1) \ln \varphi_{wt} + \sum_{d, t} (\alpha_t - 1) \ln \theta_{td} + \text{const}. \end{aligned}$$

Теперь надо брать математические ожидания  $\mathbb{E}_{q_{\setminus j}}$  от этой суммы по всем распределениям  $q_t(\varphi_t)$ ,  $q_d(\theta_d)$ ,  $q_i(t_i)$ , кроме  $j$ -го. Заметим, что если слагаемое  $S$  не зависит от  $j$ -й переменной, то  $\mathbb{E}_{q_j} S = \text{const}$ , что сильно упрощает выкладки.

Рассмотрим уравнение (32) относительно  $q_t(\varphi_t)$ :

$$\begin{aligned} \ln q_t(\varphi_t) &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}_{q_i(t_i)} [t_i = t] \ln \varphi_{w_i t_i} + \sum_{w \in W} (\beta_w - 1) \ln \varphi_{wt} + \text{const} = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{w \in W} [w_i = w] q_i(t) \ln \varphi_{wt} + \sum_{w \in W} (\beta_w - 1) \ln \varphi_{wt} + \text{const} = \\ &= \sum_{w \in W} \left( \underbrace{\sum_{i=1}^n [w_i = w] q_i(t)}_{n_{wt}} + \beta_w - 1 \right) \ln \varphi_{wt} + \text{const} = \\ &= \ln \text{Dir}(\varphi_t | \tilde{\beta}_t). \end{aligned}$$

Таким образом,  $q_t(\varphi_t)$  является распределением Дирихле с параметрами  $\tilde{\beta}_{wt} = n_{wt} + \beta_w$ , где  $n_{wt}$  — оценка числа генераций термина  $w$  из темы  $t$ . При больших  $n_{wt}$  оно сконцентрировано в точке  $\varphi_{wt} = \text{norm}_w(\tilde{\beta}_{wt})$ .

Рассмотрим уравнение (32) относительно  $q_d(\theta_d)$ :

$$\begin{aligned} \ln q_d(\theta_d) &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}_{q_i(t_i)}[d_i = d] \ln \theta_{t_i d_i} + \sum_{t \in T} (\alpha_t - 1) \ln \theta_{td} + \text{const} = \\ &= \sum_{i=1}^n [d_i = d] \sum_{t \in T} q_i(t) \ln \theta_{td} + \sum_{t \in T} (\alpha_t - 1) \ln \theta_{td} + \text{const} = \\ &= \sum_{t \in T} \left( \underbrace{\sum_{i=1}^n [d_i = d] q_i(t)}_{n_{td}} + \alpha_t - 1 \right) \ln \theta_{td} + \text{const} = \\ &= \ln \text{Dir}(\theta_d | \tilde{\alpha}_d). \end{aligned}$$

Таким образом,  $q_d(\theta_d)$  является распределением Дирихле с параметрами  $\tilde{\alpha}_{td} = n_{td} + \alpha_t$ , где  $n_{td}$  — оценка числа термов темы  $t$  в документе  $d$ . При больших  $n_{td}$  оно сконцентрировано в точке  $\theta_{td} = \text{norm}_t(\tilde{\alpha}_{td})$ .

Наконец, рассмотрим уравнение (32) относительно  $q_i(t_i)$ :

$$\begin{aligned} \ln q_i(t) &= \mathbb{E}_{q \setminus i}(\ln \varphi_{w_i t_i} + \ln \theta_{t_i d_i}) + \text{const} = \\ &= \mathbb{E}_{q_t(\varphi_t)} \ln \varphi_{w_i t} + \mathbb{E}_{q_d(\theta_d)} \ln \theta_{t_i d} + \text{const}. \end{aligned}$$

Мы уже знаем, что  $q_t(\varphi_t)$  и  $q_d(\theta_d)$  являются распределениями Дирихле. Воспользуемся известным выражением для математического ожидания логарифма  $t$ -й компоненты случайного вектора  $(\theta_t)$ , порождаемого распределением Дирихле:

$$\begin{aligned} \ln q_i(t) &= \psi(n_{w_i t} + \beta_{w_i}) - \psi(\sum_w (n_{wt} + \beta_w)) + \\ &\quad + \psi(n_{td_i} + \alpha_t) - \psi(\sum_t (n_{td_i} + \alpha_t)) + \text{const}. \end{aligned}$$

Логарифмируя и нормируя, получаем распределения переменных  $t_i$ :

$$q_i(t) = \text{norm}_{t \in T} \left( \frac{E(n_{w_i t} + \beta_{w_i})}{E(\sum_w (n_{wt} + \beta_w))} \cdot \frac{E(n_{td_i} + \alpha_t)}{E(\sum_t (n_{td_i} + \alpha_t))} \right), \quad (33)$$

или, с использованием приближения  $E(x) = \exp(\psi(x)) \approx x - \frac{1}{2}$ :

$$q_i(t) = \text{norm}_{t \in T} \left( \frac{n_{w_i t} + \beta_{w_i} - \frac{1}{2}}{n_t + \beta_0 - \frac{1}{2}} \cdot \frac{n_{td_i} + \alpha_t - \frac{1}{2}}{n_{d_i} + \alpha_0 - \frac{1}{2}} \right).$$

Заметим, что формула для  $q_i(t)$  похожа на E-шаг (16) в EM-алгоритме для модели LDA:  $p(t | d_i, w_i) = \text{norm}_t(\varphi_{w_i t} \theta_{td_i})$ . Более того, аккумулярование счётчиков  $n_{wt}$  и  $n_{td}$  в точности совпадает с формулами M-шага (17)–(18), если полагать  $q_i(t) = p(t | d_i, w_i)$ :

$$n_{wt} = \sum_{i=1}^n [w_i = w] q_i(t), \quad n_{td} = \sum_{i=1}^n [d_i = d] q_i(t).$$

Таким образом, решение системы (32) методом простых итераций приводит к EM-подобному алгоритму. Это немного удивительно, поскольку мы не использовали EM-алгоритм, и даже не решали задачу максимизации правдоподобия.

По окончании итераций искомые параметры модели можно оценить через математическое ожидание апостериорных распределений Дирихле:

$$\varphi_{wt} = \operatorname{norm}_{w \in W}(n_{wt} + \beta_w); \quad \theta_{td} = \operatorname{norm}_{t \in T}(n_{td} + \alpha_t).$$

Основное отличие от EM-алгоритма — в поправках  $(-1, -\frac{1}{2}$  или  $0)$  к частотным оценкам условных вероятностей. При  $n_{wt}, n_{td} \gg 1$  эти поправки пренебрежимо малы. Они влияют лишь на близкие к нулю условные вероятности  $\varphi_{wt}$  и  $\theta_{td}$ , которые не являются значимым для тематической модели. Такие отличия в EM-подобных алгоритмах тематического моделирования можно считать несущественными [26].

**Сэмплирование Гиббса.** Идея этого подхода в том, чтобы сначала оценить скрытые переменные с помощью сэмплирования  $Z \sim p(Z | X, \alpha, \beta)$ , затем найти апостериорное распределение параметров модели  $p(\Phi, \Theta | X, Z, \alpha, \beta)$ , при известных  $X$  и  $Z$ .

Разберёмся сначала с апостериорным распределением. Пусть  $p(\Phi, \Theta | \alpha, \beta)$  — априорное распределение Дирихле. Распределение Дирихле является сопряжённым к мультиномиальному, поэтому апостериорное также будет принадлежать семейству распределений Дирихле:

$$\begin{aligned} p(\Phi, \Theta | X, Z, \alpha, \beta) &\propto p(\Phi, \Theta, X, Z | \alpha, \beta) \propto p(X, Z | \Phi, \Theta) p(\Phi, \Theta | \alpha, \beta) \\ &\propto \prod_{d,w,t} (\varphi_{wt} \theta_{td})^{n_{dwt}} \prod_{t \in T} \operatorname{Dir}(\varphi_t | \beta) \prod_{d \in D} \operatorname{Dir}(\theta_d | \alpha) \\ &\propto \prod_{t \in T} \prod_{d,w} \varphi_{wt}^{n_{dwt}} \varphi_{wt}^{\beta_w - 1} \prod_{d \in D} \prod_{w,t} \theta_{td}^{n_{dwt}} \theta_{td}^{\alpha_d - 1} \\ &\propto \prod_{t \in T} \prod_w \varphi_{wt}^{n_{wt} + \beta_w - 1} \prod_{d \in D} \prod_t \theta_{td}^{n_{td} + \alpha_d - 1} \\ &\propto \prod_{t \in T} \operatorname{Dir}(\varphi_t | \tilde{\beta}_t) \prod_{d \in D} \operatorname{Dir}(\theta_d | \tilde{\alpha}_d), \quad \tilde{\beta}_{wt} = n_{wt} + \beta_w, \quad \tilde{\alpha}_{td} = n_{td} + \alpha_t, \end{aligned} \quad (34)$$

где счётчики  $n_{dwt}$ ,  $n_{wt}$  и  $n_{td}$  определяются согласно (4) через значения скрытых переменных  $Z$ .

Сэмплирование случайного вектора  $Z$  из многомерного распределения основано на *теореме о сходимости процесса сэмплирования Гиббса*.

**Теорема 7.2.** *Процесс сэмплирования одномерных случайных величин*

$$t_i^{(k+1)} \sim p(t_i | X, Z_{\setminus i}, \gamma) = \frac{p(X, Z | \gamma)}{p(X, Z_{\setminus i} | \gamma)}, \quad i = 1, \dots, n;$$

где  $k$  — номер итерации,  $Z_{\setminus i} = (t_1^{(k+1)}, \dots, t_{i-1}^{(k+1)}, t_{i+1}^{(k)}, \dots, t_n^{(k)})$ , сходится к многомерному распределению  $Z \sim p(Z | X, \gamma)$ .

Доказательство можно найти, например, в [30].

Чтобы воспользоваться этой теоремой, положим  $\gamma = (\alpha, \beta)$  и найдём распределение  $p(X, Z | \alpha, \beta)$ . Поскольку оно не должно зависеть от параметров  $(\Phi, \Theta)$ , по ним

придётся взять интеграл. Подынтегральное распределение мы уже вывели в (34), но лишь с точностью до нормировочных множителей. Теперь они нам понадобятся, поэтому разберёмся с ними аккуратнее:

$$\begin{aligned}
p(X, Z | \alpha, \beta) &= \int_{\Phi} \int_{\Theta} p(X, Z | \Phi, \Theta) p(\Phi, \Theta | \alpha, \beta) d\Phi d\Theta = \\
&= \int_{\Phi} \int_{\Theta} \prod_{w,t} \varphi_{wt}^{n_{wt}} \prod_{t,d} \theta_{td}^{n_{td}} \prod_d p_d^{n_d} \prod_{t \in T} \text{Dir}(\varphi_t | \beta) \prod_{d \in D} \text{Dir}(\theta_d | \alpha) d\Phi d\Theta = \\
&= \prod_{t \in T} \frac{\Gamma(\sum_w \beta_w)}{\prod_w \Gamma(\beta_w)} \int_{\varphi_t} \underbrace{\prod_w \varphi_{wt}^{\tilde{\beta}_{wt}-1} d\varphi_t}_{\propto \text{Dir}(\varphi_t | \tilde{\beta}_t)} \prod_{d \in D} p_d^{n_d} \frac{\Gamma(\sum_t \alpha_t)}{\prod_t \Gamma(\alpha_t)} \int_{\theta_d} \underbrace{\prod_t \theta_{td}^{\tilde{\alpha}_{td}-1} d\theta_d}_{\propto \text{Dir}(\theta_d | \tilde{\alpha}_d)} = \\
&= \prod_{t \in T} \frac{\Gamma(\sum_w \beta_w)}{\prod_w \Gamma(\beta_w)} \frac{\prod_w \Gamma(\tilde{\beta}_{wt})}{\Gamma(\sum_w \tilde{\beta}_{wt})} \prod_{d \in D} p_d^{n_d} \frac{\Gamma(\sum_t \alpha_t)}{\prod_t \Gamma(\alpha_t)} \frac{\prod_t \Gamma(\tilde{\alpha}_{td})}{\Gamma(\sum_t \tilde{\alpha}_{td})}. \tag{35}
\end{aligned}$$

Распределение  $p(X, Z_{\setminus i} | \alpha, \beta)$  отличается от полученного выше  $p(X, Z | \alpha, \beta)$  лишь тем, что оно строится по выборке без  $i$ -го элемента  $(d_i, w_i, t_i)$ :

$$p(X, Z_{\setminus i} | \alpha, \beta) = \prod_{t \in T} \frac{\Gamma(\sum_w \beta_w)}{\prod_w \Gamma(\beta_w)} \frac{\prod_w \Gamma(\tilde{\beta}_{wt} - \delta_{wt}^i)}{\Gamma(\sum_w (\tilde{\beta}_{wt} - \delta_{wt}^i))} \prod_{d \in D} p_d^{n_d} \frac{\Gamma(\sum_t \alpha_t)}{\prod_t \Gamma(\alpha_t)} \frac{\prod_t \Gamma(\tilde{\alpha}_{td} - \delta_{td}^i)}{\Gamma(\sum_t (\tilde{\alpha}_{td} - \delta_{td}^i))}.$$

где  $\delta_{wt}^i = [w = w_i][t = t_i]$ ,  $\delta_{td}^i = [t = t_i][d = d_i]$ . Теперь, согласно формуле из теоремы 7.2, поделим полученные распределения одно на другое, чтобы получить одномерное распределение для сэмплирования темы  $t_i$ . При делении в числителе и знаменателе сократятся все множители кроме тех, которые зависят от элемента  $(d_i, w_i, t_i)$ :

$$\begin{aligned}
p(t_i | X, Z_{\setminus i}, \alpha, \beta) &= \frac{p(X, Z | \alpha, \beta)}{p(X, Z_{\setminus i} | \alpha, \beta)} = \\
&= \frac{\Gamma(n_{w_i t_i} + \beta_{w_i}) \Gamma(\sum_w (n_{wt_i} + \beta_w) - 1) \Gamma(n_{t_i d_i} + \alpha_{t_i}) \Gamma(\sum_t (n_{td_i} + \alpha_t) - 1)}{\Gamma(n_{w_i t_i} + \beta_{w_i} - 1) \Gamma(\sum_w (n_{wt_i} + \beta_w)) \Gamma(n_{t_i d_i} + \alpha_{t_i} - 1) \Gamma(\sum_t (n_{td_i} + \alpha_t))}.
\end{aligned}$$

В этом выражении воспользуемся свойством гамма-функции  $\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x-1)} = x - 1$ :

$$p(t | X, Z_{\setminus i}, \alpha, \beta) = \text{norm}_{t \in T} \left( \frac{n_{w_i t} + \beta_{w_i} - 1}{\sum_w (n_{wt} + \beta_w) - 1} \cdot \frac{n_{td_i} + \alpha_t - 1}{\sum_t (n_{td_i} + \alpha_t) - 1} \right).$$

По сути это оценка условной вероятности  $p(t | d_i, w_i) = \text{norm}_t(\varphi_{w_i t} \theta_{td_i})$  на E-шаге EM-алгоритма для модели LDA. Таким образом, мы снова получаем EM-подобный алгоритм, хотя задача максимизации правдоподобия даже не ставилась. Как и в случае с вариационными байесовским выводом, алгоритм отличается несущественными поправками к частотным оценкам условных вероятностей. Главное его отличие в том, что для каждого  $(d_i, w_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , происходит сэмплирование только одной темы  $t_i$ , которая и участвует в аккумуляции счётчиков  $n_{wt}$  и  $n_{td}$ :

$$n_{wt} = \sum_{i=1}^n [w_i = w] [t_i = t], \quad n_{td} = \sum_{i=1}^n [d_i = d] [t_i = t].$$

---

**Алгоритм 4.** Сэмплирование Гиббса.

---

**Вход:** коллекция  $D$ , число тем  $|T|$ , параметры  $\alpha, \beta$ ;

**Выход:** распределения  $\Phi$  и  $\Theta$ ;

- 1  $n_{wt}, n_{td}, n_t, n_d := 0$  для всех  $d \in D, w \in W, t \in T$ ;
  - 2 для всех итераций  $k := 1, \dots, k_{\max}$
  - 3 для всех  $i = 1, \dots, n$  взять документ  $d := d_i$ , терм  $w := w_i$
  - 4 если  $k \geq 2$  то  $t := t_i; --n_{wt}; --n_{td}; --n_t; --n_d$ ;
  - 5  $p(t|d, w) = \mathop{\text{norm}}_{t \in T} \left( \frac{n_{wt} + \beta_w}{n_t + \beta_0} \cdot \frac{n_{td} + \alpha_t}{n_d + \alpha_0} \right)$  для всех  $t \in T$ ;
  - 6 сэмплировать одну тему  $t$  из распределения  $p(t|d, w)$ ;
  - 7  $t_i := t; ++n_{wt}; ++n_{td}; ++n_t; ++n_d$ ;
  - 8  $\varphi_{wt} := n_{wt}/n_t$  для всех  $w \in W, t \in T$ ;
  - 9  $\theta_{td} := n_{td}/n_d$  для всех  $d \in D, t \in T$ ;
- 

Фактически, на  $M$ -шаге суммируются не сами распределения  $p(t|d_i, w_i)$ , а их эмпирические оценки  $p_i(t) = [t=t_i]$  по сэмплированным темам  $t_i$ . Сумма таких оценок сходится к сумме исходных распределений, согласно закону больших чисел.

По окончании итераций искомые параметры модели можно оценить через математическое ожидание апостериорных распределений Дирихле из (34):

$$\varphi_{wt} = \mathop{\text{norm}}_{w \in W} (n_{wt} + \beta_w); \quad \theta_{td} = \mathop{\text{norm}}_{t \in T} (n_{td} + \alpha_t).$$

В алгоритме 4 показана идея реализации, предложенная в [152]. Каждая итерация  $k$  в процессе сэмплирования соответствует одному проходу коллекции. Когда для позиции  $i$  сэмплируется тема  $t_i$ , всем предыдущим позициям  $1, \dots, i-1$  уже присвоены темы на данной итерации, а все последующие позиции  $i+1, \dots, n$  сохраняют темы с предыдущей  $(k-1)$ -й итерации — в точности как того требует теорема 7.2. Сэмплированная тема запоминается в переменной  $t_i$ , и на следующей итерации, когда эта тема изменится, счётчики  $n_{wt}$  и  $n_{td}$  будут уменьшены на единицу для старой темы, и увеличены на единицу для новой.

Сходство EM-подобных алгоритмов PLSA, MAP, VB, GS и ещё нескольких их вариантов было замечено в [26]. В работе [6] сэмплирование единственной темы из распределения  $t \sim p(t|d, w)$  рассматривалось как отдельная эвристика, которую можно использовать в любом EM-подобном алгоритме тематического моделирования, начиная с PLSA. Эксперименты показали, что сэмплирование несущественно влияет на сходимость и другие свойства модели. Как эвристика, оно может свободно сочетаться с любыми регуляризаторами.

**Оптимизация гиперпараметров в модели LDA.** Во многих работах, начиная с [152], используются симметричные априорные распределения Дирихле с параметрами  $\alpha_t = 50/|T|$ ,  $\beta_w = 0.01$ . Более тонкие исследования [170] показали, что лучше оптимизировать вектор  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_T)$  в несимметричном распределении  $\text{Dir}(\theta_d|\alpha)$  и подбирать числовой параметр  $\beta_w \ll 1$  в симметричном распределении  $\text{Dir}(\varphi_t|\beta)$ .

Для оптимизации вектора  $\alpha$  в [170] предлагается максимизировать правдоподобие  $P(X, Z|\alpha, \beta)$  при фиксированных  $Z$  и  $\beta$ . Отбрасывая в (35) множители, не зависящие

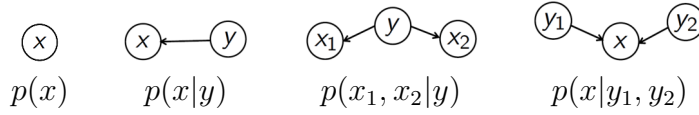


Рис. 6: Представление условных зависимостей в графической нотации.

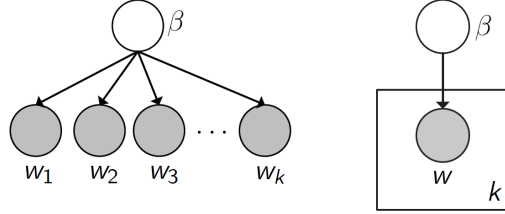


Рис. 7: Графическая нотация выборки  $w_1, \dots, w_k$ , порождаемой распределением  $\beta_w = p(w)$ .

от  $\alpha$ , получаем оптимизационную задачу:

$$P(X|\alpha) = \prod_{d \in D} \frac{\Gamma(\alpha_0)}{\Gamma(n_d + \alpha_0)} \prod_{t \in T} \frac{\Gamma(n_{td} + \alpha_t)}{\Gamma(\alpha_t)} \rightarrow \max_{\alpha}.$$

В диссертации [169] сравнивалось более десятка численных методов её решения. Приведём лишь самый простой из них — метод неподвижной точки [114]. В нём вектор  $\alpha = (\alpha_t)$  пересчитывается по рекуррентной формуле

$$\alpha_t := \alpha_t \frac{\sum_d \psi(n_{td} + \alpha_t) - \psi(\alpha_t)}{\sum_d \psi(n_d + \alpha_0) - \psi(\alpha_0)},$$

где  $\psi(x)$  — дигамма-функция. Эта формула встраивается в итерационный процесс EM-алгоритма между проходами по всей коллекции.

Эксперименты в [170] показали, что оптимизация вектора  $\alpha$  повышает правдоподобие и скорость сходимости EM-алгоритма. В случае сильной *несбалансированности тем* (когда в коллекции одних тем больше, чем других, в разы или даже на порядки) оптимизация вектора  $\alpha$  приводит к более естественному неравномерному распределению коллекции по темам.

**Графическая нотация.** Вероятностные тематические модели PLSA и LDA являются частными случаями графовых моделей. В *графовой вероятностной модели* (probabilistic graphical model, PGM) зависимости между случайными величинами представляются в виде графа. Вершины графа соответствуют случайным переменным, рёбра — непосредственным вероятностным взаимосвязям между ними. На рис. 6 показаны примеры зависимостей между случайными переменными. Наблюдаемые переменные изображаются закрашенным кружком. Выборка переменных, генерируемых одним распределением, изображается прямоугольником, рис. 7. Такие изображения будем называть *графической нотацией* (plate notation).

Альтернативной текстуальной формой представления вероятностной модели является *генеративная история* (generative story), в которой описывается алгоритм порождения данных. На рис. 8 показаны оба представления, графическое и текстуальное, для тематических моделей PLSA и LDA.

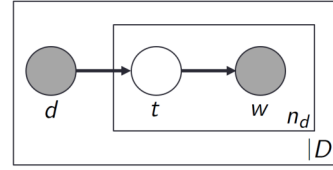
### Модель PLSA:

каждый  $d \in D$  порождает скрытые темы:

$$t_i \sim p(t|d), \quad i = 1, \dots, n_d;$$

каждая тема  $t_i$  порождает слово:

$$w_i \sim p(w|t_i), \quad i = 1, \dots, n_d.$$



### Модель LDA:

$\alpha$  порождает векторы документов:

$$\theta_d \sim \text{Dir}(\theta|\alpha), \quad d \in D;$$

$\beta$  порождает векторы тем:

$$\varphi_t \sim \text{Dir}(\varphi|\beta), \quad t \in T;$$

далее как в PLSA.

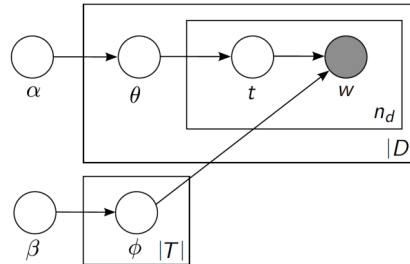


Рис. 8: Генеративная история и графическая нотация для моделей PLSA и LDA.

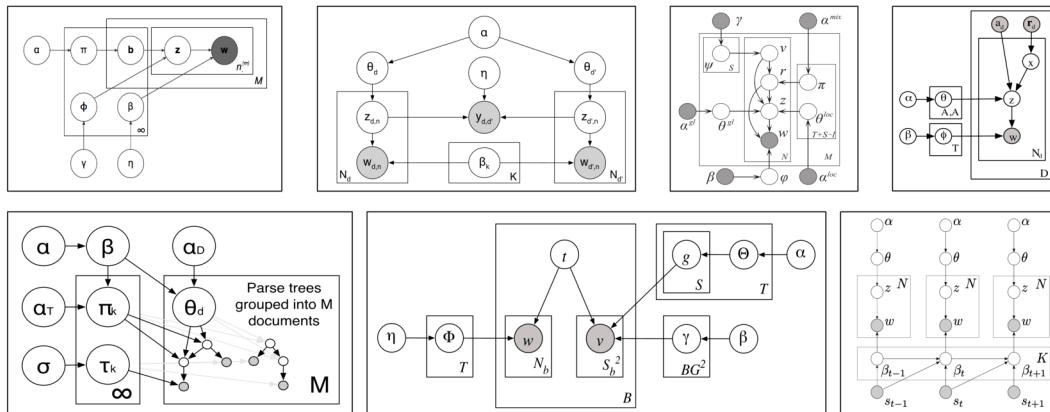


Рис. 9: Примеры графических нотаций из публикаций по тематическому моделированию.

Подборка графических нотаций на рис. 9 иллюстрирует большое структурное разнообразие вероятностных тематических моделей. Хотя наглядность является неоспоримым преимуществом, недостатков у графической нотации гораздо больше. Главный — неполнота и неоднозначность интерпретации. Некоторые аспекты моделирования не могут быть отображены общепринятыми средствами графической нотации, и авторы вынуждены изобретать собственные. В результате модель может восстанавливаться по картинке неоднозначно. Генеративная история лишена этого недостатка и даёт более точное описание модели. Графическая нотация и генеративная история могут быть полезны для понимания общей идеи и конструкции модели. Однако их не достаточно, чтобы однозначно воспроизвести переход от модели к алгоритму её обучения. К сожалению, во многих публикациях авторы опускают этот переход для краткости изложения, что отнюдь не добавляет ясности таким работам.

**Сравнение ARTM и байесовского подхода.** В практике тематического моделирования байесовский вывод апостериорного распределения  $p(\Omega | X, \gamma)$  производится

Этапы моделирования	Bayesian TM	ARTM	
	Анализ требований	Анализ требований	
Формализация:	Вероятностная модель порождения данных	Стандартные критерии	Свои критерии
Алгоритмизация:	Байесовский вывод для данной порождающей модели (VI, GS, EP)	Единый регуляризованный EM-алгоритм для любых моделей и их композиций	
Реализация:	Исследовательский код (Matlab, Python, R)	Промышленный код BigARTM (C++, Python API)	
Оценивание:	Исследовательские метрики, исследовательский код	Стандартные метрики	Свои метрики
	Внедрение	Внедрение	

-- нестандартизируемые этапы, уникальная разработка для каждой задачи  
 -- стандартизуемые этапы

Рис. 10: В отличие от байесовского обучения, ARTM стандартизирует реализацию тематических моделей в виде модульной расширяемой библиотеки регуляризаторов. Процедуры хранения и передачи данных, распараллеливания EM-алгоритма, оценивания качества моделей являются общими для широкого класса моделей и их композиций.

исключительно ради получения точечной оценки параметров  $\Omega$ :

$$\text{Posterior}(\Omega | X, \gamma) \propto p(X | \Omega) \text{Prior}(\Omega | \gamma);$$

$$\Omega := \arg \max_{\Omega} \text{Posterior}(\Omega | X, \gamma).$$

Максимизация апостериорной вероятности (MAP) даёт точечную оценку  $\Omega$ , минуя промежуточный шаг приближённого и трудоёмкого вывода Posterior:

$$\Omega := \arg \max_{\Omega} (\ln p(X | \Omega) + \ln \text{Prior}(\Omega | \gamma)).$$

Многокритериальная аддитивная регуляризация (ARTM) обобщает MAP на любые регуляризаторы, в том числе не имеющие вероятностной интерпретации, а также их произвольные комбинации:

$$\Omega := \arg \max_{\Omega} (\ln p(X | \Omega) + \sum_{i=1} \tau_i R_i(\Omega)).$$

К недостаткам байесовского вывода можно отнести техническую сложность добавления и комбинирования требований к модели как оптимизационных критериев. В нём нет удобных механизмов регуляризации, поскольку нет, собственно, и задачи оптимизации по  $\Omega$ . Дополнительная информация привносится либо через априорные распределения, либо в саму структуру модели. Если априорные распределения не являются распределениями Дирихле, байесовский вывод заметно усложняется.

Распределение Дирихле оказывается «на особом положении» в байесовском тематическом моделировании. Оно не имеет убедительных лингвистических обоснований, тем не менее, в литературе большинство моделей строятся с его использованием. Это объясняется исключительно математическим удобством сопряжённости распределений Дирихле с мультиномиальным распределением. В ARTM нет никаких оснований предпочитать распределение Дирихле другим регуляризаторам.

Постановка оптимизационной задачи MAP позволяет интерпретировать логарифм априорного распределения как вероятностный регуляризатор, отделить его



от конкретной модели и использовать в других моделях. Аддитивность регуляризаторов приводит к модульной технологии тематического моделирования, которая реализована в проекте BigARTM [8, 163]. При решении прикладных задач комбинирование готовых регуляризаторов позволяет строить модели с заданными свойствами без дополнительных математических выкладок и программирования, рис. 10. Создание такой технологии в рамках байесовского подхода едва ли возможно.

В дальнейшем мы будем рассматривать все тематические модели в терминах регуляризации, даже если в исходных работах они строились байесовскими методами. Реформализация байесовских моделей через классическую регуляризацию, как правило, не представляет особого труда, более того, приводит к радикальному упрощению изложения без существенных изменений алгоритмов. Мы не будем использовать графическую нотацию, поскольку в ARTM даже сложные модели формализуются настолько просто, что потребности в наглядных представлениях не возникает.

## 8 Разреживание, сглаживание, декоррелирование

Отказ от априорных распределений Дирихле позволяет обобщить модель LDA: снять ограничения на знаки гиперпараметров в (22) и свободнее обращаться со сглаживанием и разреживанием для улучшения интерпретируемости тем.

*Гипотеза разреженности:* каждая тема характеризуется небольшим числом термов; каждый документ относится к небольшому числу тем; значительная часть условных вероятностей  $\varphi_{wt}$  и  $\theta_{td}$  равны нулю.

Разреженность представляется естественным необходимым условием интерпретируемости тематической модели. Кроме того, использование разреженных матриц может сокращать время вычислений и расход памяти как в процессе построения модели, так и при дальнейшем её использовании.

Многочисленные попытки разреживания модели LDA [146, 57, 173, 88, 44] всегда приводили к её переусложнению из-за внутреннего противоречия между разреженностью и положительностью параметров в распределении Дирихле. Проблема решается при использовании обобщённого регуляризатора сглаживания и разреживания (23), в котором гиперпараметры  $\beta_{wt}, \alpha_{td}$  могут принимать отрицательные значения:

$$R(\Phi, \Theta) = \sum_{t \in T} \sum_{w \in W} \beta_{wt} \ln \varphi_{wt} + \sum_{d \in D} \sum_{t \in T} \alpha_{td} \ln \theta_{td}.$$

Такой способ разреживания был впервые предложен, по всей видимости, в динамической модели PLSA для обработки видеопотоков [159], где документами являлись короткие видеофрагменты, терминами — признаки на изображениях, темами — появление определённого объекта в течение определённого времени (например, проезд автомобиля через перекрёсток). Разреживать распределения сильнее, чем это делает LDA, потребовались для описания тем с коротким «временем жизни».

**Частичное обучение.** В процессе создания, использования или оценивания тематической модели эксперты, пользователи или ассессоры могут отмечать в темах релевантные или нерелевантные термы и документы. Размеченные данные позволяют фиксировать интерпретации тем и повышают устойчивость модели. Разметка может затрагивать лишь часть документов и тем, поэтому её использование относится к задачам *частичного обучения* (semi-supervised learning).

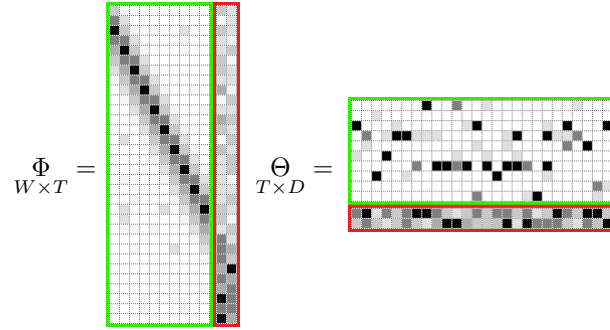


Рис. 11: Структура разреженности матриц  $\Phi$  и  $\Theta$  с предметными и фоновыми темами.

Пусть для каждой темы  $t \in T$  заданы четыре подмножества:

$W_t^+$  — «белый список» релевантных термов;

$W_t^-$  — «чёрный список» нерелевантных термов;

$D_t^+$  — «белый список» релевантных документов;

$D_t^-$  — «чёрный список» нерелевантных документов.

*Частичное обучение по релевантности* является частным случаем регуляризатора сглаживания и разреживания при

$$\beta_{wt} = \beta_+[w \in W_t^+] - \beta_-[w \in W_t^-],$$

$$\alpha_{td} = \alpha_+[d \in D_t^+] - \alpha_-[d \in D_t^-],$$

где  $\beta_{\pm}$  и  $\alpha_{\pm}$  — коэффициенты регуляризации.

**Предметные и фоновые темы.** Чтобы модель была интерпретируемой, каждая тема должна иметь *семантическое ядро* — множество термов, характеризующих определённую предметную область и редко употребляемых в других темах. Для этого матрицы  $\Phi$  и  $\Theta$  должны иметь структуру разреженности, аналогичную показанной на рис. 11. Множество тем разбивается на два подмножества,  $T = S \sqcup B$ .

*Предметные темы*  $t \in S$  содержат термины предметных областей. Их распределения  $p(w|t)$  разрежены и существенно различны (декоррелированы). Распределения  $p(t|d)$  также разрежены в предметных темах  $t \in S$ , если предполагать, что каждый документ содержит лишь небольшую долю предметных тем.

*Фоновые темы*  $t \in B$  содержат слова общей лексики, которых не должно быть в предметных темах. Их распределения  $p(w|t)$ , возможно, менее разрежены по сравнению с предметными темами и существенно отличаются от них. Распределения  $p(t|d)$  должны быть сильно сглажены в фоновых темах  $t \in S$ , так как слова общей лексики составляют значительную долю даже в узко специализированных документах. Тематическую модель с несколькими фоновыми темами можно рассматривать как обобщение робастных моделей [42, 133], в которых использовалось только одно фоновое распределение.

**Сфокусированный тематический поиск.** Частичное обучение тем можно рассматривать как разновидность тематического информационного поиска. В качестве запроса задаётся *семантическое ядро* одной или нескольких тем. Это может быть любой фрагмент текста, «белый список» термов (seed words) или *z-метки* — темы, приписанные отдельным словам или фрагментам в документах [22]. Тематическая

поисковая система должна не только найти и ранжировать релевантные документы, но и разложить поисковую выдачу по темам. В типичных приложениях релевантный контент составляет ничтожно малую долю коллекции. Тем не менее, именно этот контент должен быть тщательно систематизирован. Образно говоря, требуется «искать и классифицировать иголки в стоге сена» [38]. Темы становятся элементом графического интерфейса пользователя, инструментом навигации и понимания текстовой коллекции. Отсюда важность требования интерпретируемости каждой темы.

Частичное обучение использовалось для поиска и кластеризации новостей [73], поиска в социальных медиа информации, связанной с болезнями, симптомами и методами лечения [126, 127], с преступностью и экстремизмом [99, 145], с национальностями и межнациональными отношениями [38, 82, 124].

В модели ATAM (ailment topic aspects model) в качестве сглаживающего распределения  $\beta_{wt}$  использовалась большая коллекция медицинских статей [127].

В моделях SSLDA (semi-supervised LDA) и ISLDA (interval semi-supervised LDA) для поиска этно-релевантных тем в постах социальных сетей использовалось сглаживание по словарю из нескольких сотен этнонимов [38]. В модели SSLDA для каждой этно-релевантной темы задаётся свой словарь этнонимов, связанных с одним определённым этносом. В модели ISLDA множество тем разбивается на интервалы, и для всех тем каждого интервала задаётся общий словарь этнонимов. Преимущество этих моделей в том, что интерпретация каждой темы известна заранее. Недостатки в том, что трудно предугадывать число тем для каждой этничности и строить полиэтничные темы для выявления межэтнических отношений.

Для решения этих проблем в [23, 24] был предложен подход на основе ARTM. Задавалось общее число этно-релевантных тем и к ним, как к столбцам матрицы  $\Phi$ , применялось сглаживание по словарю этнонимов. Тематическая модель сама определяла, как эти темы разделяются по этничностям. Альтернативный подход заключается в том, чтобы сделать этнонимы отдельной модальностью, придав им больший вес, чем обычным словам (понятие модальности вводится ниже, в разделе 9).

Любые подходы к сфокусированному тематическому поиску требуют ручной проверки и интерпретации найденных тем.

**Декоррелирование тем.** Тематическая модель не должна содержать дублирующих или похожих тем. Чем различнее темы, тем информативнее модель. Если темы разделяются на предметные и фоновые, то все они должны существенно отличаться друг от друга.

Для повышения различности тем будем минимизировать сумму попарных скалярных произведений  $\langle \varphi_t, \varphi_s \rangle = \sum_w \varphi_{wt} \varphi_{ws}$  между столбцами матрицы  $\Phi$ . Получим регуляризатор:

$$R(\Phi) = -\frac{\tau}{2} \sum_{t \in T} \sum_{s \in T \setminus t} \sum_{w \in W} \varphi_{wt} \varphi_{ws}.$$

Формула М-шага, согласно (17), имеет вид

$$\varphi_{wt} = \operatorname{norm}_{w \in W} \left( n_{wt} - \tau \varphi_{wt} \sum_{s \in T \setminus t} \varphi_{ws} \right). \quad (36)$$

Этот регуляризатор контрастирует строки матрицы  $\Phi$ . В каждой строке, независимо от остальных, вероятности  $\varphi_{wt}$  наиболее значимых тем терма  $w$  увеличиваются,

вероятности остальных тем уменьшаются и могут обращаться в нуль. Разреживание — это сопутствующий эффект декоррелирования. В [155] был замечен ещё один полезный эффект: слова общей лексики группируются в отдельные темы. Эксперименты с комбинированием регуляризаторов сглаживания, разреживания и декоррелирования в ARTM подтверждают это наблюдение [7, 165, 164].

Декоррелирование впервые было предложено в модели TWC-LDA (topic-weak-correlated LDA) в рамках байесовского подхода [155]. Соответствующее априорное распределение не является сопряжённым к мультиномиальному, поэтому байесовский вывод сталкивается с техническими трудностями. В ARTM расчётная формула M-шага (36) выводится в одну строку.

**Комбинирование регуляризаторов** сглаживания фоновых тем, разреживания предметных тем в матрице  $\Theta$  и декоррелирования столбцов матрицы  $\Phi$  использовалось во многих работах для улучшения интерпретируемости тем [7, 164, 165, 166, 19]. Подобранные коэффициенты регуляризации, можно одновременно значительно улучшить разреженность, контрастность, чистоту и когерентность тем при незначительной потере правдоподобия [165]. Были выработаны основные рекомендации: декоррелирование и сглаживание включать сразу, разреживание — после 10–20 итераций, когда образуется тенденция к сходимости параметров модели.

Та же комбинация регуляризаторов существенно улучшала качество тематического разведочного поиска в [19, 185, 71], хотя никакие критерии качества поиска непосредственно не оптимизировались.

## 9 Моделирование мультимодальных данных

*Мультимодальная тематическая модель* описывает документы, содержащие метаданные наряду с основным текстом. Метаданные помогают более точно определять тематику документов, и, наоборот, тематическая модель может использоваться для выявления семантики метаданных или предсказания пропущенных метаданных.

Каждый тип метаданных образует отдельную *модальность* со своим словарём. Слова естественного языка, словосочетания [172, 181], теги [84], именованные сущности [118] — это примеры текстовых модальностей. В мультязычных тематических моделях параллельных текстов модальностями являются языки [167]. Для анализа коротких текстов с опечатками используют модальность буквенных  $n$ -грамм, что позволяет улучшать качество информационного поиска [70]. Примерами нетекстовых модальностей являются (рис. 12): авторы [141], моменты времени [158, 192, 159], классы, жанры или категории [142, 196], цитируемые или цитирующие документы [54] или авторы [77], пользователи электронных библиотек, социальных сетей или рекомендательных систем [89, 149, 174, 188, 189], графические элементы изображений [35, 69, 94], рекламные объявления на веб-страницах [130].

**Мультимодальная ARTM.** Все перечисленные выше случаи, несмотря на разнообразие интерпретаций, описываются в ARTM единым формализмом модальностей. Каждый документ рассматривается как универсальный контейнер, содержащий термины различных модальностей, включая обычные слова.

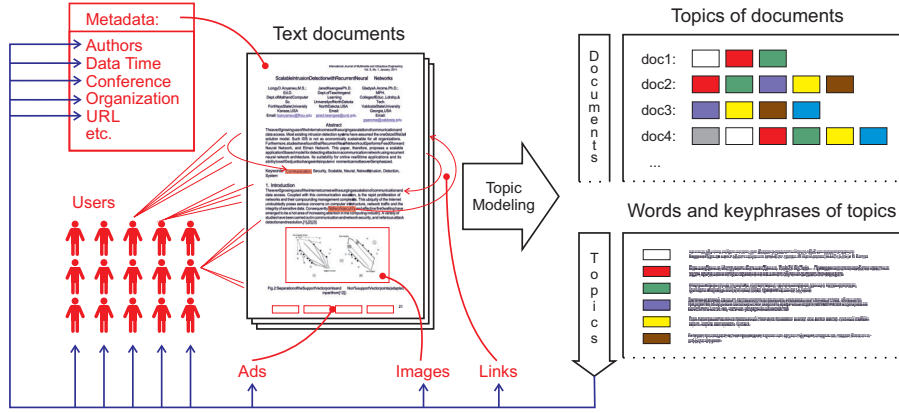


Рис. 12: Обычная тематическая модель определяет распределение тем в каждом документе  $p(t|d)$  и распределение термов в каждой теме  $p(w|t)$ . Мультимодальная модель распространяет семантику тем на элементы всех остальных модальностей, в том числе нетекстовые.

Пусть  $M$  — множество модальностей. Каждая модальность имеет свой словарь термов  $W^m$ ,  $m \in M$ . Эти множества попарно не пересекаются. Их объединение будем обозначать через  $W$ . Модальность терма  $w \in W$  будем обозначать через  $m(w)$ .

Тематическая модель модальности  $m$  аналогична модели (2):

$$p(w|d) = \sum_{t \in T} p(w|t) p(t|d) = \sum_{t \in T} \varphi_{wt} \theta_{td}, \quad w \in W^m, \quad d \in D. \quad (37)$$

Каждой модальности  $m$  соответствует стохастическая матрица  $\Phi_m = (\varphi_{wt})_{W^m \times T}$ . Совокупность матриц  $\Phi_m$ , если их записать в столбец, образует  $W \times T$ -матрицу  $\Phi$ . Распределение тем в каждом документе является общим для всех модальностей.

Мультимодальная модель строится путём максимизации взвешенной суммы логарифмов правдоподобия модальностей и регуляризаторов. Веса  $\tau_m$  позволяют сбалансировать модальности по их важности и с учётом их частотности в документах:

$$\sum_{m \in M} \tau_m \sum_{d \in D} \sum_{w \in W^m} n_{dw} \ln \sum_{t \in T} \varphi_{wt} \theta_{td} + R(\Phi, \Theta) \rightarrow \max_{\Phi, \Theta}; \quad (38)$$

$$\sum_{w \in W^m} \varphi_{wt} = 1; \quad \varphi_{wt} \geq 0; \quad \sum_{t \in T} \theta_{td} = 1; \quad \theta_{td} \geq 0. \quad (39)$$

**Теорема 9.1.** Пусть функция  $R(\Phi, \Theta)$  непрерывно дифференцируема. Точка  $(\Phi, \Theta)$  локального экстремума задачи (38)–(39) удовлетворяет системе уравнений со вспомогательными переменными  $p_{tdw} = p(t|d, w)$ , если из решения исключить нулевые столбцы матриц  $\Phi_m$ ,  $\Theta$ :

$$p_{tdw} = \text{norm}_{t \in T}(\varphi_{wt} \theta_{td}); \quad (40)$$

$$\varphi_{wt} = \text{norm}_{w \in W^m} \left( n_{wt} + \varphi_{wt} \frac{\partial R}{\partial \varphi_{wt}} \right); \quad n_{wt} = \sum_{d \in D} \tau_{m(w)} n_{dw} p_{tdw}; \quad (41)$$

$$\theta_{td} = \text{norm}_{t \in T} \left( n_{td} + \theta_{td} \frac{\partial R}{\partial \theta_{td}} \right); \quad n_{td} = \sum_{m \in M} \sum_{w \in W^m} \tau_m n_{dw} p_{tdw}. \quad (42)$$

Тема №68				Тема №79			
research	4.56	институт	6.03	goals	4.48	матч	6.02
technology	3.14	университет	3.35	league	3.99	игрок	5.56
engineering	2.63	программа	3.17	club	3.76	сборная	4.51
institute	2.37	учебный	2.75	season	3.49	фк	3.25
science	1.97	технический	2.70	scored	2.72	против	3.20
program	1.60	технология	2.30	cup	2.57	клуб	3.14
education	1.44	научный	1.76	goal	2.48	футболист	2.67
campus	1.43	исследование	1.67	apps	1.74	гол	2.65
management	1.38	наука	1.64	debut	1.69	забивать	2.53
programs	1.36	образование	1.47	match	1.67	команда	2.14
Тема №88				Тема №251			
opera	7.36	опера	7.82	windows	8.00	windows	6.05
conductor	1.69	оперный	3.13	microsoft	4.03	microsoft	3.76
orchestra	1.14	дирижер	2.82	server	2.93	версия	1.86
wagner	0.97	певец	1.65	software	1.38	приложение	1.86
soprano	0.78	певица	1.51	user	1.03	сервер	1.63
performance	0.78	театр	1.14	security	0.92	server	1.54
mozart	0.74	партия	1.05	mitchell	0.82	программный	1.08
sang	0.70	сопрано	0.97	oracle	0.82	пользователь	1.04
singing	0.69	вагнер	0.90	enterprise	0.78	обеспечение	1.02
operas	0.68	оркестр	0.82	users	0.78	система	0.96

Рис. 13: Примеры тем из двуязычной тематической модели Википедии. Показаны первые 10 слов каждой темы и их вероятности  $p(w|t)$  в процентах.

Доказательство аналогично теореме 4.1, которая является частным случаем теоремы 9.1 для случая одной модальности,  $|M| = 1$ ,  $\tau_m = 1$ . Переход от одной модальности к произвольному числу модальностей сводится к двум поправкам:

- 1) исходные данные  $n_{dw}$  домножаются на веса модальностей  $\tau_{m(w)}$ ;
- 2) матрица  $\Phi$  разбивается на блоки  $\Phi_m$ , которые нормируются по-отдельности.

В проекте BigARTM реализована возможность комбинировать любое число модальностей с любыми регуляризаторами [23].

**Мультиязычные модели.** Мультиязычные текстовые коллекции используются для кросс-язычного информационного поиска, когда по запросу на одном языке требуется найти семантически близкие документы на другом языке. Для связывания языков используются параллельные тексты или двуязычные словари. Первые мультиязычные тематические модели появились почти одновременно [51, 112, 123] и представляли собой мультимодальную модель, в которой модальностями являются языки, и каждая связка параллельных текстов объединяется в один документ. Оказалось, что связывания документов достаточно для синхронизации тем в двух языках и кросс-язычного поиска. Попытки более точного и трудоёмкого выравнивания по предложениям или по словам практически не улучшают качество поиска. обстоятельный обзор мультиязычных тематических моделей можно найти в [167].

На рис. 13 показаны некоторые из 400 тем, построенных по 216 175 парам русских и английских статей Википедии [163]. Для связывания языков использовались только модальности, выравнивания и словари не использовались. Ассессор оценил 396 тем из 400 как хорошо интерпретируемые.

Для использования двуязычного словаря в [9] был предложен регуляризатор сглаживания. Он формализует предположение, что если слово  $u$  в языке  $k$  является переводом слова  $w$  из языка  $\ell$ , то их распределения тем  $p(t|u)$  и  $p(t|w)$  должны быть

близки в смысле KL-дивергенции:

$$R(\Phi) = \sum_{w,u} \sum_{t \in T} n_{ut} \ln \varphi_{wt}.$$

Согласно формуле М-шага, вероятность слова в теме увеличивается, если оно имеет переводы, имеющие высокую вероятность в данной теме:

$$\varphi_{wt} = \operatorname{norm}_{w \in W^\ell} \left( n_{wt} + \tau \sum_u n_{ut} \right).$$

Этот регуляризатор не учитывал, что перевод слова может зависеть от темы, и что среди переводов слова могут находиться переводы его омонимов. Поэтому в той же работе был предложен второй регуляризатор, который вводил в модель новые параметры  $\pi_{uwt} = p(u|w, t)$  — вероятности того, что слово  $u$  является переводом слова  $w$  в теме  $t$ . Предполагается, что тема  $t$ , как распределение  $\hat{p}(u|t) = \frac{n_{ut}}{n_t}$  над словами языка  $k$ , должна быть близка в смысле KL-дивергенции к вероятностной модели той же темы  $p(u|t) = \sum_w \pi_{uwt} \varphi_{wt}$ , построенной по переводам слов из языка  $\ell$ :

$$R(\Phi, \Pi) = \tau \sum_{u \in W^k} \sum_{t \in T} n_{ut} \ln \sum_{w \in W^\ell} \pi_{uwt} \varphi_{wt} \rightarrow \max_{\Phi, \Pi}.$$

Формула М-шага теперь учитывает вероятности переводов  $\pi_{uwt}$ . Кроме того, добавляется рекуррентная формула для оценивания этих вероятностей:

$$\begin{aligned} \varphi_{wt} &= \operatorname{norm}_{w \in W^\ell} \left( n_{wt} + \tau \sum_u \pi_{wut} n_{ut} \right); \\ \pi_{uwt} &= \operatorname{norm}_{u \in W^k} \left( \pi_{wut} n_{ut} \right). \end{aligned}$$

Связывание параллельных текстов сильнее улучшает качество поиска, чем оба способа учёта словарей [9]. Второй способ немного лучше первого. Кроме того, он позволяет выбирать варианты перевода в зависимости от контекста, что может быть полезно для статистического машинного перевода, рис. 14.

**Модальности категорий и авторов.** Допустим, что распределения тем в документах  $p(t|d)$  порождаются одной из модальностей, например, авторами, рубриками или категориями. Будем считать, что с каждым термом  $w$  в каждом документе  $d$  связана не только тема  $t \in T$ , но и категория  $c$  из заданного множества категорий  $C$ . Расширим вероятностное пространство до множества  $D \times W \times T \times C$ . Пусть известно подмножество категорий  $C_d \subseteq C$ , к которым может относиться документ  $d$ .

Рассмотрим мультимодальную тематическую модель (37), в которой распределение вероятности тем документов  $\theta_{td} = p(t|d)$  описывается смесью распределений тем категорий  $\psi_{tc} = p(t|c)$  и категорий документов  $\pi_{cd} = p(c|d)$ :

$$p(w|d) = \sum_{t \in T} p(w|t) \sum_{c \in C_d} p(t|c) p(c|d) = \sum_{t \in T} \sum_{c \in C_d} \varphi_{wt} \psi_{tc} \pi_{cd}. \quad (43)$$

Это также задача стохастического матричного разложения, только теперь требуется найти три матрицы:  $\Phi$  — матрица термов тем,  $\Psi = (\psi_{tc})_{T \times C}$  — матрица тем категорий,  $\Pi = (\pi_{cd})_{C \times D}$  — матрица категорий документов.

Темы, в которых  $p(\langle \text{sum} \rangle | \langle \text{сумма} \rangle, t) > 0.9$

Тема №6		Тема №12		Тема №20	
множество	set	математика	triangle	вектор	vector
пространство	space	треугольник	square	координата	coordinate
группа	point	теорема	number	пространство	field
точка	left	точка	point	преобразование	tensor
элемент	limit	математический	theorem	базис	transform
функция	symmetry	угол	angle	тензор	basis
предел	function	координата	mathematics	сила	space
отображение	open	экономика	real	векторный	force
симметрия	property	число	theory	точка	rotation
открытый	topology	квадрат	geometry	система	thermometer

Темы, в которых  $p(\langle \text{total} \rangle | \langle \text{сумма} \rangle, t) > 0.9$

Тема №5		Тема №19		Тема №22	
орбита	space	программный	software	игра	game
аппарат	nasum	версия	version	видеосигнал	character
космический	orbit	работа	news	игрок	video
земля	instrument	компания	company	фильм	player
поверхность	earth	анонимный	work	головоломка	series
солнечный	surface	примечание	note	серия	puzzle
станция	solar	терминатор	release	качество	movie
запуск	system	журнал	support	шахматы	jason
система	landing	рей	terminator	джейсон	world
атмосфера	camera	персонаж	anonymouse	буква	chess

Рис. 14: Примеры тем, в которых слово «сумма» имеет разные переводы.

Модель основана на двух гипотезах условной независимости:

$p(t|c, d) = p(t|c)$  — тематика документа  $d$  зависит не от самого документа, а только от того, какой категории он принадлежит;

$p(w|t, c, d) = p(w|t)$  — распределение термов полностью определяется тематикой документа и не зависит от самого документа и его категорий.

Кроме того, предполагается, что  $\pi_{cd} = p(c|d) = 0$  для всех  $c \notin C_d$ .

Задача максимизации регуляризованного правдоподобия:

$$\sum_{d \in D} \sum_{w \in d} n_{dw} \ln \sum_{t \in T} \sum_{c \in C_d} \varphi_{wt} \psi_{tc} \pi_{cd} + R(\Phi, \Psi, \Pi) \rightarrow \max_{\Phi, \Psi, \Pi}; \quad (44)$$

$$\sum_{w \in W} \varphi_{wt} = 1, \varphi_{wt} \geq 0; \quad \sum_{t \in T} \psi_{tc} = 1, \psi_{tc} \geq 0; \quad \sum_{c \in C_d} \pi_{cd} = 1, \pi_{cd} \geq 0. \quad (45)$$

**Теорема 9.2.** Пусть функция  $R(\Phi, \Psi, \Pi)$  непрерывно дифференцируема. Точка локального экстремума  $(\Phi, \Psi, \Pi)$  задачи (44), (45) удовлетворяет системе уравнений со вспомогательными переменными  $p_{tcdw} = p(t, c|d, w)$ , если из решения исключить нулевые столбцы матриц  $\Phi, \Psi, \Pi$ :

$$p_{tcdw} = \mathop{\text{norm}}_{(t,c) \in T \times C_d} (\varphi_{wt} \psi_{tc} \pi_{cd});$$

$$\varphi_{wt} = \mathop{\text{norm}}_{w \in W} \left( n_{wt} + \varphi_{wt} \frac{\partial R}{\partial \varphi_{wt}} \right); \quad n_{wt} = \sum_{d \in D} \sum_{c \in C_d} n_{dw} p_{tcdw};$$

$$\psi_{tc} = \mathop{\text{norm}}_{t \in T} \left( n_{tc} + \psi_{tc} \frac{\partial R}{\partial \psi_{tc}} \right); \quad n_{tc} = \sum_{d \in D} \sum_{w \in d} n_{dw} p_{tcdw};$$

$$\pi_{cd} = \mathop{\text{norm}}_{c \in C_d} \left( n_{cd} + \pi_{cd} \frac{\partial R}{\partial \pi_{cd}} \right); \quad n_{cd} = \sum_{w \in d} \sum_{t \in T} n_{dw} p_{tcdw}.$$



Доказательство опирается на лемму 3.2 о максимизации на единичных симплексах и проводится аналогично доказательству теоремы 4.1.

Модель трёхматричного разложения наиболее известна как *автор-тематическая модель* АТМ (author-topic model), в которой порождающей модальностью являются авторы документов [141]. В *тематической модели тегирования документов* ТWTM (tag weighted topic model) порождающей модальностью являются теги документа [92]. Аналогичная модель использовалась для обработки видеопотоков в [69]: документы  $d$  соответствовали последовательным 1-секундным видеоклипам, термы  $w$  — элементарным визуальным событиям, темы  $t$  — действиям, состоящим из сочетания событий, категории  $c$  — более сложным поведением, состоящим из сочетания действий, причём ставилась задача выделить в каждом клипе одно основное поведение.

Модель (43) можно упростить и свести снова к двуматричному разложению, если отождествить темы с категориями,  $C \equiv T$ , и взять единичную матрицу  $\Psi$ . Данная модель известна в литературе как Flat-LDA [142] и Labeled-LDA [137]. Её выразительные возможности беднее, чем у PLSA и LDA, так как значительная доля элементов матрицы  $\Pi \equiv \Theta$  фиксированы и равны нулю.

Трёхматричные разложения пока не реализованы в библиотеке BigARTM.

**Модальность времени и темпоральные модели.** Время создания документов важно при анализе новостных потоков, научных публикаций, патентных баз, данных социальных сетей. Тематические модели, учитывающие время, называются *темпоральными*. Они позволяют выделять событийные и перманентные темы, детектировать новые темы, проследить развитие тем во времени, выделять тренды.

Пусть  $I$  — конечное множество интервалов времени, и каждый документ относится к одному или нескольким интервалам,  $D_i$  — подмножество документов, относящихся к интервалу  $i$ . Будем полагать, что темы как распределения  $p(w|t)$  не меняются во времени. Требуется найти распределение каждой темы во времени  $p(i|t)$ .

Тривиальный подход заключается в том, чтобы построить тематическую модель без учёта времени, затем найти распределение тем в каждом интервале  $p(t|i)$  как среднее  $\theta_{td}$  по всем документам  $d \in D_i$  и перенормировать условные вероятности:  $p(i|t) = p(t|i) \frac{p(i)}{p(t)}$ . Недостаток данного подхода в том, что информация о времени никак не используется при обучении модели и не влияет на формирование тем.

В ARTM эта проблема решается введением модальности времени  $I$ . Искомое распределение  $p(i|t) = \varphi_{it}$  получается в столбце матрицы  $\Phi$ . Дополнительные ограничения на поведение тем во времени можно вводить с помощью регуляризации.

В одной из первых темпоральных тематических моделей ТОТ (topics over time) [180] каждая тема моделировалась параметрическим  $\beta$ -распределением во времени. Это семейство монотонных и унимодальных непрерывных функций, с помощью которого можно описывать узкие пики событийных тем и ограниченный набор трендов. Темы, имеющие спорадические всплески, данная модель описывает плохо.

Непараметрические темпоральные модели способны описывать произвольные изменения тем во времени. Рассмотрим два естественных предположения и формализуем их с помощью регуляризации.

Во-первых, предположим, что многие темы являются событийными и имеют относительно небольшое «время жизни», поэтому в каждом интервале времени  $i$  присутствуют не все темы. Потребуем разреженности распределений  $p(t|i)$  с помощью

кросс-энтропийного регуляризатора:

$$R_{\text{разр}}(\Phi \text{ или } \Theta) = -\tau_{\text{разр}} \sum_{i \in I} \sum_{t \in T} \ln p(t|i).$$

Во-вторых, предположим, что распределения  $p(i|t)$  как функции времени меняются не слишком быстро. Для этого введём регуляризатор сглаживания, минимизирующий модули разностей  $p(i|t)$  в соседних интервалах времени:

$$R_{\text{сгл}}(\Phi \text{ или } \Theta) = -\tau_{\text{сгл}} \sum_{i \in I} \sum_{t \in T} |p(i|t) - p(i-1|t)|.$$

Такой регуляризатор принято использовать при интерполяции разрывных временных рядов [80]. Модуль разности ( $L_1$ -норма), в отличие от квадрата разности ( $L_2$ -нормы), не штрафует модель временного ряда за резкие скачки. Эта особенность полезна при моделировании тематики новостных потоков. Произошедшее событие способно вызвать мгновенный резонанс и скачкообразный рост вероятности  $p(i|t)$  для новой темы  $t$ , которая до этого момента оставалась равной нулю.  $L_1$ -регуляризатор не пытается сглаживать такие скачки, в отличие от  $L_2$ -регуляризатора. Использование  $L_2$ -нормы может приводить к нелепым результатам при обработке исторических данных — «челябинский метеорит» ещё не прилетел, а некоторая доля его темы уже появилась в потоке новостей.

Оба регуляризатора можно записать и как функцию от  $\Phi$ , и как функцию от  $\Theta$ . В первом случае вводится модальность интервалов времени. Во втором случае при обработке документов, относящихся к интервалу  $i$ , придётся обеспечивать доступ к вектор-столбцам  $\theta_d$  документов, относящихся к соседним интервалам  $i \pm 1$ . Второй вариант технически менее удобен, поэтому будем рассматривать только первый.

Рассмотрим в более общем виде задачу мультимодального тематического моделирования с взвешенной суммой негладких  $L_1$ -регуляризаторов  $|R_j(\Phi, \Theta)|$ ,  $j \in J$ :

$$\sum_{m \in M} \tau_m \sum_{d \in D} \sum_{w \in W^m} n_{dw} \ln \sum_{t \in T} \varphi_{wt} \theta_{td} + R(\Phi, \Theta) - \sum_{j \in J} \lambda_j |R_j(\Phi, \Theta)| \rightarrow \max_{\Phi, \Theta}, \quad (46)$$

при обычных ограничениях неотрицательности и нормировки (39).

**Теорема 9.3.** Пусть функции  $R(\Phi, \Theta)$  и  $R_j(\Phi, \Theta)$  непрерывно дифференцируемы. Тогда точка  $(\Phi, \Theta)$  локального экстремума задачи (46) с ограничениями (39) удовлетворяет системе уравнений со вспомогательными переменными  $p_{tdw} = p(t|d, w)$ , если из решения исключить нулевые столбцы матриц  $\Phi$ ,  $\Theta$ :

$$p_{tdw} = \text{norm}_{t \in T}(\varphi_{wt} \theta_{td}); \quad (47)$$

$$\varphi_{wt} = \text{norm}_{w \in W^m} \left( n_{wt} + \varphi_{wt} \frac{\partial R}{\partial \varphi_{wt}} - \varphi_{wt} \sum_{j \in J} \lambda_j \text{sign}(R_j) \frac{\partial R_j}{\partial \varphi_{wt}} \right); \quad (48)$$

$$\theta_{td} = \text{norm}_{t \in T} \left( n_{td} + \theta_{td} \frac{\partial R}{\partial \theta_{td}} - \theta_{td} \sum_{j \in J} \lambda_j \text{sign}(R_j) \frac{\partial R_j}{\partial \theta_{td}} \right); \quad (49)$$

где  $\text{sign}(x) = [x > 0] - [x < 0]$ , выражения для  $n_{wt}$  и  $n_{td}$  те же, что в (41)–(42).

В силу негладкости функционала лемма о максимизации на единичных симплексах непосредственно неприменима. Эта проблема обходится введением дополнительных неотрицательных переменных  $\rho_j^+$  и  $\rho_j^-$ , удовлетворяющих системе ограничений  $|R_j(\Phi, \Theta)| = \rho_j^+ + \rho_j^-$  и  $R_j(\Phi, \Theta) = \rho_j^+ - \rho_j^-$ . В результате регуляризованный критерий становится гладким, что позволяет применить к задаче условия Каруша–Куна–Таккера. Доказательство теоремы можно найти в работе Н. Дойкова<sup>2</sup>.

При введении регуляризатора  $R_{\text{сгл}}(\Phi)$  формула М-шага для модальности времени принимает следующий вид:

$$\varphi_{it} = \operatorname{norm}_{i \in I} \left( n_{it} - \tau_{\text{сгл}} \varphi_{it} (\operatorname{sign}(\varphi_{it} - \varphi_{i-1,t}) + \operatorname{sign}(\varphi_{it} - \varphi_{i+1,t})) \right). \quad (50)$$

Регуляризатор  $R_{\text{сгл}}$  сглаживает значения временного ряда  $\varphi_{it} = p(i|t)$  в каждой точке по отношению к соседним точкам слева и справа. Если значение  $\varphi_{it}$  становится выше обоих соседних  $\varphi_{i \pm 1, t}$ , то регуляризатор уменьшает его; если ниже, то, наоборот, увеличивает. Если значение  $\varphi_{it}$  попадает между ними, то оно не изменяется.

## 10 Моделирование транзакционных данных

Обычные тематические модели текстовых коллекций описывают вхождения слов в документы. Мультимодальные модели описывают документы, в которых содержатся термины различных модальностей: слова, теги, авторы, и т. д. Во всех этих случаях модель описывает парные взаимодействия между документами и терминами. В более сложных приложениях исходные данные могут описывать транзакции (отношения, взаимосвязи, взаимодействия) между тремя и более объектами различных модальностей. Например, в сети интернет-рекламы «пользователь  $u$  кликнул объявление  $b$  на странице  $s$ »; в социальной сети «пользователь  $u$  написал слово  $w$  на странице блога  $d$ »; в сети продаж «покупатель  $b$  купил у продавца  $s$  товар  $g$ »; в пассажирских авиаперевозках «клиент  $u$  вылетел из аэропорта  $x$  в аэропорт  $y$  самолётом авиакомпании  $a$ »; в рекомендательной системе «клиент  $u$  оценил фильм  $f$  в ситуативном контексте  $s$ ». Ещё одной модальностью может быть дата и время транзакции.

Во всех приведённых примерах транзакция нескольких объектов не может быть сведена к парным взаимодействиям. Попытка исключения любого объекта из транзакции приводит к утрате важной части информации. Однако возможны и такие ситуации, когда транзакция распадается на пары. Например, в системе рекомендаций музыки транзакция «трек  $r$  исполнителя  $a$  находится в альбоме  $d$ , вышедшем в году  $y$ » описывается, казалось бы, четвёркой объектов  $(r, a, d, y)$ . Однако она распадается на парные взаимосвязи  $(d, r)$ ,  $(d, a)$ ,  $(d, y)$ , в которых альбомы играют роль документов. Такие данные могут быть описаны обычной мультимодальной моделью.

Для тематического моделирования транзакционных данных удобно понятие гиперграфа. Гиперграф обобщает понятие графа и отличается от него тем, что рёбрами в нём могут быть не только пары вершин, но и подмножества из трёх и более вершин. Вершины гиперграфа соответствуют терминам различных модальностей, рёбра — транзакциям. Задача заключается в том, чтобы по наблюдаемой выборке транзакций

<sup>2</sup>Дойков Н. В. Адаптивная регуляризация вероятностных тематических моделей. Бакалаврская диссертация, ВМК МГУ, 2015.  
[http://www.MachineLearning.ru/wiki/images/9/9f/2015\\_417\\_DoykovNV.pdf](http://www.MachineLearning.ru/wiki/images/9/9f/2015_417_DoykovNV.pdf)

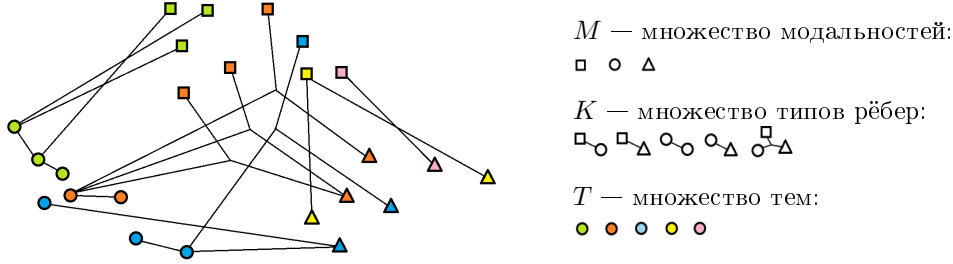


Рис. 15: Пример гиперграфа с вершинами трёх модальностей, рёбрами-транзакциями пяти типов и пятью темами.

восстановить неизвестные тематические распределения вершин  $p(t|v)$ . Предполагается, что вероятность транзакции тем выше, чем более схожи тематики её вершин.

В проекте BigARTM реализована описанная ниже гиперграфовая тематическая модель транзакционных данных.

**Тематические модели на гиперграфах.** Гиперграф  $\Gamma = \langle V, E \rangle$  определяется множеством вершин-термов  $V$  и множеством рёбер (транзакций)  $E$ . Каждое ребро  $e$  из  $E$  образуется подмножеством вершин,  $e \subset V$ .

Каждая вершина  $v \in V$  имеет модальность  $t = \mu(v)$  из конечного множества модальностей  $M$ . Множество всех вершин разбивается на непересекающиеся подмножества по модальностям:

$$V = \bigsqcup_{m \in M} V_m, \quad V_m = \{v \in V: \mu(v) = m\}.$$

Например, в обычных тематических моделях есть только две модальности: документы  $V_1 = D$  и термины  $V_2 = W$ ; каждая транзакция представляется ребром из двух вершин  $e = (d, w)$  и описывает вхождение термина  $w$  в документ  $d$ . При этом гиперграф является двудольным графом.

В более сложных приложениях транзакции могут иметь различные типы. Например, в сети интернет-рекламы, кроме данных типа  $(u, b, s)$  о кликах пользователей  $u$  по объявлениям  $b$  на страницах  $s$ , могут иметься данные о посещениях страниц пользователями  $(u, s)$ , о содержании термов  $w$  в текстах объявлений  $(b, w)$ , страниц  $(s, w)$  и запросов пользователей  $(u, w)$ .

Пусть задано множество типов транзакций  $K$ . Транзакционные данные типа  $k$  — это выборка  $E_k$  независимых наблюдений  $(e, t) \in 2^V \times T$ , порождаемая распределением  $p_k(e, t)$ , своим для каждого типа  $k \in K$ . Каждое ребро  $e \in E_k$  входит в выборку  $n_{ke}$  раз, и с каждым вхождением ребра связана своя латентная тема  $t \in T$ .

На рис. 15 показан пример гиперграфа с вершинами трёх модальностей, рёбрами-транзакциями пяти типов и пятью темами.

Будем полагать, что в каждой транзакции  $e \in E$  имеется одна выделенная вершина  $d$ , называемая *контейнером*, и обозначать ребро через  $e = (d, x)$ , где  $x$  — множество всех остальных вершин ребра  $e$ , за исключением вершины-контейнера  $d$ . Аналогично документу, с контейнером связано распределение тем  $p(t|d)$ . Множество всех вершин-контейнеров обозначим через  $D$ .

Далее предположим, что ни распределения тем  $p(t|d)$  в контейнере  $d$ , ни распределения вершин в темах  $p(v|t)$  не зависят от типа ребра  $k$ . Казалось бы, на практике

это предположение может не выполняться. Например, распределения слов в текстах веб-страниц, в пользовательских запросах и в рекламных баннерах могут значимо различаться для одной и той же темы. Однако это ограничение нетрудно обойти, если построить модель с тремя разными модальностями слов для этих трёх типов транзакций. Сделать эти распределения похожими можно с помощью регуляризации.

Наконец, введём гипотезу условной независимости вершин в рёбрах  $(d, x)$ :

$$p(x|t) = \prod_{v \in x} p(v|t).$$

При сделанных допущениях процесс порождения ребра  $(d, x) \in E_k$  состоит из двух шагов. Сначала порождается тема  $t$  из распределения  $p(t|d)$ . Затем порождается множество вершин  $x \subset V$ , причём каждая вершина  $v \in x$  модальности  $m$  порождается независимо от других вершин из своего распределения  $p(v|t)$  над множеством  $V_m$ .

Тематическая модель выражает вероятности появления рёбер гиперграфа через условные распределения, связанные с их вершинами:

$$p(x|d) = \sum_{t \in T} p(t|d) \prod_{v \in x} p(v|t) = \sum_{t \in T} \theta_{td} \prod_{v \in x} \varphi_{vt}.$$

Параметрами этой модели являются условные вероятности вершин в темах  $\varphi_{vt} = p(v|t)$ , нормированные по каждой модальности  $v \in V_m$ , и условные вероятности тем в контейнерах  $\theta_{td} = p(t|d)$ . В матричных обозначениях параметрами являются матрицы  $\Phi_m$ ,  $m \in M$  и  $\Theta$ , как и в случае мультимодальной тематической модели (38).

Гиперграфовая модель является широким обобщением обычных тематических моделей. В частности, она переходит в PLSA в случае, когда модальностей две — документы  $V_1 = D$  и термины  $V_2 = W$ , тип рёбер только один — пары  $(d, w) \in D \times W$ , в которых документы  $d$  являются контейнерами.

**Гиперграфовый EM-алгоритм.** Для оценивания параметров модели применим принцип максимума правдоподобия. Будем максимизировать сумму логарифмов правдоподобия по всем типам рёбер  $k$  с весами  $\tau_k$  и регуляризатором  $R(\Phi, \Theta)$ :

$$\begin{aligned} \sum_{k \in K} \tau_k \sum_{dx \in E_k} n_{kdx} \ln \left( \sum_{t \in T} \theta_{td} \prod_{v \in x} \varphi_{vt} \right) + R(\Phi, \Theta) \rightarrow \max_{\Phi, \Theta}; \\ \sum_{v \in V_m} \varphi_{vt} = 1, \varphi_{vt} \geq 0; \quad \sum_{t \in T} \theta_{td} = 1, \theta_{td} \geq 0. \end{aligned} \quad (51)$$

**Теорема 10.1.** Пусть функция  $R(\Phi, \Theta)$  непрерывно дифференцируема. Точка локального максимума  $(\Phi, \Theta)$  задачи (51) удовлетворяет системе уравнений относительно параметров модели  $\varphi_{vt}$ ,  $\theta_{td}$  и вспомогательных переменных  $p_{tdx} = p(t|d, x)$ , если из решения исключить нулевые столбцы матриц  $\Phi_m$ ,  $\Theta$ :

$$p_{tdx} = \mathop{\text{norm}}_{t \in T} \left( \theta_{td} \prod_{v \in x} \varphi_{vt} \right); \quad (52)$$

$$\varphi_{vt} = \mathop{\text{norm}}_{v \in V_m} \left( n_{vt} + \varphi_{vt} \frac{\partial R}{\partial \varphi_{vt}} \right); \quad n_{vt} = \sum_{k \in K} \sum_{dx \in E_k} [v \in x] \tau_k n_{kdx} p_{tdx}; \quad (53)$$

$$\theta_{td} = \mathop{\text{norm}}_{t \in T} \left( n_{td} + \theta_{td} \frac{\partial R}{\partial \theta_{td}} \right); \quad n_{td} = \sum_{k \in K} \sum_{dx \in E_k} \tau_k n_{kdx} p_{tdx}. \quad (54)$$

**Доказательство.** Воспользуемся леммой 3.2 о максимизации на единичных симплексах, выделив вспомогательные переменные  $p_{tdx}$ , определённые в (52):

$$\begin{aligned}\varphi_{vt} &= \operatorname{norm}_{v \in V_m} \left( \varphi_{vt} \sum_{k \in K} \tau_k \sum_{dx \in E_k} n_{kdx} \frac{\theta_{td}}{p(x|d)} \frac{\partial}{\partial \varphi_{vt}} \prod_{u \in x} \varphi_{ut} + \varphi_{vt} \frac{\partial R}{\partial \varphi_{vt}} \right) = \\ &= \operatorname{norm}_{v \in V_m} \left( \sum_{k \in K} \sum_{dx \in E_k} \tau_k n_{kdx} [v \in x] p_{tdx} + \varphi_{vt} \frac{\partial R}{\partial \varphi_{vt}} \right); \\ \theta_{td} &= \operatorname{norm}_{t \in T} \left( \theta_{td} \sum_{k \in K} \tau_k \sum_{x \in d} n_{kdx} \frac{1}{p(x|d)} \prod_{v \in x} \varphi_{vt} + \theta_{td} \frac{\partial R}{\partial \theta_{td}} \right) = \\ &= \operatorname{norm}_{t \in T} \left( \sum_{k \in K} \sum_{x \in d} \tau_k n_{kdx} p_{tdx} + \theta_{td} \frac{\partial R}{\partial \theta_{td}} \right).\end{aligned}$$

Теорема доказана.

**Типы транзакций и их весовые коэффициенты.** В описанной модели нет никаких ограничений на то, каким образом транзакции группируются по типам. Любая транзакция, независимо от типа, может содержать любое число термов любых модальностей. На практике удобно относить к одному типу все транзакции, имеющие общее происхождение и структуру. Однако формально такого ограничения нет.

Весовые коэффициенты  $\tau_k$  позволяют сбалансировать модель с учётом количества транзакций в выборках  $|E_k|$ . Чем больше  $\tau_k$ , тем сильнее транзакции типа  $k$  повлияют на модель.

В некоторых задачах определённые типы транзакций не должны влиять на тематику контейнеров. Например, в мультязычной модели может быть выбран один главный язык, определяющий тематику многоязычного документа, однако темы должны получить свои распределения слов в каждом языке. В таком случае для слов главного языка вводится весовой коэффициент  $\tau_k$ , на порядки превышающий весовые коэффициенты слов остальных языков. Другой пример: в рекомендательной системе музыкальные треки должны влиять на темы, если они находятся в плейлистах пользователей, но не в альбомах исполнителей. Тематика альбомов должна определяться исходя из предпочтений пользователей, но не наоборот. Поэтому веса треков в плей-листах должны на порядки превышать веса треков в альбомах.

**Гиперграфовые модели для рекомендательных систем.** Пусть имеется конечное множество клиентов или пользователей  $U$  (users) и конечное множество объектов или товаров  $I$  (items), относительно которых у клиентов могут быть различные предпочтения, вкусы или интересы. Вероятностная тематическая модель рекомендательной системы предсказывает предпочтения клиентов:

$$p(i|u) = \sum_{t \in T} p(i|t) p(t|u).$$

Она эквивалентна тематической модели текстовой коллекции с точностью до замены терминологии: «документы  $\rightarrow$  клиенты», «слова  $\rightarrow$  объекты», «темы  $\rightarrow$  интересы». Исходными данными являются счётчики  $n_{ui}$ , описывающие частоту использования

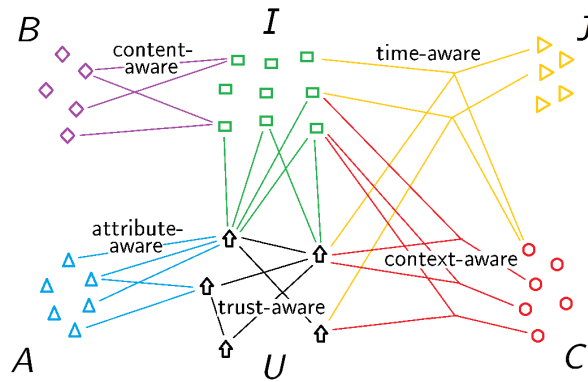


Рис. 16: Транзакционные данные в рекомендательной системе описывают взаимодействия между шестью модальностями: клиенты  $U$ , объекты  $I$ , атрибуты клиентов  $A$ , свойства объектов  $B$ , ситуативные контексты  $C$ , интервалы времени  $J$ .

объекта  $i$  клиентом  $u$ . В зависимости от приложения это могут быть покупки, посещения, обращения, лайки и т. д.

В рекомендательных системах существует проблема «холодного старта»: новому клиенту нечего порекомендовать, поскольку мы не имеем истории его предпочтений; также и новый товар некому порекомендовать, поскольку его ещё никто не выбирал. Для решения этой проблемы привлекаются дополнительные данные о клиентах и объектах. В частности, это могут быть бинарные данные  $n_{ua}$  о наличии у клиента  $u$  атрибута  $a$  из заданного конечного множества  $A$  или данные  $n_{ib}$  о наличии у объекта  $i$  свойства  $b$  из заданного конечного множества  $B$ . Например, объекты могут иметь текстовые описания, и тогда  $B$  — это словарь терминов, используемых в этих описаниях. Такие рекомендательные системы называются, соответственно, учитывающими атрибуты (attribute-aware) и учитывающими контент (content-aware). Они позволяют определять тематические векторы клиентов и объектов даже тогда, когда по ним нет основных данных о предпочтениях  $n_{ui}$ . В качестве дополнительных данных могут также использоваться советы клиентов друг другу. Это попарные взаимодействия между клиентами  $n_{uu'}$  или данные о доверии (trust-aware). Итак, в задаче появляется уже четыре модальности  $U, I, A, B$ , между элементами которых наблюдаются парные взаимодействия. Возможны и тройные взаимодействия, например,  $n_{uib}$  — клиент  $u$  тегировал объект  $i$  свойством  $b$ .

Предпочтения клиентов могут изменяться со временем или зависеть от ситуативного контекста: покупка для себя, для офиса или в подарок; просмотр фильма с друзьями, с подругой или с детьми и т. д. Для учёта такой информации вводятся ещё две модальности: множество ситуаций  $C$  и множество интервалов времени  $J$ . Взаимодействия между ними могут описываться транзакциями из трёх или четырёх термов, например:  $n_{uic}$  — клиент  $u$  выбрал объект  $i$  в ситуации  $c$ ;  $n_{uicj}$  — клиент  $u$  выбрал объект  $i$  в ситуации  $c$  в интервале времени  $j$ . Такие системы называются, соответственно, учитывающими контекст (context-aware) и учитывающими время (time-aware), см. рис. 16.

**Симметризованные гиперграфовые модели** подходят для задач, в которых содержимое контейнеров может изменяться. В текстовых коллекциях документы появляются целиком и в дальнейшем не меняются. Совершенно иная ситуация в ре-

комендательных системах. Транзакция «пользователь  $u$  выбрал товар  $i$ » на первый взгляд аналогична транзакции «документ  $d$  содержит слово  $w$ ». Различие в том, что документ статичен, тогда как у каждого пользователя может расти множество выбранных товаров, а у каждого товара — множество выбравших его пользователей. Кто в таком случае должен играть роль контейнера — товар или пользователь? То и другое неудобно с точки зрения пакетного EM-алгоритма; гораздо естественнее было бы формировать пакеты по времени поступления данных.

Будем считать, что в рёбрах гиперграфа  $x \subset V$  нет никакой выделенной вершины-контейнера. Для генерации ребра сначала порождается тема  $t$  из распределения  $\pi_t = p(t)$ , общего для всей коллекции, затем вершины  $v \in x$  порождаются независимо друг от друга из распределений  $\varphi_{vt} = p(v|t)$  над модальностями  $V_m$ :

$$p(x) = \sum_{t \in T} p(t) \prod_{v \in x} p(v|t) = \sum_{t \in T} \pi_t \prod_{v \in x} \varphi_{vt}.$$

Возможен также вариант, когда тема  $t$  порождается из распределения  $\pi_{kt} = p_k(t)$ , общего для всех транзакций данного типа  $k$ . Мы не будем рассматривать этот случай, поскольку он легко расписывается по аналогии.

Пусть  $E_k$  — наблюдаемая выборка рёбер-транзакций типа  $k$ ,  $n_{kx}$  — число наблюдений ребра  $x$  в выборке  $E_k$ . Выпишем задачу максимизации регуляризованного правдоподобия при обычных ограничениях нормировки и неотрицательности:

$$\begin{aligned} \sum_{k \in K} \tau_k \sum_{x \in E_k} n_{kx} \ln \left( \sum_{t \in T} \pi_t \prod_{v \in x} \varphi_{vt} \right) + R(\Phi, \pi) \rightarrow \max_{\Phi, \pi}; \\ \sum_{v \in V_m} \varphi_{vt} = 1, \varphi_{vt} \geq 0; \quad \sum_{t \in T} \pi_t = 1, \pi_t \geq 0. \end{aligned} \quad (55)$$

**Теорема 10.2.** Пусть функция  $R(\Phi, \pi)$  непрерывно дифференцируема. Точка локального максимума  $(\Phi, \pi)$  задачи (55) удовлетворяет системе уравнений относительно параметров модели  $\varphi_{vt}$ ,  $\pi_t$  и вспомогательных переменных  $p_{tx} = p(t|x)$ , если из решения исключить нулевые столбцы матриц  $\Phi_m$ :

$$p_{tx} = \mathop{\text{norm}}_{t \in T} \left( \pi_t \prod_{v \in x} \varphi_{vt} \right). \quad (56)$$

$$\varphi_{vt} = \mathop{\text{norm}}_{v \in V_m} \left( n_{vt} + \varphi_{vt} \frac{\partial R}{\partial \varphi_{vt}} \right); \quad n_{vt} = \sum_{k \in K} \sum_{x \in E_k} [v \in x] \tau_k n_{kx} p_{tx}; \quad (57)$$

$$\pi_t = \mathop{\text{norm}}_{t \in T} \left( n_t + \pi_t \frac{\partial R}{\partial \pi_t} \right); \quad n_t = \sum_{k \in K} \sum_{x \in E_k} \tau_k n_{kx} p_{tx}. \quad (58)$$

Доказательство, как и в случае предыдущей теоремы, проводится по лемме о максимизации на единичных симплексах.

В BigARTM такая модель непосредственно не реализована, но её нетрудно с хорошей точностью симулировать. Для этого симметризованные транзакции, не имеющие контейнера, собираются в псевдо-контейнеры  $d$  произвольным образом; их счётчики  $n_{td}$  аккумулируются:  $n_t = \sum_d n_{td}$ , и накопленные суммы используются для сильного сглаживания всех столбцов матрицы  $\Theta$  в сторону общего вектора  $(n_t)$ .



**Транзакции с главными и подчинёнными термами.** Предположим, что каждая транзакция состоит из двух непересекающихся подмножеств термов:  $x \sqcup x'$ . Подмножество *главных термов*  $x$  определяет тематику транзакции  $p(t|x, x') = p(t|x)$ , которая затем передаётся подмножеству *подчинённых термов*  $x'$ . Это предположение можно вводить как для симметризованных моделей с транзакциями вида  $e = (x, x')$ , так и для моделей с контейнерными транзакциями  $e = (d, x, x')$ .

Например, к банковской транзакции «покупатель  $b$  купил у продавца  $s$  товар  $g$ » может прилагаться текст платёжного поручения. Он не должен влиять на тематику транзакции, которая определяется экономической деятельностью продавца и покупателя. Термы  $b, s, g$  являются главными, а слова из платёжного поручения — подчинёнными. Просто игнорировать эти тексты не хотелось бы, так как распределения слов  $p(w|t)$  полезны для содержательной интерпретации тем как видов деятельности компаний. Заметим также, что банковские транзакции не являются контейнерными, поскольку контрагенты постоянно осуществляют новые сделки.

Сделаем ещё один шаг в обобщении гиперграфовой тематической модели. Будем полагать, что коллекция  $E$  содержит как контейнерные, так и симметризованные транзакции. Наличие контейнера  $d$  у транзакции будем обозначать условием  $[e = (d, x, x')]$ , а отсутствие контейнера — условием  $[e = (x, x')]$ . Модификация EM-алгоритма объединяет контейнерный вариант (52)–(54) и симметризованный вариант (56)–(58):

$$\begin{aligned}
 p_{te} &= \operatorname{norm}_{t \in T} \left( \left( [e = (d, x, x')] \theta_{td} + [e = (x, x')] \pi_t \right) \prod_{v \in x} \varphi_{vt} \right); \\
 \varphi_{vt} &= \operatorname{norm}_{v \in V_m} \left( n_{vt} + \varphi_{vt} \frac{\partial R}{\partial \varphi_{vt}} \right); & n_{vt} &= \sum_{k \in K} \sum_{e \in E_k} [v \in e] \tau_k n_{ke} p_{te}; \\
 \theta_{td} &= \operatorname{norm}_{t \in T} \left( n_{td} + \theta_{td} \frac{\partial R}{\partial \theta_{td}} \right); & n_{td} &= \sum_{k \in K} \sum_{e \in E_k} [e = (d, x, x')] \tau_k n_{ke} p_{te}; \\
 \pi_t &= \operatorname{norm}_{t \in T} \left( n_t + \pi_t \frac{\partial R}{\partial \pi_t} \right); & n_t &= \sum_{k \in K} \sum_{e \in E_k} [e = (x, x')] \tau_k n_{ke} p_{te}.
 \end{aligned}$$

Основная модификация касается E-шага: если транзакция  $e$  относится к контейнеру  $d$ , то используется распределение  $p(t|d) = \theta_{td}$ , если же она не относится ни к одному контейнеру, то используется распределение  $p(t) = \pi_t$ , общее для всех транзакций. В обоих вариантах в результате получается распределение тем для транзакции  $p(t|e) = p_{te}$ , которое затем используется во всех формулах M-шага.

**Гиперграфовые языковые модели.** Вместо обычной гипотезы «мешка слов» предположим, что текст является «мешком предложений». Порождающая модель состоит из двух уровней. На первом уровне каждое предложение  $x$  документа  $d$  порождается одной темой, выбранной из распределения  $p(t|d)$ . На втором уровне слова  $w$  в предложении  $x$  генерируются из распределения  $p(w|t)$  данной темы. Эти предположения более реалистичны по сравнению с гипотезой «мешка слов» и соответствуют гиперграфовой модели, в которой вершинами являются слова, а рёбрами — предложения.

В качестве транзакций можно брать не только предложения, но и любые словосочетания, фразы, синтагмы, синонимы, и вообще любые группы слов, относительно

которых разумно предполагать, что они порождаются одной общей темой. Более того, транзакции могут даже перекрываться, например, синонимы, меронимы и холонимы могут образовывать один тип транзакций, словосочетания — второй, целые предложения — третий, отдельные слова — четвёртый.

Транзакции с главными и подчинёнными терминами имеют естественную языковую интерпретацию. В роли подчинённых термов могут выступать слова общей лексики или редкие слова. В транзакционной модели с главными и подчинёнными терминами не накладывается никаких ограничений на способ разбиения транзакции  $e = (d, x, x')$ . В частности, можно найти подмножества  $x$  и  $x'$ , вычислив распределения  $p(t|d, w)$  для всех слов предложения, затем определить по ним главные темы предложения и отнести к подчинённым все слова, не относящиеся к главным темам.

## 11 Моделирование зависимостей

Тематическая модель формирует векторное описание документа  $p(t|d)$ , которое может быть использовано для предсказательного моделирования, в частности, для решения задач классификации и регрессии на текстах. Классификация реализуется особенно просто, если классы считать модальностью. Регрессия на текстах показывает пример интересного приёма, когда дополнительные параметры модели (в данном случае коэффициенты линейной модели регрессии) пересчитываются итерационно после каждого прохода коллекции. Очень похожий приём используется и в модели СТМ, которая выявляет парные корреляции между темами. Техника числовых модальностей используется в том случае, когда с текстом связана не одна числовая величина, которую необходимо предсказать, а числовая последовательность, которая моделируется смесью непрерывных вероятностных распределений.

**Классификация.** Тематическая модель классификации Dependency LDA [142] является байесовским аналогом модели (37) с модальностями термов  $W$  и классов  $C$ . Имеется обучающая выборка документов  $d$ , для каждого из которых известно подмножество классов  $C_d \subset C$ . Требуется классифицировать новые документы с неизвестным  $C_d$ . Для этого будем использовать *линейную вероятностную модель классификации*, в которой объектами являются документы  $d$ , признаки соответствуют темам  $t$  и принимают значения  $\theta_{td} = p(t|d)$ :

$$p(c|d) = \sum_{t \in T} \varphi_{ct} \theta_{td}.$$

Документ  $d$  относится к классу  $c$ , если  $p(c|d) \geq \gamma_c$ .

Коэффициенты линейной модели  $\varphi_{ct} = p(c|t)$  и пороги  $\gamma_c$  обучаются по выборке документов с известными  $C_d$ . Признаковое описание нового документа  $\theta_d$  вычисляется тематической моделью только по его термам.

Эксперименты в [142] показали, что тематические модели превосходят обычные методы многоклассовой классификации на больших текстовых коллекциях с большим числом несбалансированных, пересекающихся, взаимозависимых классов. В [162] те же выводы на тех же коллекциях были воспроизведены для мультимодальной ARTM. *Несбалансированность* означает, что классы могут содержать как малое, так и очень большое число документов. В случае *пересекающихся* классов документ

может относиться как к одному классу, так и к большому числу классов. *Взаимозависимые* классы имеют общие термы и темы, поэтому при классификации документа могут вступать в конкуренцию.

*Регуляризация по отрицательным примерам* использует данные о том, что документ  $d$  из обучающей выборки не принадлежит подмножеству классов  $C'_d \subset C$ . В этом случае запишем правдоподобие выборки для задачи бинарной классификации:

$$L(\Phi, \Theta) = \sum_{d \in D} \sum_{c \in C_d} \ln \sum_{t \in T} \varphi_{ct} \theta_{td} + \tau \sum_{d \in D} \sum_{c \in C'_d} \ln \left( 1 - \sum_{t \in T} \varphi_{ct} \theta_{td} \right) \rightarrow \max.$$

Первое слагаемое есть log-правдоподобие модальности классов (37), если положить  $n_{dc} = [c \in C_d]$ . Второе слагаемое можно рассматривать как регуляризатор отрицательных примеров, построенный по данным о не-принадлежности документов классам. Коэффициент регуляризации  $\tau$  можно полагать равным единице.

*Частотная регуляризация* (label regularization) хорошо зарекомендовала себя в задачах с несбалансированными классами [100, 142]. Потребуем, чтобы оценка безусловного распределения классов по коллекции  $p(c) = \sum_t \varphi_{ct} p(t)$  была близка к наблюдаемым частотам классов  $\hat{p}(c) = \frac{1}{|D|} |D_c|$ , где  $D_c = \{d \in D : c \in C_d\}$  — множество документов, относящихся к классу  $c$ . Выразим данное требование с помощью сглаживающего регуляризатора кросс-энтропии, который можно интерпретировать и как максимизацию правдоподобия для модели дискретного распределения классов  $p(c)$ :

$$R(\Phi) = \tau \sum_{c \in C} |D_c| \ln \sum_{t \in T} n_t \varphi_{ct} \rightarrow \max,$$

где  $n_t = \sum_c n_{ct}$  — число термов модальности  $C$ , относящихся к теме  $t$  во всей коллекции. Подставляя этот регуляризатор в (17), получим формулы М-шага:

$$\varphi_{ct} = \operatorname{norm}_{w \in W} \left( n_{ct} + \tau |D_c| \frac{n_t \varphi_{ct}}{\sum_s n_s \varphi_{cs}} \right). \quad (59)$$

Частотная регуляризация использовалась в тематической модели Prior-LDA, которая была предложена в [142] как улучшение модели Flat-LDA.

**Регрессия.** Задачи предсказания числовой величины как функции от текста возникают во многих приложениях электронной коммерции: предсказание рейтинга товара, фильма или книги по тексту отзыва; предсказание числа кликов по тексту рекламного объявления; предсказание зарплаты по описанию вакансии; предсказание полезности (числа лайков) отзыва на отель, ресторан, сервис. Для восстановления числовых функций по конечной обучающей выборке пар «объект–ответ» используются регрессионные модели, однако все они принимают на входе векторные описания объектов. Тематическая модель позволяет заменить текст документа  $d$  его векторным представлением  $\theta_d$ . С другой стороны, критерий оптимизации регрессионной модели можно использовать в качестве регуляризатора, чтобы найти темы, наиболее информативные с точки зрения точности предсказаний [104, 151].

Пусть для каждого документа  $d$  обучающей выборки  $D$  задано целевое значение  $y_d \in \mathbb{R}$ . Рассмотрим *линейную модель регрессии*, которая предсказывает математическое ожидание целевой величины:

$$E(y|d) = \sum_{t \in T} v_t \theta_{td},$$

где  $v \in \mathbb{R}^T$  — вектор коэффициентов. Применим метод наименьших квадратов для обучения вектора  $v$  по выборке документов:

$$R(\Theta, v) = -\tau \sum_{d \in D} \left( y_d - \sum_{t \in T} v_t \theta_{td} \right)^2.$$

Подставляя этот регуляризатор в (18) и приравнявая нулю его производную по  $v$ , получим формулы М-шага:

$$\theta_{td} = \operatorname{argm}_t \left( n_{td} + \tau v_t \theta_{td} \left( y_d - \sum_{s \in T} v_s \theta_{sd} \right) \right);$$

$$v = (\Theta \Theta^T)^{-1} \Theta y.$$

Здесь формула для вектора  $v$  является стандартным решением задачи наименьших квадратов при фиксированной матрице  $\Theta$ . Вектор  $v$  можно обновлять по окончании каждого прохода коллекции, либо после обработки каждого пакета документов в онлайнном EM-алгоритме.

В [151] показано, что качество регрессии может зависеть от инициализации тематической модели, и предложено несколько методов инициализации.

На практике обычно используется более простой подход: сначала строятся тематические признаковые описания документов с помощью модели LDA, затем к этим признакам могут добавляться ещё какие-то числовые признаки текстов, и, наконец, общее признаковое описание используется для решения регрессионной задачи. Недостаток этого подхода в том, что модель LDA ничего не знает о регрессии. Регуляризация ARTM позволяет поочередно улучшать то тематическую модель с учётом регрессии, то регрессионную модель с учётом тематических признаков. В результате две модели приспособляются друг к другу. Векторы тем поворачиваются в пространстве таким образом, чтобы быть максимально полезными в качестве признаков регрессионной модели. Добавление дополнительных нетематических признаков в регрессионную модель в этом случае также не составляет труда.

**Корреляции тем.** *Модель коррелированных тем* CTM (correlated topic model) предназначена для выявления связей между темами [31]. Например, статья по геологии более вероятно связана с археологией, чем с генетикой. Знание о том, какие темы чаще совместно встречаются в документах коллекции, позволяет точнее моделировать тематику отдельных документов в мультидисциплинарных коллекциях.

Для описания корреляций удобно использовать многомерное нормальное распределение. Оно не подходит для описания неотрицательных нормированных вектор-столбцов  $\theta_d$ , но неплохо описывает векторы их логарифмов  $\eta_{td} = \ln \theta_{td}$ . Поэтому в модель вводится многомерное лог-нормальное распределение (logistic normal) с двумя параметрами: вектором математического ожидания  $\mu$  и ковариационной матрицей  $\Sigma$ :

$$p(\eta_d | \mu, \Sigma) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\eta_d - \mu)^\top \Sigma^{-1}(\eta_d - \mu)\right).$$

Изначально модель CTM была разработана в рамках байесовского подхода, где возникали дополнительные технические трудности из-за того, что лог-нормальное распределение не является сопряжённым к мультиномиальному. В рамках ARTM идея CTM формализуется и реализуется намного проще.

Определим регуляризатор как логарифм правдоподобия выборки векторов документов  $\eta_d$  для лог-нормальной модели:

$$R(\Theta, \mu, \Sigma) = \tau \sum_{d \in D} \ln p(\eta_d | \mu, \Sigma) = -\frac{\tau}{2} \sum_{d \in D} (\ln \theta_d - \mu)^\top \Sigma^{-1} (\ln \theta_d - \mu).$$

Согласно (18), формула М-шага для  $\theta_{td}$  принимает вид

$$\theta_{td} = \operatorname{norm}_{t \in T} \left( n_{td} - \tau \sum_{s \in T} \Sigma_{ts}^{-1} (\ln \theta_{sd} - \mu_s) \right), \quad (60)$$

где  $\Sigma_{ts}^{-1}$  — элементы обратной ковариационной матрицы. Параметры  $\Sigma, \mu$  нормального распределения обновляются после каждого прохода коллекции, либо после каждого пакета документов в онлайнном EM-алгоритме:

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{|D|} \sum_{d \in D} \ln \theta_d; \\ \Sigma &= \frac{1}{|D|} \sum_{d \in D} (\ln \theta_d - \mu) (\ln \theta_d - \mu)^\top. \end{aligned}$$

Таким образом, трудоёмкая операция обращения ковариационной матрицы выполняется относительно редко. В [31] использовалась LASSO-регрессия, чтобы получать разреженную ковариационную матрицу. Там же представлены интересные примеры визуализации связей между темами, построенными по коллекции научных публикаций в журнале Science с 1990 г. по 1999 г.

**Числовые модальности.** В задачах регрессии с каждым текстовым документом связана одна числовая величина, которую необходимо прогнозировать. Однако бывают и такие задачи, в которых числовые величины связаны с каждым термом.

Одним из примеров является задача тематического моделирования банковских транзакционных данных. В роли документов здесь выступают компании, терминами в документе являются контрагенты — другие компании, которые заключают с данной компанией сделки по покупке или продаже товаров или услуг. Каждая сделка сопровождается текстом платёжного поручения, который содержит названия товаров или услуг. Эти названия образуют вторую модальность. Покупки и продажи рассматриваются по отдельности, что удваивает число модальностей до четырёх. Темы соответствуют видам экономической деятельности компаний. Благодаря названиям появляется возможность интерпретировать каждую тему с помощью двух списков — товаров, которые компании покупают для осуществления данного вида деятельности, и товаров, которые они продают как результат деятельности [17].

Кроме естественных дискретных модальностей контрагентов и названий, в данной задаче имеются ещё и числовые данные об объёмах сделок, которые могут нести косвенную информацию о виде деятельности. Будем полагать, что с каждым документом  $d$  связано несколько числовых последовательностей  $\{y_{dmi} | i = 1, \dots, k_{dm}\}$ , соответствующих *числовым модальностям*  $m \in \tilde{M}$ . В нашем случае числовых модальностей две — это объёмы сделок покупки и продажи. Предположим, что каждая

тема  $t$  порождает значения  $y_{dmi}$  из распределения  $p(y|t; \gamma_{tm})$  с вектором параметров  $\gamma_{tm}$ , которое не зависит от документа (это обычная для тематического моделирования гипотеза условной независимости). Тогда распределение значений  $y$  модальности  $m$  в документе  $d$  описывается смесью распределений:

$$p(y|d, m) = \sum_{t \in T} p(y|t; \gamma_{tm}) \theta_{td}.$$

Возьмём за основу мультимодальную модель (38) с произвольным непрерывно дифференцируемым регуляризатором  $R(\Phi, \Theta)$ . Добавим регуляризатор числовых модальностей, определив его как взвешенную сумму логарифмов правдоподобия выборов  $\{y_{dmi}\}$  с весами  $\tilde{\tau}_m$ :

$$\tilde{R}(\Theta, \Gamma) = \sum_{m \in \tilde{M}} \tilde{\tau}_m \sum_{d \in D} \sum_{i=1}^{k_{dm}} \ln \sum_{t \in T} p(y_{dmi}|t; \gamma_{tm}) \theta_{td}.$$

Тогда система уравнений в теореме 9.1 преобразуется следующим образом: формулы E-шага (40) и M-шага по  $\Phi$  (41) остаются в силе; к ним добавляются формулы E-шага и M-шага для числовых модальностей и изменяется формула M-шага по  $\Theta$ :

$$\begin{aligned} p_{tdmi} &= p(t|d, y_{dmi}) = \operatorname{norm}_{t \in T} (p(y_{dmi}|t; \gamma_{tm}) \theta_{td}); \\ \gamma_{tm} &= \arg \max_{\gamma \in \Gamma} \sum_{d \in D} \sum_{i=1}^{k_{dm}} p_{tdmi} \ln p(y_{dmi}|t; \gamma_{tm}); \\ \theta_{td} &= \operatorname{norm}_{t \in T} \left( \sum_{m \in M} \sum_{w \in W^m} \tau_m n_{dw} p_{tdw} + \sum_{m \in \tilde{M}} \sum_{i=1}^{k_{dm}} \tilde{\tau}_m p_{tdmi} + \theta_{td} \frac{\partial R}{\partial \theta_{td}} \right). \end{aligned}$$

Подход на основе мультимодальной модели имеет один существенный изъян — он пренебрегает транзакционной природой данных. Каждый документ (компания) представляется «мешком названий», «мешком контрагентов», и «мешком объёмов». Однако в каждой транзакции название, контрагент и объём сделки неразрывно связаны друг с другом и порождаются общей темой (видом деятельности). Информация об этих связях игнорируется в мультимодальной модели.

Поэтому рассмотрим введение числовой модальности в гиперграфовой тематической модели, описанной в разделе 10. Каждая транзакция компании  $d$  представляет собой четвёрку  $(d, m, x, y)$ , где  $m \in \tilde{M}$  — одна из двух числовых модальностей «объём покупки» или «объём продажи»,  $x \subset V$  — подмножество термов,  $V$  — множество вершин гиперграфа, полученное объединением словарей  $W^m$  всех нечисловых модальностей  $m \in M$ . Если компания  $d$  совершает сделку покупки, то термами в  $x$  будут компания-продавец и названия товаров, которые  $d$  у неё покупает. Если компания  $d$  совершает сделку продажи, то термами в  $x$  будут компания-покупатель и названия товаров, которые  $d$  ей продаёт. В обоих типах транзакций значение  $y$  равно объёму сделки. Тематическая модель транзакции имеет вид

$$p(x, y|d, m) = \sum_{t \in T} \theta_{td} p(y|t; \gamma_{tm}) \prod_{v \in x} \varphi_{vt}.$$

Соответственно модифицируется задача (51) максимизации log-правдоподобия транзакционных данных  $X = \{(d_i, m_i, x_i, y_i) : i = 1, \dots, n\}$  для построения гиперграфовой тематической модели:

$$\sum_{(d,m,x,y) \in X} \ln \left( \sum_{t \in T} \theta_{td} p(y|t; \gamma_{tm}) \prod_{v \in x} \varphi_{vt} \right) + R(\Phi, \Theta) \rightarrow \max_{\Phi, \Theta, \Gamma} \quad (61)$$

**Теорема 11.1.** Пусть функция  $R(\Phi, \Theta)$  непрерывно дифференцируема. Точка локального максимума  $(\Phi, \Theta, \Gamma)$  задачи (61) удовлетворяет системе уравнений относительно параметров  $\varphi_{vt}$ ,  $\theta_{td}$ ,  $\gamma_{tm}$  и вспомогательных переменных  $p_{ti} = p(t | d_i, m_i, x_i, y_i)$ , если из решения исключить нулевые столбцы матриц  $\Phi_m$ ,  $\Theta$ :

$$\begin{aligned} p_{ti} &= \operatorname{norm}_{t \in T} \left( \theta_{td_i} p(y_i | t; \gamma_{tm_i}) \prod_{v \in x_i} \varphi_{vt} \right); \\ \varphi_{vt} &= \operatorname{norm}_{v \in V_m} \left( n_{vt} + \varphi_{vt} \frac{\partial R}{\partial \varphi_{vt}} \right); & n_{vt} &= \sum_{i=1}^n [v \in x_i] p_{ti}; \\ \theta_{td} &= \operatorname{norm}_{t \in T} \left( n_{td} + \theta_{td} \frac{\partial R}{\partial \theta_{td}} \right); & n_{td} &= \sum_{i=1}^n [d = d_i] p_{ti}; \\ \gamma_{tm} &= \arg \max_{\gamma \in \Gamma} \sum_{i=1}^n [m = m_i] p_{ti} \ln p(y_i | t; \gamma_{tm}). \end{aligned}$$

Интересно, что в обеих моделях, мультимодальной и гиперграфовой, нам удалось избежать конкретизации вида распределения  $p(y|t; \gamma)$  до самого последнего момента. И теперь мы понимаем, каким образом в EM-алгоритм можно встроить любое предположение о виде этих распределений. Для этого достаточно уметь решать задачу максимизации взвешенного логарифма правдоподобия по  $\gamma \in \Gamma$ . Каждый элемент выборки, то есть каждая транзакция, имеет свой вес  $p_{ti}$ , вычисленный на E-шаге.

Это стандартная задача. Пусть для определённости  $p(y|t; \gamma_{tm}) = \mathcal{N}(y; \mu_{tm}, \sigma_{tm}^2)$  — многомерное нормальное распределение с математическим ожиданием  $\mu_{tm}$  и дисперсией  $\sigma_{tm}^2$ . Тогда задача M-шага относительно параметров  $\gamma_{tm} = (\mu_{tm}, \sigma_{tm}^2)$  решается аналитически:

$$\mu_{tm} = \frac{\sum_{i=1}^n [m = m_i] p_{ti} y_i}{\sum_{i=1}^n [m = m_i] p_{ti}}, \quad \sigma_{tm}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n [m = m_i] p_{ti} (y_i - \mu_{tm})^2}{\sum_{i=1}^n [m = m_i] p_{ti}}.$$

Для мультимодальной модели формулы те же, с точностью до замены  $p_{ti}$  на  $p_{tdmi}$ . В обоих случаях суммирование производится по всем транзакциям в коллекции.

## 12 Моделирование связей между документами

Существует масса задач, в которых документы сгруппированы или связаны между собой, причём наличие взаимосвязи говорит о том, что документы имеют схожую тематику. Природа связей может быть различной: ссылки, гиперссылки, цитирование, совместное упоминание, комментирование, общие авторы, общие источники, близкие геолокации, и так далее. Предположение о сходстве тематики в парах документов легко формализуется с помощью регуляризатора матрицы  $\Theta$ . Это может создавать технические трудности при обработке больших коллекций. В таких случаях ссылки можно переводить в модальность и переходить к регуляризатору  $\Phi$ .

**Ссылки и цитирование.** Предположим, что если между документами  $c$  и  $d$  имеется связь, то они имеют схожие тематики  $p(t|c)$  и  $p(t|d)$ . Формализуем это предположение с помощью регуляризатора:

$$R(\Theta) = \tau \sum_{d,c} n_{dc} \sum_{t \in T} \theta_{td} \theta_{tc},$$

где  $n_{dc}$  — вес связи между документами, например, число ссылок из  $d$  на  $c$ . В [54] предложена похожая модель LDA-JS, в которой вместо максимизации ковариации минимизируется дивергенция Йенсена-Шеннона между распределениями  $\theta_d$  и  $\theta_c$ . Формула М-шага для  $\theta_{td}$ , согласно (18), имеет вид

$$\theta_{td} = \operatorname{norm}_{t \in T} \left( n_{td} + \tau \theta_{td} \sum_{c \in D} n_{dc} \theta_{tc} \right).$$

Это ещё одна разновидность сглаживания. Вероятности  $\theta_{td}$  в ходе итераций приближаются к вероятностям  $\theta_{tc}$  документов, связанных с  $d$ .

Регуляризатор матрицы  $\Theta$  становится неэффективным при пакетной обработке больших коллекций, когда документы  $c$ , на которые ссылается данный документ  $d$ , находятся в других пакетах. Проблема решается введением модальности документов, на которые есть ссылки из других документов. Этот способ порождает новую проблему: если мощность этой модальности окажется равной числу документов, то матрица  $\Phi$  может не поместиться в оперативную память. Можно сократить эту модальность, оставив только наиболее влиятельные документы  $c$ , число ссылок на которые  $n_c = \sum_d n_{dc}$  превышает выбранный порог.

Данная идея пришла из модели влияния научных публикаций LDA-post [54]. В ней используются две модальности: слова  $W^1$  и цитируемые документы  $W^2 \subseteq D$ . Модель выявляет наиболее влиятельные документы внутри каждой темы. Ненулевые элементы в строке  $c$  матрицы  $\Phi_2$  показывают, на какие темы повлиял документ  $c \in W^2$ . Также модель позволяет различать, какие из ссылок существенно повлияли на научную статью, а какие являются второстепенными, чисто формальными или «данью вежливости». Считается, что документ  $c$  повлиял на документ  $d$ , если  $d$  ссылается на  $c$  и они имеют значительную долю общей тематики.

**Геолокации.** Информация о географическом положении часто используется при анализе данных социальных сетей. Географическая привязка документа  $d$  или его автора задаётся либо *геотегами* (названиями страны, региона, населённого пункта), либо *геолокацией* — парой географических координат  $\ell_d = (x_d, y_d)$ . В первом случае вводится модальность геотегов, во втором случае используется регуляризатор. ARTM позволяет совмещать в модели оба типа географических данных.

Целью моделирования может быть выделение региональных тем, определение «ареала обитания» каждой темы, поиск похожих тем в других регионах. Например, в качестве одной из иллюстраций в [190] определяются регионы популярности национальной кухни по постам пользователей Flickr. Другая иллюстрация из [105] показывает, что тематическая модель, учитывающая, из какого штата США пришло сообщение, точнее прослеживает путь урагана «Катрина».



Квадратичный регуляризатор матрицы  $\Theta$ , предложенный в [190], формализует предположение, что документы со схожими геолокациями имеют схожую тематику:

$$R(\Theta) = -\frac{\tau}{2} \sum_{(c,d)} w_{cd} \sum_{t \in T} (\theta_{td} - \theta_{tc})^2,$$

где  $w_{cd}$  — вес пары документов  $(c, d)$ , выражающий близость геолокаций. Например,  $w_{cd} = \exp(-\gamma r_{cd}^2)$ , где  $r_{cd}^2 = (x_c - x_d)^2 + (y_c - y_d)^2$  — квадрат евклидова расстояния.

Этот регуляризатор требует при обработке каждого документа  $d$  доступа к векторам  $\theta_c$  других документов, что затрудняет пакетную обработку больших коллекций. Альтернативный способ сглаживания основан на регуляризации матрицы  $\Phi$ .

Пусть  $G$  — модальность геотегов,  $\varphi_{gt} = p(g|t)$ . Тематика геотега  $g$  выражается по формуле Байеса:  $p(t|g) = \varphi_{gt} \frac{n_t}{n_g}$ , где  $n_g$  — частота геотега  $g$  в исходных данных,  $n_t = \sum_g n_{gt}$  — частота темы  $t$  в модальности геотегов, вычисляемая EM-алгоритмом.

Квадратичный регуляризатор матрицы  $\Phi$  по модальности геотегов формализует предположение, что географически близкие геотеги имеют схожую тематику:

$$R(\Phi) = -\frac{\tau}{2} \sum_{g,g' \in G} w_{gg'} \sum_{t \in T} n_t^2 \left( \frac{\varphi_{gt}}{n_g} - \frac{\varphi_{g't}}{n_{g'}} \right)^2,$$

где  $w_{gg'}$  — вес пары геотегов  $(g, g')$ , выражающий их географическую близость. Ниже мы рассмотрим обобщение этого регуляризатора на более широкий класс задач.

**Графы и социальные сети.** В [105] предложена более общая тематическая модель NetPLSA, учитывающая произвольные графовые (сетевые) структуры на множестве документов. Пусть задан граф  $\langle V, E \rangle$  с множеством вершин  $V$  и множеством рёбер  $E$ . Каждой его вершине  $v \in V$  соответствует подмножество документов  $D_v \subset D$ . Например, в роли  $D_v$  может выступать отдельный документ, все статьи одного автора  $v$ , все посты из одного географического региона  $v$ , и т. д.

Тематика каждой вершины  $v \in V$  выражается через параметры модели  $\Theta$ :

$$p(t|v) = \sum_{d \in D_v} p(t|d) p(d|v) = \frac{1}{|D_v|} \sum_{d \in D_v} \theta_{td}.$$

В модели NetPLSA используется квадратичный регуляризатор:

$$R(\Theta) = -\frac{\tau}{2} \sum_{(u,v) \in E} w_{uv} \sum_{t \in T} (p(t|v) - p(t|u))^2,$$

где веса  $w_{uv}$  рёбер графа  $(u, v)$  задаются естественным образом, когда в задаче есть соответствующая дополнительная информация. Например, если  $D_v$  — все статьи автора  $v$ , то в качестве веса ребра  $w_{uv}$  естественно взять число статей, написанных авторами  $u$  и  $v$  в соавторстве. Если подобной информации нет, то вес полагается равным единице.

Этот регуляризатор требует при обработке каждого документа  $d$  доступа к векторам  $\theta_c$  других документов, что затрудняет эффективную пакетную обработку больших коллекций. Альтернативный путь состоит в том, чтобы множество вершин графа  $V$  объявить модальностью и перейти к регуляризации матрицы  $\Phi$ .

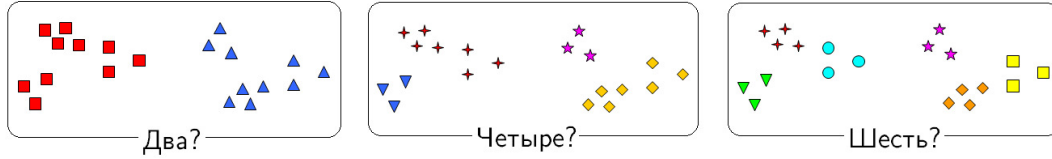


Рис. 17: Выбор числа кластеров в задачах кластеризации принципиально неоднозначен, как и выбор числа тем в задачах тематического моделирования.

В каждый документ  $d \in D_v$  добавим терм  $v$  модальности  $V$ . Выразим тематику вершины  $v$  через параметры  $\Phi$  по формуле Байеса:  $p(t|v) = p(v|t) \frac{p(t)}{p(v)} = \varphi_{vt} \frac{n_t}{|D_v|}$ , где  $n_t = \sum_v n_{vt}$  — частота темы  $t$  в модальности  $V$ , вычисляемая EM-алгоритмом.

Регуляризатор NetPLSA сохраняет прежний вид, но становится функцией от  $\Phi$ :

$$R(\Phi) = -\frac{\tau}{2} \sum_{(u,v) \in E} w_{uv} \sum_{t \in T} n_t^2 \left( \frac{\varphi_{vt}}{|D_v|} - \frac{\varphi_{ut}}{|D_u|} \right)^2. \quad (62)$$

Во многих приложениях важны направленности связей, которые квадратичный регуляризатор не учитывает. Например, связь  $(u, v)$  может означать ссылку из документа  $u$  на документ  $v$ . В модели iTopicModel [153] предполагается, что если  $(u, v) \in E$ , то тематика  $p(t|u)$  шире тематики  $p(t|v)$ . Поэтому минимизируется сумма дивергенций  $\text{KL}(p(t|v) \| p(t|u))$ , причём условные распределения  $p(t|v)$  можно выразить как через  $\Theta$ , так и через  $\Phi$ :

$$R(\Theta \text{ или } \Phi) = \frac{\tau}{2} \sum_{(u,v) \in E} w_{uv} \sum_{t \in T} p(t|v) \ln p(t|u).$$

Как показали эксперименты<sup>3</sup>, регуляризация матрицы  $\Phi$  приводит практически к тем же результатам, что и регуляризация  $\Theta$  для моделей NetPLSA и iTopicModels.

## 13 Моделирование иерархий и выбор числа тем

Существует ли в реальных текстовых коллекциях «истинное» или «оптимальное» число тем? С одной стороны, число тем, о которых могут писать люди, ограничено. С другой стороны, в каждой теме имеется конечное число аспектов, и в каждом тексте авторы затрагивают лишь часть из них. Часто встречающиеся сочетания аспектов можно рассматривать и как отдельные темы, и как проявление общей темы. Кроме того, внутри любой темы могут существовать размытые кластерные структуры, для более чёткого определения которых может просто не хватать данных. Аналогичная проблема с неоднозначным выбором числа кластеров возникает и в задачах кластеризации, рис. 17.

Стоит ли разбивать темы на более мелкие подтемы, и как определить общее число тем — эти вопросы возникают в каждой практической задаче тематического моделирования. Зачастую выбор оказывается произвольным и субъективным.

<sup>3</sup>Булатов В. Г. Использование графовой структуры в тематическом моделировании. Магистерская диссертация, МФТИ, 2016.

<http://www.MachineLearning.ru/wiki/images/4/4d/Bulatov-2016-ms.pdf>

Чем больше коллекция, тем более мелкие семантические различия между темами возможно уловить. Однако даже при применении, казалось бы, строгих, статистических критериев для выявления значимых различий между темами, возникает произвол при выборе уровня значимости. Выбор этого порогового значения также является эвристикой, и от него зависит итоговое число тем. Все известные методы, претендующие на объективность определения числа тем, так или иначе содержат внутри себя параметр, от которого это самое число тем зависит.

Эти соображения приводят к идее, что вместо поиска оптимального числа тем (которого может просто не существовать), имеет смысл строить иерархические тематические модели, в которых темы последовательно дробятся на подтемы, а уровень детальности (или *гранулированности*) тематического представления выбирается исходя из потребностей прикладной задачи.

**Определение числа тем по внешним критериям.** Единственным беспроигрышным вариантом определения оптимального числа тем является использование внешнего критерия. Такой подход используется, когда конечной целью (или одной из целей) тематического моделирования является решение задачи классификации [142], информационного поиска [71] или сегментации [139] текстов. Недостаточное число тем может приводить к снижению выразительных способностей модели и качества решения целевой задачи. Избыточное число тем может приводить к переобучению и снижению качества на независимых тестовых данных. Поэтому на практике число тем варьируют по заданной сетке значений, как правило весьма грубой, и определяют минимальное число тем, при котором задача решается с приемлемым качеством по одному или нескольким критериям. Типичным методом анализа является построение графика зависимости внешнего критерия от числа тем.

**Энтропийное разреживание для отбора тем** предложено в [164] для удаления незначимых тем из тематической модели. Идея заключается в разреживании распределения  $p(t)$ , которое выражается через параметры  $\theta_{td}$ :

$$R(\Theta) = -\tau n \sum_{t \in T} \frac{1}{|T|} \ln p(t), \quad p(t) = \sum_d p(d) \theta_{td}.$$

Подставим этот регуляризатор в формулу М-шага (18):

$$\theta_{td} = \operatorname{norm}_{t \in T} \left( n_{td} - \tau \frac{n}{|T|} \frac{p(d)}{p(t)} \theta_{td} \right).$$

Заменим  $\theta_{td}$  в правой части равенства несмещённой оценкой  $\frac{n_{td}}{n_d}$ :

$$\theta_{td} = \operatorname{norm}_{t \in T} \left( n_{td} \left( 1 - \tau \frac{n}{n_t |T|} \right) \right). \quad (63)$$

Этот регуляризатор разреживает целиком строки матрицы  $\Theta$ . Если значение счётчика  $n_t$  в знаменателе достаточно мало, то все элементы  $t$ -й строки оказываются равными нулю, и тема  $t$  полностью исключается из модели. При использовании данного регуляризатора сначала устанавливается заведомо избыточное число тем  $|T|$ . В ходе итераций число нулевых строк матрицы  $\Theta$  постепенное увеличивается.

Отбор тем в ARTM намного проще непараметрических байесовских моделей — иерархического процесса Дирихле (hierarchical Dirichlet process, HDP) [156] или процесса китайского ресторана (Chinese restaurant process, CRP) [34].

В обоих подходах, ARTM и HDP, имеется управляющий параметр, выбирая который, можно получать модели с числом тем, различающимся на порядки (в ARTM это коэффициент регуляризации  $\tau$ , в HDP — коэффициент концентрации  $\gamma$ ).

В [166] были проведены эксперименты на полусинтетических данных, представляющих собой смесь двух распределений  $p(w|d)$  — реальной коллекции, для которой число тем неизвестно, и синтетической коллекции с заданным числом тем. Синтетическая коллекция строилась путём перемножения матриц  $\Phi\Theta$ , полученных в результате тематического моделирования той же реальной коллекции. Оказалось, что HDP и ARTM способны определять истинное число тем на синтетических и полусинтетических данных. ARTM определяет его точнее и устойчивее. Однако чем ближе полусинтетические данные к реальным, тем менее чётко различим диапазон значений гиперпараметров  $\tau$  или  $\gamma$ , на котором восстанавливается правильное число тем. На реальных данных он неразличим вовсе, причём для обоих подходов. Таким образом, про оба подхода нельзя сказать, что они определяют оптимальное число тем.

По скорости вычислений BigARTM с регуляризатором отбора тем оказался в 100 раз быстрее свободно доступной реализации HDP.

В ходе экспериментов [166] также выяснилось, что регуляризатор отбора тем имеет полезный сопутствующий эффект: он удаляет из модели дублирующие, расщеплённые и линейно зависимые темы. Теоретическое обоснование этого факта остаётся открытой проблемой, доказать его пока не удалось.

**Иерархическое тематическое моделирование.** Иерархические тематические модели рекурсивно делят темы на подтемы. Тематические иерархии служат для построения рубрикаторов, систематизации больших объёмов текстовой информации, информационного поиска и навигации по большим мультидисциплинарным коллекциям. Задача автоматической рубрикации текстов сложна своей неоднозначностью и субъективностью. Различия во мнениях экспертов относительно рубрикации документов могут достигать 40% [1]. Несмотря на обилие работ по иерархическим тематическим моделям [33, 93, 111, 191, 135, 175, 176, 177, 178], оптимизация размера и структуры иерархии остаётся открытой проблемой; более того, оценивание качества иерархий — также открытая проблема [191].

Стратегии построения тематических иерархий весьма разнообразны: нисходящие (дивизимные) и восходящие (агломеративные), представляющие иерархию деревом или многодольным графом, наращивающие граф по уровням или по вершинам, основанные на кластеризации документов или термов. Нельзя назвать какую-то из стратегий предпочтительной; у каждой есть свои достоинства и недостатки.

**Вероятностная модель межуровневых связей.** В [45] предложена нисходящая стратегия на основе ARTM. Иерархия представляется многодольным графом с фиксированным числом уровней и заданным числом тем на каждом уровне, возрастающим по уровням сверху вниз. Каждый уровень представляет собой обычную «плоскую» тематическую модель, поэтому время построения модели остаётся линейным по объёму коллекции.

Для моделирования связей между уровнями в модель вводятся параметры  $\psi_{st} = p(s|t)$  — условные вероятности подтем  $s$  в темах  $t$ . В мультидисциплинарных коллекция подтемы могут иметь по несколько родительских тем. Например, тема «биоинформатика» имеет в качестве родительских «биологию» и «информатику», а «бустинг решающих деревьев» — «бустинг» и «решающие деревья». Поэтому представление иерархии многодольным графом предпочтительнее, чем деревом.

На верхнем уровне иерархии строится обычная плоская тематическая модель. Пусть модель  $\ell$ -го уровня с множеством тем  $T$  уже построена, и требуется построить модель уровня  $\ell+1$  с множеством дочерних тем  $S$  (subtopics) и бóльшим числом тем,  $|S| > |T|$ . Потребуем, чтобы родительские темы  $t$  хорошо приближались вероятностными смесями дочерних тем  $s$ :

$$\sum_{t \in T} n_t \text{KL}_w \left( p(w|t) \parallel \sum_{s \in S} p(w|s) p(s|t) \right) = \sum_{t \in T} n_t \text{KL}_w \left( \frac{n_{wt}}{n_t} \parallel \sum_{s \in S} \varphi_{ws} \psi_{st} \right) \rightarrow \min_{\Phi, \Psi},$$

где  $\Psi = (\psi_{st})_{S \times T}$  — матрица связей, которая становится дополнительной матрицей параметров для тематической модели дочернего уровня.

Это задача матричного разложения для матрицы родительского уровня  $\Phi^\ell = \Phi \Psi$ . Обычно матричные разложения используются, чтобы приблизить матрицу высокого ранга произведением матриц более низкого ранга. Однако в данном случае, наоборот, матрица  $\Phi^\ell$  низкого ранга  $|T|$  приближается произведением матриц  $\Phi \Psi$ , в котором матрица  $\Phi$  должна иметь полный ранг  $|S|$ , чтобы дочерняя модель описывала коллекцию точнее, чем родительская. Регуляризатор связывает тематические модели соседних уровней  $\ell$  и  $\ell+1$  так, чтобы родительские темы  $\varphi_t^\ell$  аппроксимировались линейными комбинациями дочерних тем  $\varphi_s$  с коэффициентами  $\psi_{st}$ :

$$R(\Phi, \Psi) = \tau \sum_{t \in T} \sum_{w \in W} n_{wt} \ln \sum_{s \in S} \varphi_{ws} \psi_{st}. \quad (64)$$

Задача максимизации  $R(\Phi, \Psi)$  с точностью до обозначений совпадает с основной задачей тематического моделирования (13), если считать родительские темы  $t$  псевдодокументами с частотами термов  $n_{wt} = n_t \varphi_{wt}$ . Это означает, что вместо модификации формул М-шага данный регуляризатор можно реализовать проще. Достаточно, построив родительский уровень из  $|T|$  тем, добавить в коллекцию  $|T|$  псевдодокументов с частотами термов  $n_{wt}$ . Матрица  $\Psi$  получится в столбцах матрицы  $\Theta$ , соответствующих псевдодокументам, как показано на рис. 18.

Данный подход к моделированию иерархий реализован в библиотеке BigARTM.

Альтернативный подход к моделированию межуровневых связей, также предложенный в [45], заключается в том, чтобы приближать родительские темы как распределения  $p(t|d)$  вероятностными смесями дочерних тем  $\sum_{s \in S} p(t|s)p(s|d)$ . В результате получается регуляризатор матрицы  $\Theta$  для дочернего уровня, эквивалентный введению множества родительских темы  $T$  как модальности с частотами термов  $n_{td}$ . Эксперименты показали, что данный подход хуже приближает родительскую матрицу  $\Phi^\ell$ . Кроме того, добавление модальности в каждый документ труднее реализовать, чем добавление псевдодокументов в коллекцию. Данный подход был признан неудачным и не был реализован в BigARTM.

**Разреживание межуровневых связей** формализует естественное предположение, что каждая тема дочернего уровня  $s \in S$  имеет небольшое число связей с темами

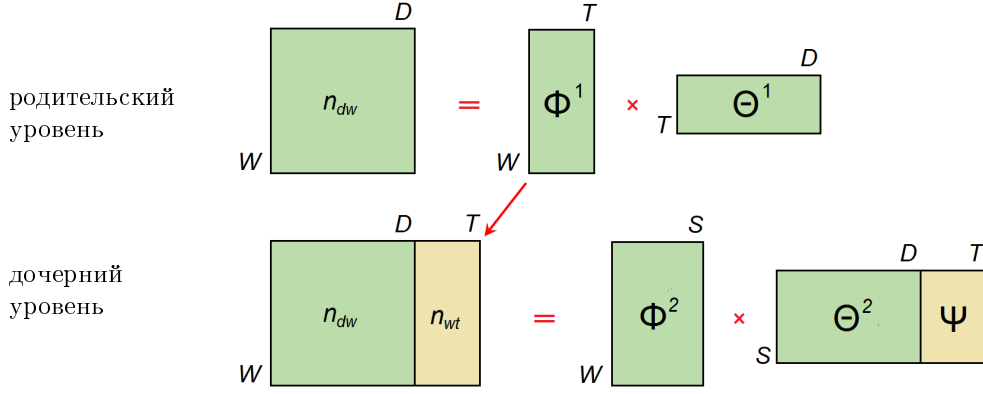


Рис. 18: Добавление второго уровня иерархии с множеством подтем  $S$  реализуется путём добавления в исходную коллекцию  $|T|$  псевдодокументов с частотами термов  $n_{wt}$ . Матрица связей тем с подтемами  $\Psi = (p(s|t))$  образуется в столбцах матрицы  $\Theta$ , соответствующих псевдодокументам.

родительского уровня  $t \in T$ . В частности, если все распределения  $p(t|s)$  вырождены, то есть каждая тема  $s$  имеет только одну родительскую тему  $t$ , то вся иерархия приобретает вид дерева. Применим кросс-энтропийный регуляризатор для разреживания распределений  $p(t|s)$ , выразив их через  $\psi_{st}$  по формуле Байеса:

$$R(\Psi) = -\tau \sum_{s \in S} \sum_{t \in T} \frac{1}{|T|} \ln p(t|s) = -\frac{\tau}{|T|} \sum_{t \in T} \sum_{s \in S} \ln \frac{\psi_{st} n_t}{\sum_z \psi_{sz} n_z}.$$

Поскольку матрица  $\Psi$  является частью матрицы  $\Theta$ , к ней применима формула (18), из которой следует формула М-шага для модели дочернего уровня:

$$\psi_{st} = \operatorname{norm}_{s \in S} \left( n_{st} + \tau \left( p(t|s) - \frac{1}{|T|} \right) \right). \quad (65)$$

Согласно этой формуле, условные вероятности  $p(t|s)$ , меньшие  $\frac{1}{|T|}$ , становятся ещё меньше, и при достаточно большом  $\tau$  обнуляются [45].

При разреживании распределений  $p(s|t) = \frac{n_{st}}{n_t}$  важно, чтобы векторы  $p(t|s) = \frac{n_{st}}{n_s}$  оставались распределениями, то есть чтобы у каждой подтемы  $s$  оставалась хотя бы одна родительская тема. На дочернем уровне  $S$  не должно образоваться ни одной *темы-сироты*  $s$ , которая совсем не имела бы родительских тем  $t$ .

**Спектр тем и визуализация иерархий.** Тематические иерархии строятся в значительной степени для того, чтобы показывать их пользователям. До сих пор мы говорили о темах как о неупорядоченном множестве  $T$ . Однако просматривать список тем гораздо удобнее, если они ранжированы по семантической близости. Группирование тем по смыслу помогает пользователю быстрее находить темы и акцентировать внимание на различиях между близкими темами. Это важно и для обычных «плоских» тематических моделей, и, тем более, для иерархических.

*Спектром тем* будем называть упорядоченный список тем  $t_1, \dots, t_{|T|}$ , в котором сумма расстояний между соседними темами минимальна:

$$\sum_{i=2}^{|T|} \rho(t_i, t_{i-1}) \rightarrow \min,$$

1. остров, земля, период, там, территория, океан, где, более, вид, найти, вулкан, находится, южный
2. растение, ялония, раса, при, более, чем, например, исследование, вид, страна, население
3. вид, эволюция, самец, мозг, самка, животное, отбор, ген, более, птица, наш, между, чтобы, чем, друг
4. мозг, нейрон, при, заболевание, наш, пациент, состояние, система, болезнь, сон, исследование
5. клетка, музей, стволовой, ткань, организм, чтобы, опухоль, система, использовать, технология
6. клетка, ген, днк, организм, молекула, геном, белок, белка, бактерия, система, процесс, жизнь
7. система, материал, задача, структура, метод, компьютер, дать, при, химический, область, химия
8. квантовый, свет, волна, атом, информация, фотон, сигнал, использовать, два, при, частота, состояние
9. частица, энергия, кварк, взаимодействие, магнитный, электрон, масса, физика, бозон, протон, модель
10. звезда, галактика, земля, планета, вселенная, дыра, чёрный, объект, солнце, масса, наш, система
11. теория, пространство, вселенная, закон, физика, математический, уравнение, число, два, мир, система
12. наш, сеть, информация, дать, объект, культура, задача, например, образ, память, слово, разный
13. язык, слово, русский, например, говорить, словарь, речь, разный, языковой, текст, два, лингвист
14. наука, учёный, научный, потому, чтобы, лекция, хороший, университет, сейчас, наш, заниматься
15. экономический, экономика, страна, чтобы, более, рынок, компания, цена, решение, деньги, работа, чем
16. страна, война, государство, политический, россия, советский, власть, политика, германия, стать
17. ребёнок, женщина, мужчина, жизнь, культура, общество, себя, семья, социальный, советский, женский
18. город, пространство, социальный, городской, общество, место, культурный, жизнь, более, современный
19. исследование, социальный, поведение, группа, решение, and, the, теория, проблема, наука
20. социальный, социология, мир, теория, объект, социологический, действие, событие, социолог, наука
21. политический, философия, идея, наука, свобода, понятие, революция, история, философ, век, себя
22. право, власть, закон, король, век, римский, бог, себя, церковь, правовой, политический, суд, два
23. век, история, русский, исторический, имя, традиция, христианский, культура, историк, текст, уже
24. себя, искусство, литература, говорить, потому, мир, сам, миф, жизнь, слово, текст, роман, век
25. книга, фильм, автор, кино, course, put, читатель, посвятить, тема, история, исследование, работа

Рис. 19: Пример плоского тематического спектра из 25 тем, построенного по коллекции публикаций научно-просветительского ресурса postnauka.ru на 2017 г.

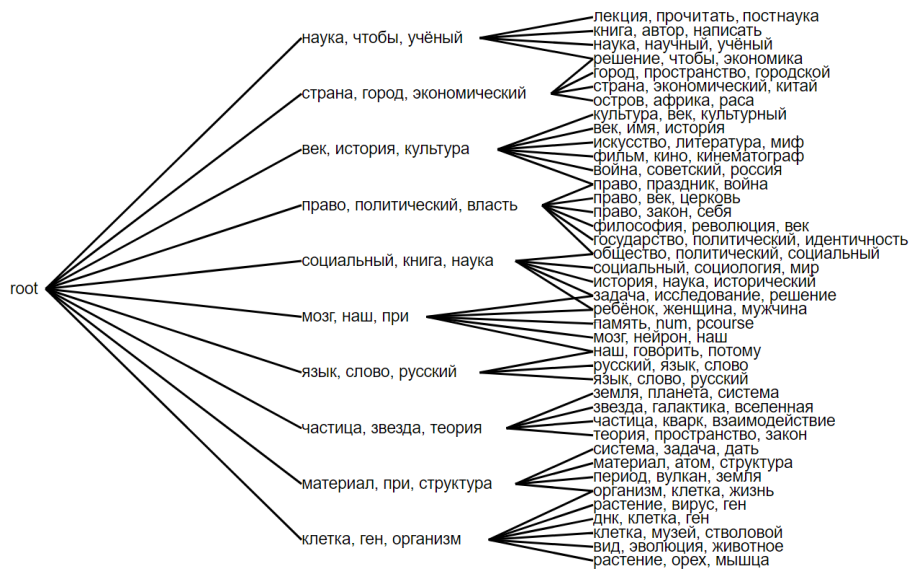


Рис. 20: Пример иерархического тематического спектра из 10 и 40 тем, построенного по коллекции публикаций научно-просветительского ресурса postnauka.ru на 2017 г.

где  $\rho(t, t')$  — функция расстояния между темами как столбцами матрицы  $\Phi$ . Например, может быть взято косинусное расстояние (90), расстояние Хеллингера (91) или расстояние Жаккара между семантическими ядрами тем (92). Это задача комбинаторной оптимизации, эквивалентная задаче коммивояжера<sup>4</sup>. Для её решения может быть использован, в частности, алгоритм Лина–Кернигана в реализации Хельсгауна [66], имеющий вычислительную сложность  $|T|^{2.2}$ .

В тематическом спектре семантически близкие темы оказываются рядом, как показано на рис. 19. При построении иерархического спектра учитываются все уровни, чтобы минимизировать число пересечений в графе связей, см. рис. 20.

<sup>4</sup>Федоряка Д. С. Технология интерактивной визуализации тематических моделей. Бакалаврская диссертация, МФТИ, 2017 ([www.MachineLearning.ru/wiki/images/d/d8/Fedoriaka17bsc.pdf](http://www.MachineLearning.ru/wiki/images/d/d8/Fedoriaka17bsc.pdf)).

## 14 Моделирование сочетаемости слов

Гипотеза «мешка слов» является одним из самых критикуемых постулатов тематического моделирования. Она полностью игнорирует фундаментальное свойство *сочетаемости слов* (word co-occurrence) в естественном языке. Сочетаемость бывает двух видов: *контактная* и *дистантная*.

Для описания контактной сочетаемости из текста выделяются всевозможные *n-граммы* — последовательности из  $n$  подряд идущих слов. Среди  $n$ -грамм представляют интерес коллокации и словосочетания. *Коллокация* — это  $n$ -грамма, встречающаяся в корпусе гораздо чаще, чем можно было бы ожидать при чисто случайном соединении данных слов. *Словосочетание* — это  $n$ -грамма, слова которой связаны по смыслу и грамматически, и обозначают единое понятие. В тематических моделях тематику таких  $n$ -грамм лучше определять, не разделяя их на отдельные слова.

Дистантная сочетаемость означает частое появление слов в одних и тех же контекстах, например, в одном предложении или в соседних предложениях, но не обязательно вплотную друг к другу.

Многие исследования направлены на создание тематических моделей, учитывающих порядок слов. Из них наиболее важными представляются три направления.

Первое направление связано с выделением информативных  $n$ -грамм — коллокаций, словосочетаний, терминов, именованных сущностей. Темы, построенные на  $n$ -граммах, намного лучше интерпретируются, чем построенные на униграммах (отдельных словах). Проблема в том, что число всех  $n$ -грамм катастрофически быстро растёт с ростом объёма коллекции.

Второе направление связано с основной гипотезой *дистрибутивной семантики*: смысл слова определяется тем, в окружении каких слов оно чаще всего употребляется. Появление программы `word2vec` [107] стимулировало развитие *векторных представлений слов* (word embedding). Они находят массу применений благодаря тому, что семантически близким словам соответствуют близкие векторы. Тематические модели также способны строить векторные представления слов, обладающие этим свойством, в то же время сохраняя свойства интерпретируемости и разреженности.

Третье направление связано с *тематической сегментацией* и гипотезой, что текст на естественном языке состоит из последовательности монотематичных сообщений. В частности, каждое предложение чаще всего относится только к одной теме. Задачи сегментации рассматриваются в разделе 15.

**Модели контактной сочетаемости.** Использование  $n$ -грамм, коллокаций или словосочетаний заметно улучшает интерпретируемость тем, что демонстрируется практически в каждой публикации по  $n$ -граммным тематическим моделям, см. например [74].

Первая биграммная тематическая модель ВТМ (bigram topic model) [172] представляла собой по сути мультимодальную модель, в которой каждому слову  $v$  соответствовала отдельная модальность со словарём  $W^v \subseteq W$ , составленным из всех слов, встречающихся непосредственно после слова  $v$ . Запишем  $\log$ -правдоподобие этой модели в виде регуляризатора:

$$R(\Phi, \Theta) = \sum_{d \in D} \sum_{v \in \mathcal{d}} \sum_{w \in W^v} n_{dvw} \ln \sum_{t \in T} \varphi_{wt}^v \theta_{td},$$



распознавание образов в биоинформатике		теория вычислительной сложности	
unigrams	bigrams	unigrams	bigrams
объект	задача распознавания	задача	разделять множества
задача	множество мотивов	множество	конечное множество
множество	система масок	подмножество	условие задачи
мотив	вторичная структура	условие	задача о покрытии
разрешимость	структура белка	класс	покрытие множества
выборка	распознавание вторичной	решение	сильный смысл
маска	состояние объекта	конечный	разделяющий комитет
распознавание	обучающая выборка	число	минимальный аффинный
информативность	оценка информативности	аффинный	аффинный комитет
состояние	множество объектов	случай	аффинный разделяющий
закономерность	разрешимость задачи	покрытие	общее положение
система	критерий разрешимости	общий	множество точек
структура	информативность мотива	пространство	случай задачи
значение	первичная структура	схема	общий случай
регулярность	тупиковое множество	комитет	задача MASC

Рис. 21: Примеры тем униграммной модели и соответствующих им тем биграммной модели (по коллекции статей научной конференции ММРО — «Математические методы распознавания образов»).

где  $\varphi_{wt}^v = p(w|v, t)$  — условная вероятность слов  $w$  после слова  $v$  в теме  $t$ ;  $n_{dvw}$  — частота биграммы « $vw$ » в документе  $d$ . Главный недостаток модели ВТМ в том, что она учитывает только биграммы. Вторая проблема в том, что число всех биграмм быстро увеличивается с ростом коллекции, и использовать модель ВТМ на больших коллекциях затруднительно.

Модель TNG (topical  $n$ -grams) [181] устраняет эти недостатки. Условное распределение слов описывается вероятностной смесью  $p(w|v, t) = \xi_{vwt}\varphi_{wt}^v + (1 - \xi_{vwt})\varphi_{wt}$ , где  $\xi_{vwt}$  — переменная, равная вероятности того, что пара слов « $vw$ » является биграммой в теме  $t$ . В работе С. С. Стенина<sup>5</sup> показано, что при некоторых не особо жёстких предположениях log-правдоподобие этой модели оценивается снизу взвешенной суммой log-правдоподобий модальностей униграмм и биграмм в модели ARTM. Другими словами, мультимодальная ARTM может быть использована для поиска приближённого решения в модели TNG.

В той же работе были проведены эксперименты с биграммной мультимодальной моделью ARTM на небольшой (менее 1000 документов) коллекции русскоязычных статей научной конференции ММРО (математические методы распознавания образов). Сопоставление тем униграммной и биграммной моделей показало, что по темам биграммной модели опрошенные постоянные участники конференции могли определить научную группу и даже авторов статей, тогда как по темам униграммной модели сделать это было проблематично, см. рис. 21.

В ARTM  $n$ -граммная модель естественным образом определяется как мультимодальная, в которой для каждого  $n$  выделяется отдельная модальность. Для предварительного сокращения словарей  $n$ -грамм подходит метод поиска коллокаций TopMine [58]. Он линейно масштабируется на большие коллекции и позволяет формировать словарь, в котором каждая  $n$ -грамма обладает тремя свойствами:

- (а) имеет высокую частоту в коллекции;
- (б) состоит из слов, неслучайно часто образующих  $n$ -грамму;
- (в) не содержится в  $(n+1)$ -граммах, обладающих свойствами (а) и (б).

<sup>5</sup>С. С. Стенин. Мультиграммные аддитивно регуляризованные тематические модели. Магистерская диссертация, ФИВТ МФТИ, 2015.

<http://www.MachineLearning.ru/wiki/images/4/4a/Stenin2015MasterThesis.pdf>

Методы, предложенные в последующих работах, SegPhrase [96] и AutoPhrase [144], демонстрирующие ещё лучшие результаты.

**Модель битермов.** *Короткими текстами* (short text) называют документы, длина которых не достаточна для надёжного определения их тематики. Примерами коротких текстов являются сообщения Твиттера, заголовки новостных сообщений, рекламные объявления, реплики в диалогах, отдельные предложения, и т. д. Известны простые подходы к проблеме, но они не всегда применимы: объединять сообщения по какому-либо признаку (автору, времени, региону и т. д.); считать каждое сообщение отдельным документом, разреживая  $p(t|d)$  вплоть до единственной темы; дополнять коллекцию длинными текстами (например, статьями Википедии). Одним из наиболее успешных и универсальных подходов к проблеме коротких текстов считается *тематическая модель битермов* (biterm topic model, BTM) [184].

*Битермом* называется пара слов, встречающихся рядом — в одном коротком сообщении или в одном предложении или в окне  $\pm h$  слов. В отличие от биграммы, между двумя словами битерма могут находиться другие слова. Конкретизация понятия «рядом» зависит от постановки задачи и особенностей коллекции. Высокая частота битерма в текстовой коллекции является проявлением дистантной сочетаемости данной пары слов.

Модель BTM описывает вероятность совместного появления слов  $(u, v)$ . Исходными данными являются частоты  $n_{uv}$  битермов  $(u, v)$  в коллекции, или матрица вероятностей  $P = (p_{uv})_{W \times W}$ , где  $p_{uv} = \text{norm}_{(u,v) \in W^2}(n_{uv})$ .

Примем гипотезу условной независимости  $p(u, v | t) = p(u | t)p(v | t)$ , то есть допустим, что слова битермов порождаются независимо друг от друга из одной и той же темы. Тогда, по формуле полной вероятности,

$$p(u, v) = \sum_{t \in T} p(u | t) p(v | t) p(t) = \sum_{t \in T} \varphi_{ut} \varphi_{vt} \pi_t,$$

где  $\varphi_{wt} = p(w | t)$  и  $\pi_t = p(t)$  — параметры тематической модели. Это трёхматричное разложение  $P = \Phi \Pi \Phi^T$ , где  $\Pi = \text{diag}(\pi_1, \dots, \pi_T)$  — диагональная матрица. Модель битермов не определяет тематику документов  $\Theta$  и поэтому не подвержена влиянию эффектов, вызванных короткими текстами.

ARTM позволяет объединить модель битермов с обычной тематической моделью, чтобы всё-таки получить матрицу  $\Theta$ . Для этого возьмём log-правдоподобие модели битермов в качестве регуляризатора с коэффициентом  $\tau$ :

$$R(\Phi, \Pi) = \tau \sum_{u,v} n_{uv} \ln \sum_t \varphi_{ut} \varphi_{vt} \pi_t.$$

Применение уравнений (17)–(18) к этому регуляризатору даёт формулы M-шага:

$$\varphi_{wt} = \text{norm}_{w \in W} \left( n_{wt} + \tau \sum_{u \in W} n_{uw} p_{tuw} \right); \quad (66)$$

$$p_{tuw} = \text{norm}_{t \in T} (n_t \varphi_{wt} \varphi_{ut}). \quad (67)$$

Эти формулы интерпретируются как добавление *псевдо-документов*. Каждому слову  $u \in W$  ставится в соответствие псевдо-документ  $d_u$ , объединяющий все контексты слова  $u$ , то есть это мешок слов, встретившихся рядом со словом  $u$  по всей

коллекции. Число вхождений слова  $w$  в псевдо-документ  $d_u$  равно  $\tau n_{uw}$ . Вспомогательные переменные  $p_{tuw} = p(t|u, w)$  соответствуют формуле E-шага для псевдо-документа  $d_u$ , если доопределить его тематику как  $\theta_{tu} = \text{norm}_t(n_t \varphi_{ut})$ . Другими словами, в модели битермов столбцы матрицы  $\Theta$ , соответствующие псевдо-документам, образуются путём перенормировки строк матрицы  $\Phi$  по формуле Байеса.

Увеличивая коэффициент  $\tau$ , можно добиться того, чтобы матрица  $\Phi$  формировалась практически только по битермам. В таком случае модель ARTM переходит в модель битермов, которая строится по коллекции псевдо-документов, без использования исходных документов.

**Модель сети слов.** Идея моделировать не документы, а связи между словами, была положена в основу тематических моделей дистантной парной сочетаемости слов WTM (word topic model) [43] и WNTM (word network topic model) [197]. Любопытно, что более ранняя публикация [43] осталась незамеченной (видимо, как небайесовская), и статья [197] даже не ссылается на неё. Модели WTM и WNTM сводятся к применению PLSA и LDA соответственно к коллекции псевдо-документов  $d_u$ :

$$p(w|d_u) = \sum_{t \in T} p(w|t) p(t|d_u) = \sum_{t \in T} \varphi_{wt} \theta_{tu}.$$

Запишем log-правдоподобие для модели  $p(w|d_u)$  в виде регуляризатора:

$$R(\Phi, \Theta) = \tau \sum_{u, w \in W} n_{uw} \ln \sum_{t \in T} \varphi_{wt} \theta_{tu},$$

где  $n_{uw}$  — частота битерма  $(u, v)$  в коллекции (кстати,  $n_{uw} = n_{wu}$ ).

Основное отличие этих моделей от модели битермов в том, что здесь в явном виде строится матрица  $\Theta$  для псевдо-коллекции, тогда как в модели битермов  $\Theta = \text{diag}(\pi_1, \dots, \pi_t) \Phi^T$  и количество параметров вдвое меньше. Как показали эксперименты, модель WNTM немного превосходит модель битермов и существенно превосходит обычные тематические модели [197] на коллекциях коротких текстов. На коллекциях длинных документов тематические модели парной сочетаемости слов не дают значимых преимуществ перед обычными тематическими моделями.

**Когерентность.** Тема называется *когерентной* (согласованной), если наиболее частые термы данной темы часто встречаются рядом в документах коллекции [120]. Сочетаемость термов может оцениваться по самой коллекции  $D$  [113], или по сторонней коллекции, например, по Википедии [117]. Средняя когерентность тем считается хорошей мерой интерпретируемости тематической модели [121].

Пусть заданы оценки сочетаемости  $C_{wv} = \hat{p}(w|v)$  для пар термов  $(w, v) \in W^2$ . Обычно  $C_{wv}$  оценивают как долю документов, содержащих терм  $v$ , в которых терм  $w$  встречается не далее чем через 10 слов от  $v$ .

Запишем формулу полной вероятности  $p(w|t) = \sum_v C_{wv} \varphi_{vt}$  и заменим в ней условную вероятность  $\varphi_{vt}$  частотной оценкой:  $\hat{p}(w|t) = \sum_v C_{wv} \frac{n_{wt}}{n_t}$ . Введём регуляризатор, требующий, чтобы параметры  $\varphi_{wt}$  тематической модели были согласованы с оценками  $\hat{p}(w|t)$  в смысле кросс-энтропии:

$$R(\Phi) = \tau \sum_{t \in T} n_t \sum_{w \in W} \hat{p}(w|t) \ln \varphi_{wt}.$$

Формула М-шага, согласно (17), принимает вид

$$\varphi_{wt} = \operatorname{norm}_{w \in W} \left( n_{wt} + \tau \sum_{v \in W \setminus w} C_{wv} n_{vt} \right). \quad (68)$$

Это сглаживающий регуляризатор. Он увеличивает вероятность термина в теме, если термины, с которыми он часто сочетается, относятся к данной теме. Точно такая же формула получилась в [113] для модели LDA и алгоритма сэмплирования Гиббса, но с более сложным обоснованием через обобщённую урновую схему Пойя, и с более сложной эвристической оценкой  $C_{wv}$ .

В работе [117] предложен другой регуляризатор когерентности:

$$R(\Phi) = \tau \sum_{t \in T} \ln \sum_{u, v \in W} C_{uv} \varphi_{ut} \varphi_{vt},$$

в котором оценка парной сочетаемости термов  $C_{uv} = N_{uv} [\text{PMI}(u, v) > 0]$  определяется через *точечную взаимную информацию* (pointwise mutual information)

$$\text{PMI}(u, v) = \ln \frac{|D| N_{uv}}{N_u N_v}, \quad (69)$$

где  $N_{uv}$  — число документов, в которых термины  $u, v$  хотя бы один раз встречаются рядом (не далее, чем через 10 слов),  $N_u$  — число документов, в которых терм  $u$  встречается хотя бы один раз.

Таким образом, единый подход к оптимизации когерентности пока не выработан. Предлагаемые критерии похожи на модели бигермов и сети слов. Все они формализуют общую идею, что если слова часто совместно встречаются, то они имеют схожую тематику.

**Модели векторных представлений слов** ставят в соответствие каждому слову  $w$  вектор  $\nu_w$  фиксированной размерности. Основное требование к этому отображению — чтобы близким по смыслу словам соответствовали близкие векторы. Согласно *дистрибутивной гипотезе* (distributional hypothesis) смысл слова определяется распределением слов, в окружении которых оно встречается [65]. Слова, встречающиеся в схожих контекстах, имеют схожую семантику и, соответственно, должны иметь близкие векторы. Для формализации этого принципа в [107, 108] предлагается несколько вероятностных моделей, все они реализованы в программе `word2vec`. В частности, модель skip-gram предсказывает появление слова  $w$  в контексте слова  $u$ , то есть при условии, что слово  $u$  находится рядом:

$$p(w | u) = \operatorname{SoftMax}_{w \in W} \langle \nu_w, \nu_u \rangle = \operatorname{norm}_{w \in W} \left( \exp \langle \nu_w, \nu_u \rangle \right) = \frac{\exp \langle \nu_w, \nu_u \rangle}{\sum_v \exp \langle \nu_v, \nu_u \rangle},$$

где  $\langle \nu_w, \nu_u \rangle = \sum_t \nu_{wt} \nu_{ut}$  — скалярное произведение векторов. В отличие от тематических моделей, нормировка вероятностей производится нелинейным преобразованием `SoftMax`, а сами векторные представления слов не нормируются.

Для обучения модели решается задача максимизации  $\log$ -правдоподобия, как правило, градиентными методами:

$$\sum_{u, w \in W} n_{uw} \ln p(w | u) \rightarrow \max_{\{\nu_w\}}.$$

Ассоциация	Результат ARTM	Результат word2vec
king – boy + girl	<i>queen, princess, lord, prince</i>	<i>queen, princess, regnant, kings</i>
moscow – russia + spain	<i>madrid, barcelona, aires, buenos</i>	<i>madrid, barcelona, valladolid, malaga</i>
india – russia + ruble	<i>rupee, birbhumi, pradesh, madhaya</i>	<i>rupee, rupiah, devalued, debased</i>
better – good + bad	<i>really, something, thing, nothing</i>	<i>worse, easier, prettier, funnier</i>
cars – car + computer	<i>computers, software, servers, implementations</i>	<i>computers, software, hardware, microcomputers</i>

Рис. 22: Примеры решения задач ассоциаций слов для моделей ARTM и word2vec. Приводятся четыре наиболее близкие ассоциации.

Постановка задачи очень похожа на тематические модели BTM и WNTM. Модели семейства word2vec и другие модели векторных представлений слов также являются матричными разложениями [91, 129, 97]. Главное отличие заключается в том, что в этих векторных представлениях координаты не интерпретируемы, не нормированы и не разрежены, тогда как в тематических моделях словам соответствуют разреженные дискретные распределения тем  $p(t|w)$ . С другой стороны, тематические модели изначально не предназначались для определения семантической близости слов, поэтому делают они это плохо.

В [132] предложен способ построения *тематических векторных представлений слов* (probabilistic word embedding, PWE) по псевдо-коллекции документов, аналогичный моделям BTM и WNTM. В задачах семантической близости слов они конкурируют с моделями word2vec и существенно превосходят обычные тематические модели. При этом тематические векторные представления являются интерпретируемыми и разреженными. Используя кросс-энтропийные регуляризаторы, разреженность векторов удаётся доводить до 93% без потери качества. На рис. 22 показаны примеры решения задачи ассоциаций слов с помощью моделей, построенных по англоязычной Википедии.

Количественные оценки показывают, что PWE решает задачи ассоциации слов намного лучше обычной тематической модели LDA, но не столь успешно конкурирует с лучшим моделям семейства word2vec, как в задачах семантической близости.

В задаче семантической близости документов PWE уверенно опережают векторную модель DBOW [49], специально разработанную для поиска семантически близких документов.

Кроме того, ARTM позволяет обобщить тематические модели дистрибутивной семантики для мультимодальных коллекций [132]. Используя данные о парной сочетаемости термов различных модальностей, возможно строить интерпретируемые тематические векторные представления для всех модальностей. В то же время, привлечение дополнительной информации о других модальностях повышает качество решения задачи близости слов.

## 15 Моделирование связного текста

Гипотеза «мешка слов» и предположение о статистической независимости соседних слов приводят к слишком частой хаотичной смене тематики между соседними словами. Если проследить, к каким темам относятся последовательные слова в тексте, то сочетания тем внутри каждого предложения могут показаться не настолько хорошо интерпретируемыми, как ранжированные списки частых слов в каждой теме.

Тематические модели сегментации основаны на более реалистичных гипотезах о связности текста. Каждое предложение, как правило, относится к одной–двум те-

мам. Следующее предложение, как правило, продолжает тематику предыдущего. Смена темы редко происходит между предложениями, часто между абзацами, ещё чаще — между секциями документа. Каждое предложение можно считать «мешком термов». Документ можно считать «мешком предложений».

Более аккуратные подходы связаны с полным отказом от гипотезы «мешка слов». Тематические векторы  $p(t|d, w_i)$  строятся для каждой словопозиции  $i$  с учётом локального контекста документа  $d$  в окрестности термина  $w_i$ . Эта идея допускает разнообразные реализации. Сначала мы рассмотрим механизм регуляризации Е-шага, когда критерии регуляризации воздействуют непосредственно на векторы  $p(t|d, w_i)$ . Затем рассмотрим алгоритм, который вычисляет тематический вектор документа  $\theta_d$  по матрице  $\Phi$  за одну или две итерации. В процессе вычисления формируются векторы, описывающие тематику левого и правого контекста для каждой словопозиции  $i$ .

**Тематическая модель предложений.** Допустим, что каждый документ  $d$  разбит на множество сегментов  $S_d$ . Это могут быть предложения, абзацы или *фразы* — синтаксически корректные части предложений. Обозначим через  $n_s$  длину сегмента  $s$ , через  $n_{sw}$  — число вхождений слова  $w$  в сегмент  $s$ .

Предположим, что все слова сегмента относятся к одной теме и запишем функцию вероятности сегмента  $s \in S_d$  через параметры тематической модели  $\varphi_{wt}, \theta_{td}$ :

$$p(s|d) = \sum_{t \in T} p(t|d) \prod_{w \in s} p(w|t)^{n_{sw}} = \sum_{t \in T} \theta_{td} \prod_{w \in s} \varphi_{wt}^{n_{sw}}.$$

Будем считать каждый документ «мешком сегментов». Тогда функция вероятности выборки будет равна произведению функций вероятности сегментов. Поставим задачу максимизации суммы log-правдоподобия и регуляризатора  $R$ :

$$\sum_{d \in D} \sum_{s \in S_d} \ln \sum_{t \in T} \theta_{td} \prod_{w \in s} \varphi_{wt}^{n_{sw}} + R(\Phi, \Theta) \rightarrow \max_{\Phi, \Theta}, \quad (70)$$

при обычных ограничениях (14). В частном случае, когда каждый сегмент состоит только из одного слова, данная задача переходит в (15). Заметим также, что задача (70) является частным случаем построения тематической модели гиперграфа (51), в котором вершины являются словами, а рёбра — предложениями.

**Теорема 15.1.** Пусть функция  $R(\Phi, \Theta)$  непрерывно дифференцируема. Точка  $(\Phi, \Theta)$  локального экстремума задачи (70), (14) удовлетворяет системе уравнений со вспомогательными переменными  $p_{tds} = p(t|d, s)$ , если из решения исключить нулевые столбцы матриц  $\Phi, \Theta$ :

$$\begin{aligned} p_{tds} &= \operatorname{norm}_{t \in T} \left( \theta_{td} \prod_{w \in s} \varphi_{wt}^{n_{sw}} \right); \\ \varphi_{wt} &= \operatorname{norm}_{w \in W} \left( n_{wt} + \varphi_{wt} \frac{\partial R}{\partial \varphi_{wt}} \right); & n_{wt} &= \sum_{d \in D} \sum_{s \in S_d} [w \in s] p_{tds}; \\ \theta_{td} &= \operatorname{norm}_{t \in T} \left( n_{td} + \theta_{td} \frac{\partial R}{\partial \theta_{td}} \right); & n_{td} &= \sum_{s \in S_d} p_{tds}. \end{aligned}$$

Аналогичным образом задача ставится для модели предложений senLDA [28] и для модели коротких сообщений Twitter-LDA [194]. В обоих случаях регуляризатором являются априорные распределения Дирихле. В модели Twitter-LDA в роли документов выступают авторы, в роли сегментов — сообщения данного автора.

**Гиперграфовые модели связного текста.** Тематическая модель гиперграфа (51) из раздела 10 может быть непосредственно применена для построения тематической модели предложений. Ребром гиперграфа можно описать как предложение, так и любое подмножество термов, связанных друг с другом по смыслу и порождаемых одной общей темой.

Если текст предварительно обработан *синтаксическим парсером*, то в качестве рёбер можно брать ветки или поддеревья синтаксического дерева (*синтагмы*), в частности, *именные группы* — грамматически корректные словосочетания, в которых главным словом является существительное. Синтаксические связи позволяют устанавливать *семантические роли слов* и выделять *факты* в виде троек «объект, субъект, действие», которые можно считать тематически однородными и описывать рёбрами гиперграфа.

Можно использовать внешние лингвистические ресурсы — *тезаурусы* или *онтологии*, такие как WordNet, РуТез, Вики-Словарь и другие. Они позволяют находить пары терминов, с высокой вероятностью связанные тематически, либо вообще обозначающие в тексте один и тот же объект. Это могут быть пары *синонимов*, пары *гипоним–гипероним* (частное–общее), пары *мероним–холоним* (часть–целое). Термины, связанные тезаурусными отношениями, можно объединять ребром гиперграфа, когда они находятся в одном предложении или в соседних предложениях.

Гиперграфовая модель не накладывает никаких ограничений на многократное вхождение одного и того же слова в разные рёбра гиперграфа. Это даёт возможность учитывать разные типы связей между словами, описывая их различными типами рёбер в гиперграфе. Например, можно в единой гиперграфовой модели учитывать одновременно предложения, факты, синтаксические и тезаурусные связи.

**Тематическая модель сегментации.** Теперь рассмотрим более сложный случай, когда текст состоит из предложений, и требуется объединить их в более крупные тематические сегменты, границы которых заранее не определены.

*Метод TopicTiling* [139] основан на пост-обработке распределений  $p(t|d, w_i)$ ,  $i = 1, \dots, n_d$ , получаемых какой-либо тематической моделью, например, LDA. Определим тематику предложения  $s$  как среднюю тематику  $p(t|d, w)$  всех его слов<sup>6</sup>. Посчитаем косинусную близость тематики для всех пар соседних предложений. Чем глубже локальный минимум близости, тем выше уверенность, что между данной парой предложений проходит граница сегментов. Метод TopicTiling использует набор эвристик для подбора числа предложений слева и справа от локального минимума близости, определения числа сегментов, подбора числа тем и числа итераций, игнорирования стоп-слов, фоновых тем и коротких предложений. Аккуратная настройка параметров этих эвристик позволяет достичь высокого качества сегментации [139].

---

<sup>6</sup>Точнее, в [139] предлагалось для каждого слова выбирать наиболее вероятную тему. Оба варианта имеют право на существование. Какой из них лучше, пока не исследовано.

TopicTiling не является полноценной тематической моделью сегментации текста, поскольку пост-обработка никак не влияет на сами темы. Чтобы найти темы, наиболее выгодные для сегментации, требуется специальный регуляризатор.

**Регуляризатор Е-шага.** До сих пор для формализации дополнительных требований к тематической модели мы конструировали критерии регуляризации как функции от параметров  $\varphi_{wt}$  и  $\theta_{td}$ . Чтобы учитывать порядок слов внутри документов, гораздо удобнее накладывать ограничения на распределения  $p_{tdw} = p(t|d, w)$ , которые вычисляются на Е-шаге для каждого слова в каждом документе. Требованием регуляризатора может быть, например, разреженность тематики предложений, сходство тематики термов внутри каждого предложения или в соседних предложениях.

Пусть регуляризатор  $R(\Pi, \Phi, \Theta)$  является функцией не только матриц  $\Phi$  и  $\Theta$ , но и трёхмерной матрицы вспомогательных переменных  $\Pi = (p_{tdw})_{T \times D \times W}$ .

Будем предполагать, что  $R$  является достаточно гладкой функцией всех переменных  $p_{tdw}$ ,  $\varphi_{wt}$  и  $\theta_{td}$ . Кроме того, сделаем естественное допущение, что если слова  $w$  нет в документе  $d$ , то функция  $R$  не зависит от переменной  $p_{tdw}$ .

Согласно уравнению (16), матрица  $\Pi$  является функцией от  $\Phi$  и  $\Theta$ . Поэтому к регуляризатору  $\tilde{R}(\Phi, \Theta) = R(\Pi(\Phi, \Theta), \Phi, \Theta)$  применима теорема 4.1. Однако систему уравнений удобно записывать через частные производные регуляризатора  $R$ , а не  $\tilde{R}$ .

Рассмотрим задачу максимизации регуляризованного log-правдоподобия

$$\sum_{d \in D} \sum_{w \in d} n_{dw} \ln \sum_{t \in T} \varphi_{wt} \theta_{td} + R(\Pi(\Phi, \Theta), \Phi, \Theta) \rightarrow \max_{\Phi, \Theta}, \quad (71)$$

при ограничениях неотрицательности и нормировки (14).

**Теорема 15.2.** Пусть функция  $R(\Pi, \Phi, \Theta)$  непрерывно дифференцируема и не зависит от переменных  $p_{tdw}$  при  $w \notin d$ . Тогда точка  $(\Phi, \Theta)$  локального экстремума задачи (71), (14) удовлетворяет системе уравнений со вспомогательными переменными  $p_{tdw}$  и  $\tilde{p}_{tdw}$ , если из решения исключить нулевые столбцы матриц  $\Phi$ ,  $\Theta$ :

$$p_{tdw} = \operatorname{norm}_{t \in T}(\varphi_{wt} \theta_{td}); \quad (72)$$

$$\tilde{p}_{tdw} = p_{tdw} \left( 1 + \frac{1}{n_{dw}} \left( \frac{\partial R}{\partial p_{tdw}} - \sum_{z \in T} p_{zdw} \frac{\partial R}{\partial p_{zdw}} \right) \right); \quad (73)$$

$$\varphi_{wt} = \operatorname{norm}_{w \in W} \left( \sum_{d \in D} n_{dw} \tilde{p}_{tdw} + \varphi_{wt} \frac{\partial R}{\partial \varphi_{wt}} \right); \quad (74)$$

$$\theta_{td} = \operatorname{norm}_{t \in T} \left( \sum_{w \in d} n_{dw} \tilde{p}_{tdw} + \theta_{td} \frac{\partial R}{\partial \theta_{td}} \right). \quad (75)$$

Доказательство теоремы удобно разбить на три леммы.

**Лемма 15.3.** Для функции  $p_{zdw}(\Phi, \Theta) = \frac{\varphi_{wz} \theta_{zd}}{\sum_t \varphi_{wt} \theta_{td}}$  и любых  $t, z \in T$

$$\varphi_{wt} \frac{\partial p_{zdw}}{\partial \varphi_{wt}} = \theta_{td} \frac{\partial p_{zdw}}{\partial \theta_{td}} = p_{tdw} ([z=t] - p_{zdw}) = \begin{cases} p_{tdw}(1 - p_{tdw}), & t = z; \\ -p_{tdw} p_{zdw}, & t \neq z. \end{cases}$$



**Доказательство.** Воспользуемся формулами (16) для переменных  $p_{tdw}$ :

$$\begin{aligned}\varphi_{wt} \frac{\partial p_{zdw}}{\partial \varphi_{wt}} &= \varphi_{wt} \frac{\partial}{\partial \varphi_{wt}} \left( \frac{\varphi_{wz} \theta_{zd}}{\sum_u \varphi_{wu} \theta_{ud}} \right) = \varphi_{wt} \frac{[z=t] \theta_{td} \sum_u \varphi_{wu} \theta_{ud} - \theta_{td} \varphi_{wz} \theta_{zd}}{(\sum_u \varphi_{wu} \theta_{ud})^2} = \\ &= p_{tdw} [z=t] - p_{tdw} p_{zdw} = p_{tdw} ([z=t] - p_{zdw}); \\ \theta_{td} \frac{\partial p_{zdw}}{\partial \theta_{td}} &= \theta_{td} \frac{\partial}{\partial \theta_{td}} \left( \frac{\varphi_{wz} \theta_{zd}}{\sum_u \varphi_{wu} \theta_{ud}} \right) = \theta_{td} \frac{[z=t] \varphi_{wt} \sum_u \varphi_{wu} \theta_{ud} - \varphi_{wt} \varphi_{wz} \theta_{zd}}{(\sum_u \varphi_{wu} \theta_{ud})^2} = \\ &= p_{tdw} [z=t] - p_{tdw} p_{zdw} = p_{tdw} ([z=t] - p_{zdw}).\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Введём вспомогательную функцию  $Q$  от переменных  $\Pi, \Phi, \Theta$ :

$$Q_{tdw}(\Pi, \Phi, \Theta) = \frac{\partial R(\Pi, \Phi, \Theta)}{\partial p_{tdw}} - \sum_{z \in T} p_{zdw} \frac{\partial R(\Pi, \Phi, \Theta)}{\partial p_{zdw}}.$$

**Лемма 15.4.** Пусть функция  $R(\Pi, \Phi, \Theta)$  не зависит от переменных  $p_{tdw}$  при  $w \notin d$ . Тогда частные производные функции  $\tilde{R}(\Phi, \Theta)$  выражаются через  $Q_{tdw}$ :

$$\varphi_{wt} \frac{\partial \tilde{R}}{\partial \varphi_{wt}} = \varphi_{wt} \frac{\partial R}{\partial \varphi_{wt}} + \sum_{d \in D} p_{tdw} Q_{tdw}; \quad \theta_{td} \frac{\partial \tilde{R}}{\partial \theta_{td}} = \theta_{td} \frac{\partial R}{\partial \theta_{td}} + \sum_{w \in d} p_{tdw} Q_{tdw}.$$

**Доказательство.** Воспользуемся формулой дифференцирования сложной функции и тем, что  $\frac{\partial p_{zdw'}}{\partial \varphi_{wt}} = 0$  при  $w \neq w'$ ;  $\frac{\partial p_{zd'w}}{\partial \theta_{td}} = 0$  при  $d \neq d'$ ;  $\frac{\partial R}{\partial p_{tdw}} = 0$  при  $w \notin d$ :

$$\frac{\partial \tilde{R}}{\partial \varphi_{wt}} = \frac{\partial R}{\partial \varphi_{wt}} + \sum_{(z, d, w')} \frac{\partial R}{\partial p_{zdw'}} \frac{\partial p_{zdw'}}{\partial \varphi_{wt}} = \frac{\partial R}{\partial \varphi_{wt}} + \sum_{d \in D} \sum_{z \in T} \frac{\partial R}{\partial p_{zdw}} \frac{\partial p_{zdw}}{\partial \varphi_{wt}}; \quad (76)$$

$$\frac{\partial \tilde{R}}{\partial \theta_{td}} = \frac{\partial R}{\partial \theta_{td}} + \sum_{(z, d', w)} \frac{\partial R}{\partial p_{zd'w}} \frac{\partial p_{zd'w}}{\partial \theta_{td}} = \frac{\partial R}{\partial \theta_{td}} + \sum_{w \in d} \sum_{z \in T} \frac{\partial R}{\partial p_{zdw}} \frac{\partial p_{zdw}}{\partial \theta_{td}}. \quad (77)$$

В силу леммы 15.3 справедливо тождество

$$\begin{aligned}\varphi_{wt} \sum_{z \in T} \frac{\partial R}{\partial p_{zdw}} \frac{\partial p_{zdw}}{\partial \varphi_{wt}} &= \theta_{td} \sum_{z \in T} \frac{\partial R}{\partial p_{zdw}} \frac{\partial p_{zdw}}{\partial \theta_{td}} = \\ &= \sum_{z \in T} \frac{\partial R}{\partial p_{zdw}} p_{tdw} ([z=t] - p_{zdw}) = p_{tdw} \left( \frac{\partial R}{\partial p_{tdw}} - \sum_{z \in T} p_{zdw} \frac{\partial R}{\partial p_{zdw}} \right) = p_{tdw} Q_{tdw}.\end{aligned}$$

Подстановка полученного выражения в (76) и (77) завершает доказательство.

**Лемма 15.5.** Решение  $\Phi, \Theta$  задачи (71) удовлетворяет следующей системе уравнений относительно переменных  $\varphi_{wt}, \theta_{td}$  и вспомогательных переменных  $p_{tdw}$ :

$$p_{tdw} = \operatorname{norm}_{t \in T}(\varphi_{wt} \theta_{td}); \quad (78)$$

$$\varphi_{wt} = \operatorname{norm}_{w \in W} \left( \sum_{d \in D} n_{dw} p_{tdw} + \sum_{d \in D} Q_{tdw} p_{tdw} + \varphi_{wt} \frac{\partial R}{\partial \varphi_{wt}} \right); \quad (79)$$

$$\theta_{td} = \operatorname{norm}_{t \in T} \left( \sum_{w \in d} n_{dw} p_{tdw} + \sum_{w \in d} Q_{tdw} p_{tdw} + \theta_{td} \frac{\partial R}{\partial \theta_{td}} \right). \quad (80)$$

Эта лемма является непосредственным следствием теоремы 4.1 и леммы 15.4.

Осталось только заметить, что выделение вспомогательной переменной  $\tilde{p}_{tdw}$  согласно (73) позволяет переписать уравнения (79)–(80) в требуемом виде (74)–(75).

Теорема доказана.

Таким образом, в EM-алгоритме для каждого документа  $d$  сначала вычисляются вспомогательные переменные  $p_{tdw}$ , затем они преобразуются в новые переменные  $\tilde{p}_{tdw}$ , которые подставляются в формулы M-шага (17)–(18) вместо  $p_{tdw}$ . Такой способ вычислений будем называть *регуляризацией E-шага* или *пост-обработкой E-шага*.

Заметим, что переменные  $\tilde{p}_{tdw}$  могут принимать отрицательные значения, поэтому в общем случае они не образуют вероятностных распределений. Тем не менее, для них выполнено условие нормировки  $\sum_t \tilde{p}_{tdw} = 1$ .

**Разреживание распределений  $p(t|d, w)$ .** Потребуем, чтобы каждый терм в документе относился к небольшому числу тем. Для этого будем разреживать распределения  $p(t|d, w)$ , максимизируя их KL-дивергенции с равномерным распределением:

$$\text{KL}\left(\frac{1}{|T|} \parallel p(t|d, w)\right) \rightarrow \max.$$

Суммируя по всем термам всех документов, получим регуляризатор:

$$R(\Pi) = -\frac{\tau}{|T|} \sum_{d \in D} \sum_{w \in d} n_{dw} \sum_{t \in T} \ln p_{tdw} \rightarrow \max.$$

Подставим производную

$$\frac{\partial R(\Pi)}{\partial p_{zdw}} = -\frac{\tau}{|T|} \frac{n_{dw}}{p_{zdw}}$$

в формулу (73):

$$\tilde{p}_{tdw} = p_{tdw} - \tau \left( \frac{1}{|T|} - p_{tdw} \right).$$

Таким образом, если для некоторой темы  $p_{tdw} < \frac{1}{|T|}$ , то на следующей итерации вероятность  $p_{tdw}$  для данного терма  $w$  станет ещё меньше. Тематика терма будет постепенно концентрироваться в небольшом числе тем.

Ещё одна интерпретация этого регуляризатора следует из возможности записать регуляризацию E-шага эквивалентным образом через формулы M-шага (79)–(80):

$$\begin{aligned} \varphi_{wt} &= \text{norm}_{w \in W} \left( n_{wt} - \tau n_w \left( \frac{1}{|T|} - \frac{n_{wt}}{n_w} \right) \right); \\ \theta_{td} &= \text{norm}_{t \in T} \left( n_{td} - \tau n_d \left( \frac{1}{|T|} - \frac{n_{td}}{n_d} \right) \right). \end{aligned}$$

Если нерегуляризованные частотные оценки условных вероятностей  $\hat{p}(t|w) = \frac{n_{wt}}{n_w}$  и  $\hat{p}(t|d) = \frac{n_{td}}{n_d}$  становятся меньше вероятности равномерного распределения  $\frac{1}{|T|}$ , то происходит разреживание распределений  $\varphi_{wt}$  и  $\theta_{td}$ ; с итерациями их значения уменьшаются и могут обращаться в нуль. Таким образом, происходит согласованное разреживание матриц  $\Phi$  и  $\Theta$ , под управлением одного общего коэффициента регуляризации  $\tau$ .

**Разреживающий регуляризатор Е-шага для сегментации.** Применим регуляризацию Е-шага для построения тематической модели сегментированного текста. Сегментами могут быть абзацы, предложения или синтаксически связанные части предложений, найденные с помощью синтаксического анализатора. Обозначим через  $S_d$  множество сегментов, на которые разбит документ  $d$ , через  $n_s$  — длину сегмента  $s$ , через  $n_{sw}$  — число вхождений термина  $w$  в сегмент  $s$ .

Определим тематику сегмента  $s \in S_d$  как среднюю тематику всех его термов:

$$p_{tds} \equiv p(t|d, s) = \sum_{w \in s} p(t|d, w) p(w|s) = \frac{1}{n_s} \sum_{w \in s} n_{sw} p_{tdw}.$$

Чтобы каждый сегмент относился к небольшому числу тем, будем минимизировать кросс-энтропию между распределениями  $p(t|d, s)$  и равномерным распределением, что приведёт нас к разреживающему регуляризатору Е-шага:

$$R(\Pi) = -\tau \sum_{d \in D} \sum_{s \in S_d} \sum_{t \in T} \ln \sum_{w \in s} n_{sw} p_{tdw}. \quad (81)$$

Опуская рутинные выкладки, приведём результат подстановки (81) в (73):

$$\tilde{p}_{tdw} = p_{tdw} \left( 1 - \frac{\tau}{n_{dw}} \sum_{s \in S_d} \frac{n_{sw}}{n_s} \left( \frac{1}{p_{tds}} - \sum_{z \in T} \frac{p_{zdw}}{p_{zds}} \right) \right).$$

Хотя формула выглядит громоздкой, эффект применения регуляризатора понять не трудно. Если вероятность  $p_{tds}$  темы в сегменте окажется меньше некоторого порога, то вероятности  $p_{tdw}$  будут уменьшаться для всех термов  $w$  данного сегмента. В итоге тематика каждого сегмента сконцентрируется в небольшом числе тем.

В результате разреживания тематика соседних сегментов может оказаться близкой, и их можно будет объединить в один тематический сегмент. Назовём тему  $t$  с максимальным значением  $p(t|d, s)$  *доминирующей темой* сегмента  $s$  документа  $d$ . Если тема доминирует в соседних сегментах, то она будет доминирующей и в их объединении. Если объединить последовательные сегменты с одинаковой доминирующей темой в один более крупный сегмент, то данная тема также останется в нём доминирующей. Это простая агломеративная стратегия тематической сегментации. В отличие от TopicTiling, у неё нет эвристических параметров, которые надо настраивать, и она почти не увеличивает время пост-обработки Е-шага.

**Гипотеза об эквивалентности пост-обработки и регуляризации.** Согласно формуле (73), произвольному гладкому регуляризатору  $R(\Pi, \Phi, \Theta)$  однозначно соответствует преобразование  $p_{tdw} \rightarrow \tilde{p}_{tdw}$ . Можно предположить, что верно и обратное: совершив над матрицей  $\Pi$  преобразование  $p_{tdw} \rightarrow \tilde{p}_{tdw}$  с помощью некоторого «разумного» эвристического алгоритма, можно найти соответствующий ему регуляризатор, решив систему дифференциальных уравнений (73) относительно неизвестной функции  $R$ . Если принять эту гипотезу (пока она не доказана, хотя и представляется правдоподобной), то возникает два пути улучшения матрицы  $\Pi$ : либо через критерий регуляризации, либо через эвристическую пост-обработку.

Один из возможных вариантов эвристической пост-обработки заключается в сглаживании тематических распределений  $p(t|d, w_i)$  соседних слов с учётом границ предложений в документе  $d = (w_1, \dots, w_{n_d})$ . Согласно теории дискурса, всякое высказывание на естественном языке является сообщением о взаимодействии некоторого

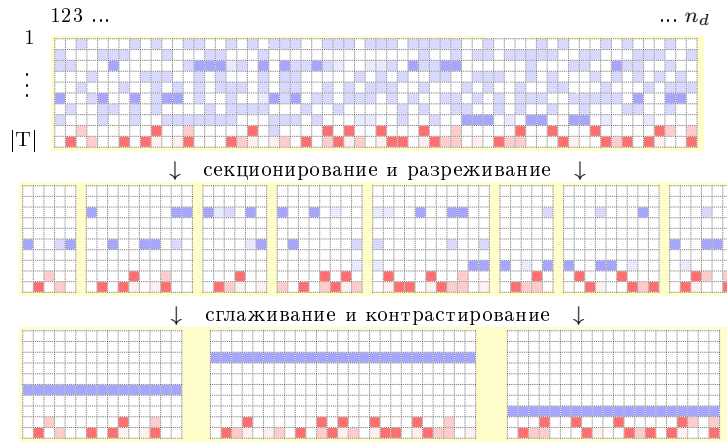


Рис. 23: Эвристическая пост-обработка E-шага для выделения тематически однородных сегментов текстового документа  $d = \{w_1, \dots, w_{n_d}\}$  длины  $n_d$ . Фоновые темы не участвуют в пост-обработке.

субъекта с некоторым объектом. Отсюда следует, что каждое предложение относится преимущественно к одной или двум темам.

На рис. 23 показаны стадии пост-обработки матрицы  $\Pi_d = (p_{tdw})$  размера  $T \times n_d$ , соответствующей фиксированному документу  $d$ . Сначала документ секционируется по предложениям и в каждом предложении определяется главная тема. Затем соседние предложения с одинаковой главной темой объединяются в более крупные сегменты  $s$ , для которых определяются распределения  $p(t|d, s)$ .

**Однопроходный E-шаг для быстрой тематизации документов.** Вычисление тематического вектора документа  $\theta_d = (\theta_{td})_{t \in T}$  в EM-алгоритме требует многократного итерационного прохода по всем термам документа. В статье [10] предлагается вычислять  $\theta_d$  за один проход по явной формуле, как функцию от матрицы  $\Phi$ . Формула  $\theta_{td}(\Phi)$  играет роль регуляризатора, хотя формально это ограничение-равенство, а не оптимизационный критерий.

Данный подход имеет несколько преимуществ. Тематическая модель получается более устойчивой благодаря регуляризации. Вектор  $\theta_d$  для любого документа при необходимости может быть вычислен быстро, за один проход по документу. Фактически, матрица  $\Theta$  полностью исключается из модели, что приводит к сокращению размерности модели и уменьшению переобучения. В моделях с двумя матрицами недостаточное качество матрицы  $\Phi$  теоретически может быть скомпенсировано итерационным процессом подгонки каждого столбца  $\theta_d$  матрицы  $\Theta$  под конкретный документ  $d$ . В случае коротких документов это может приводить к переобучению. Если же  $\Theta$  выражается через  $\Phi$  непосредственно, такая подгонка становится невозможной. Кроме того, размер матрицы  $\Theta$  линейно зависит от числа документов в коллекции, тогда как размер словаря увеличивается по сублинейному степенному закону Хипса [56]. Рост словаря может быть ограничен и принудительно, путём отбрасывания наименее частотных слов. Таким образом, уменьшается темп роста размерности модели при расширении коллекции.

Формула  $\theta_{td}(\Phi)$  может быть получена, например, из требования, чтобы тематический вектор документа  $d$  совпадал с результатом первой итерации EM-алгоритма

без регуляризации при равномерном начальном приближении  $\theta_{td}^0 = \frac{1}{|T|}$ :

$$\theta_{td}(\Phi) = \operatorname{norm}_{t \in T} \left( \sum_{w \in W} n_{dw} p_{tdw} \right) = \sum_{w \in d} \frac{n_{dw}}{n_d} \frac{\varphi_{wt} \theta_{td}^0}{\sum_s \varphi_{ws} \theta_{sd}^0} = \sum_{w \in d} p_{wd} \operatorname{norm}_{t \in T} (\varphi_{wt}), \quad (82)$$

где  $p_{wd} = \frac{n_{dw}}{n_d} = \hat{p}(w|d)$  — частотная оценка условной вероятности термина в документе.

Более общий способ основан на формуле полной вероятности, где распределение  $p_t = p(t)$  полагается фиксированным (вместо равномерного распределения можно использовать более точную оценку  $p_t = \frac{n_t}{n}$  из EM-алгоритма):

$$\theta_{td}(\Phi) = \sum_{w \in d} p(w|d) p(t|w) = \sum_{w \in d} p_{wd} \operatorname{norm}_{t \in T} (\varphi_{wt} p_t). \quad (83)$$

Рассмотрим сначала общий случай функциональной зависимости  $\theta_{td}(\Phi)$ .

**Теорема 15.6.** Пусть функции  $\theta_{td}(\Phi)$  и  $R(\Phi, \Theta)$  непрерывно дифференцируемы. Тогда точка  $\Phi$  локального экстремума задачи (15) с ограничениями (14) и дополнительными ограничениями-равенствами  $\theta_{td} = \theta_{td}(\Phi)$  удовлетворяет системе уравнений со вспомогательными переменными  $p_{tdw} = p(t|d, w)$ ,  $n_{td}$  и  $p'_{tdw}$ , если из решения исключить нулевые столбцы матриц  $\Phi$ ,  $\Theta$ :

$$p_{tdw} = \operatorname{norm}_{t \in T} (\varphi_{wt} \theta_{td}); \quad (84)$$

$$n_{td} = \sum_{w \in d} n_{dw} p_{tdw} + \theta_{td} \frac{\partial R}{\partial \theta_{td}}; \quad (85)$$

$$p'_{tdw} = p_{tdw} + \frac{\varphi_{wt}}{n_{dw}} \sum_{s \in T} \frac{n_{sd}}{\theta_{sd}} \frac{\partial \theta_{sd}}{\partial \varphi_{wt}}; \quad (86)$$

$$\varphi_{wt} = \operatorname{norm}_{w \in W} \left( \sum_{d \in D} n_{dw} p'_{tdw} + \varphi_{wt} \frac{\partial R}{\partial \varphi_{wt}} \right). \quad (87)$$

**Доказательство.** Воспользуемся необходимым условием экстремума задачи (15) с ограничениями (14), которые даёт теорема 4.2. Формула E-шага (19) совпадает с (84). Рассмотрим функционал, максимизируемый на M-шаге (20):

$$Q(\Phi) = \sum_{d \in D} \sum_{u \in W} \sum_{s \in T} n_{du} p_{sdu} (\ln \varphi_{us} + \ln \theta_{sd}(\Phi)) + R(\Phi, \Theta(\Phi)) \rightarrow \max_{\Phi}.$$

Запишем частные производные  $Q$  по параметрам  $\varphi_{wt}$ , выделяя в формулах выражения  $n_{sd}$  и  $p'_{tdw}$  согласно (85) и (86) соответственно:

$$\begin{aligned} \varphi_{wt} \frac{\partial Q}{\partial \varphi_{wt}} &= \sum_{d \in D} n_{dw} p_{tdw} + \sum_{d, s, u} n_{du} p_{sdu} \frac{\varphi_{wt}}{\theta_{sd}} \frac{\partial \theta_{sd}}{\partial \varphi_{wt}} + \varphi_{wt} \sum_{d, s} \frac{\partial R}{\partial \theta_{sd}} \frac{\partial \theta_{sd}}{\partial \varphi_{wt}} + \varphi_{wt} \frac{\partial R}{\partial \varphi_{wt}} = \\ &= \sum_{d \in D} n_{dw} \left( p_{tdw} + \frac{\varphi_{wt}}{n_{dw}} \sum_{s \in T} \frac{1}{\theta_{sd}} \underbrace{\left( \sum_{u \in d} n_{du} p_{sdu} + \theta_{sd} \frac{\partial R}{\partial \theta_{sd}} \right)}_{n_{sd}} \frac{\partial \theta_{sd}}{\partial \varphi_{wt}} \right) + \varphi_{wt} \frac{\partial R}{\partial \varphi_{wt}} = \\ &= \sum_{d \in D} n_{dw} \underbrace{\left( p_{tdw} + \frac{\varphi_{wt}}{n_{dw}} \sum_{s \in T} \frac{n_{sd}}{\theta_{sd}} \frac{\partial \theta_{sd}}{\partial \varphi_{wt}} \right)}_{p'_{tdw}} + \varphi_{wt} \frac{\partial R}{\partial \varphi_{wt}}. \end{aligned}$$

Отсюда и из леммы 3.2 о максимизации на единичных симплексах следует формула М-шага (87).

Заметим, что  $\theta_{sd}$  в знаменателе не может обращаться в нуль, поскольку при  $\theta_{sd} = 0$  имеем  $p_{sdu} = 0$  для всех  $u$ , следовательно, соответствующее слагаемое в сумме по  $s$  отсутствует (равно нулю) в функционале  $Q$  ещё до его дифференцирования.

Теорема доказана.

Таким образом, модификация EM-алгоритма, как и в случае пост-обработки E-шага, сводится к преобразованию переменных  $p_{tdw}$  в  $p'_{tdw}$ , которые подставляются в обычную формулу М-шага для матрицы  $\Phi$ .

Теперь вернёмся к частному случаю (83). Чтобы применить к нему теорему 15.6, найдём частную производную:

$$\varphi_{wt} \frac{\partial \theta_{sd}}{\partial \varphi_{wt}} = \varphi_{wt} \frac{\partial}{\partial \varphi_{wt}} \left( \frac{p_{wd} \varphi_{ws} p_s}{\sum_v \varphi_{wv} p_v} \right) = \varphi_{wt} p_t p_{wd} \frac{\delta_{st} \sum_v \varphi_{wv} p_v - \varphi_{ws} p_s}{\left( \sum_v \varphi_{wv} p_v \right)^2} = p_{wd} \varphi'_{tw} (\delta_{st} - \varphi'_{sw}),$$

где  $\delta_{st} = [s=t]$  — символ Кронекера,  $\varphi'_{tw} = \frac{\varphi_{wt} p_t}{\sum_v \varphi_{wv} p_v} = \text{norm}_t(\varphi_{wt} p_t) = p(t|w)$  — результат перенормировки матрицы  $\Phi$  по строкам согласно формуле Байеса. Подставим это выражение в (87) и перепишем уравнения в порядке, удобном для проведения вычислений методом простых итераций [10]:

$$\begin{aligned} \varphi'_{tw} &= \text{norm}_{t \in T}(\varphi_{wt} p_t); \\ \theta_{td} &= \sum_{w \in d} p_{wd} \varphi'_{tw}; \\ p_{tdw} &= \text{norm}_{t \in T}(\varphi_{wt} \theta_{td}); \\ n_{td} &= \sum_{w \in d} n_{dw} p_{tdw} + \theta_{td} \frac{\partial R}{\partial \theta_{td}}; \\ p'_{tdw} &= p_{tdw} + \frac{\varphi'_{tw}}{n_d} \left( \frac{n_{td}}{\theta_{td}} - \sum_{s \in T} \varphi'_{sw} \frac{n_{sd}}{\theta_{sd}} \right); \\ \varphi_{wt} &= \text{norm}_{w \in W} \left( \sum_{d \in D} n_{dw} p'_{tdw} + \varphi_{wt} \frac{\partial R}{\partial \varphi_{wt}} \right). \end{aligned}$$

Вычисление переменных  $\varphi'_{tw}$ ,  $\theta_{td}$ ,  $p_{tdw}$ ,  $n_{td}$ ,  $p'_{tdw}$  образует E-шаг и занимает  $O(n_d |T|)$  операций по каждому документу, как в обычном EM-алгоритме. Все переменные, относящиеся к конкретному документу  $d$ , можно удалять из памяти по окончании его обработки. Вычисление переменных  $\varphi_{wt}$  происходит по обычной формуле, только вместо условных вероятностей  $p_{tdw}$  подставляются переменные  $p'_{tdw}$ . Таким образом, модификация EM-алгоритма не приводит к существенному увеличению времени его работы или дополнительному расходу памяти.

Обработка каждого документа на E-шаге осуществляется за два прохода. На первом проходе вычисляются переменные  $\varphi'_{tw}$  и  $\theta_{td}$ . На втором проходе вычисляются остальные переменные  $p_{tdw}$ ,  $n_{td}$ ,  $p'_{tdw}$ . Если требуется только найти тематический вектор документа  $\theta_d$ , не обновляя матрицу  $\Phi$ , то второй проход делать не нужно. Нормировочные множители для строк матрицы  $\Phi$  можно вычислять и сохранять после каждого обновления матрицы  $\Phi$ . Рассмотренная модификация EM-алгоритма позволяет тематизировать новые документы максимально быстро.

**Тематизация локальных контекстов.** Формула  $\theta_{td}(\Phi)$  определяет тематический вектор  $p(t|d)$  документа  $d = \{w_1, \dots, w_{n_d}\}$  как средний вектор  $p(t|w)$  всех его слов:

$$\theta_{td}(\Phi) \equiv p(t|d) = \frac{1}{n_d} \sum_{i=1}^{n_d} p(t|w_i).$$

Тематический вектор  $p(t|s)$  произвольного текстового фрагмента  $s$  — слова, словосочетания, фразы, предложения, абзаца, раздела или сегмента — также можно определить как средний вектор  $p(t|w)$  всех его слов.

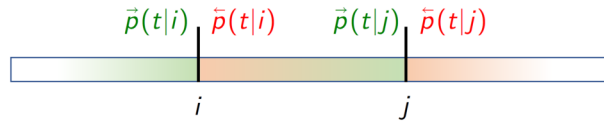
Тематический вектор локального контекста  $p(t|i)$  слова  $w_i$  естественно определить с помощью экспоненциального скользящего среднего (ЭСС). Во-первых, это позволяет учитывать близкие слова с бóльшим весом. Во-вторых, рекуррентные формулы для ЭСС вычислительно очень эффективны. В-третьих, они позволяют оценивать локальные контексты как слева, так и справа от слова  $w_i$ , если пробежать по тексту в двух направлениях, от начала к концу и от конца к началу:

$$\begin{aligned} \vec{p}(t|i) &= \alpha_i \cdot p(t|w_i) + (1 - \alpha_i) \cdot \vec{p}(t|i - 1), & i = 1, \dots, n_d, & \alpha_1 = 1; \\ \tilde{p}(t|i) &= \alpha_i \cdot p(t|w_i) + (1 - \alpha_i) \cdot \tilde{p}(t|i + 1), & i = n_d, \dots, 1, & \alpha_{n_d} = 1. \end{aligned}$$

Для выбора коэффициента сглаживания  $\alpha_i \in [0, 1]$  можно ориентироваться на известную для ЭСС оценку  $\alpha_i \approx \frac{1}{m}$ , где  $m$  — число усредняемых позиций. Например,  $\alpha_i = 0.1$  приблизительно соответствует усреднению по 10 словам. Коэффициент  $\alpha_i$  можно менять в зависимости от позиции  $i$ . Его увеличение вплоть до  $\alpha_i = 1$  позволяет «забыть» накопленную к данному моменту информацию о контексте, например, при переходе через границу разделов секционированного документа. Уменьшение  $\alpha_i$  вплоть до нуля позволяет уменьшать вес данного слова, например, если это стоп-слово или слово общей лексики.

Зная тематические векторы левого и правого контекста  $\vec{p}(t|i)$  и  $\tilde{p}(t|i)$  для каждой словопозиции  $i$ , можно отвечать на многие вопросы о тематической структуре текста и любых его фрагментов.

Рассмотрим *двунаправленные тематические векторы* пары слов  $w_i$  и  $w_j$ :



Тематика двустороннего контекста слова  $w_i$  оценивается как среднее арифметическое левого и правого контекста:

$$p(t|i) = \frac{1}{2}(\vec{p}(t|i) + \tilde{p}(t|i)).$$

Тематика короткого сегмента  $[i \dots j]$  оценивается как среднее арифметическое правого контекста его начала  $i$  и левого контекста его конца  $j$ :

$$p(t|i \dots j) = \frac{1}{2}(\tilde{p}(t|i) + \vec{p}(t|j)).$$

Тематическая однородность сегмента  $[i \dots j]$  оценивается тем, насколько схожи распределения  $\tilde{p}(t|i)$  и  $\vec{p}(t|j)$ .

Позиции  $i$  границ между тематическими сегментами длинного текстового документа характеризуются тем, насколько различны распределения  $\vec{p}(t|i)$  и  $\tilde{p}(t|i)$ .

Анализ отклонений коротких и длинных ЭСС, соответственно при больших и малых  $\alpha_i$ , позволяет определить, содержит ли текст вкрапления тематически разнородных фрагментов, и где они находятся.

## 16 Критерии качества тематических моделей

Критерии качества тематических моделей принято делить на внутренние (intrinsic) и внешние (extrinsic). *Внутренние критерии* характеризуют качество модели по исходной текстовой коллекции. *Внешние критерии* оценивают полезность модели с точки зрения приложения и конечных пользователей. Иногда для этого приходится собирать дополнительные данные, например, оценки ассессоров.

На практике к тематическим моделям предъявляются различные наборы требований, а для построения модели применяется многокритериальная оптимизация. Поэтому и качество модели должно оцениваться по многим критериям.

В ARTM избыточная регуляризация может приводить к деградации модели. Обратно говоря, регуляризаторы, как лекарства для модели, требуют подбора терапевтической дозы воздействия (коэффициента регуляризации), а в случае передозировки могут приводить к вырождению модели. Для обнаружения каждого типа вырожденности нужны свои критерии качества.

В проекте BigARTM поддерживается библиотека стандартных метрик качества и предусмотрены механизмы добавления новых пользовательских метрик.

**Внешние критерии** весьма разнообразны и зависят от конечной решаемой задачи. Практически в каждой публикации по тематическому моделированию используется какой-либо внешний критерий: качество классификации документов [142], точность и полнота информационного поиска [187, 21, 9, 19], число найденных хорошо интерпретируемых тем [24], качество сегментации текстов [139]. В [46] предлагается методика диагностики тематических моделей, основанная на сопоставлении найденных тем со специальными наборами взаимосвязанных слов, называемыми *концептами*.

**Перплексия.** Наиболее распространённым внутренним критерием является *перплексия* (perplexity), используемая для оценивания вероятностных моделей языка в компьютерной лингвистике. Это мера несоответствия или «удивлённости» модели  $p(w|d)$  термам  $w$ , которые встречаются в документах  $d$ . Она определяется через log-правдоподобие (13), либо через log-правдоподобие (38) каждой модальности  $m$ :

$$\mathcal{P}_m(D; p) = \exp\left(-\frac{1}{n_m} \sum_{d \in D} \sum_{w \in W^m} n_{dw} \ln p(w|d)\right), \quad (88)$$

где  $n_m = \sum_{d \in D} \sum_{w \in W^m} n_{dw}$  — длина коллекции по  $m$ -й модальности. Чем меньше перплексия, тем лучше модель  $p$  предсказывает появление термов  $w$  в документах  $d$ .

Перплексия имеет следующую интерпретацию. Если термы  $w$  порождаются из равномерного распределения  $p(w) = 1/V$  на словаре мощности  $V$ , то перплексия языковой модели  $p(w)$  на таком тексте сходится к  $V$  с ростом его длины. Чем сильнее



распределение  $p(w)$  отличается от равномерного, тем меньше перплексия. В случае условных вероятностей  $p(w|d)$  интерпретация немного другая: если каждый документ генерируется из  $V$  равновероятных термов (возможно, различных в разных документах), то перплексия сходится к  $V$ .

Недостатком перплексии является неочевидность её численных значений, а также её зависимость не только от качества модели, но и от размерных характеристик коллекции — длины документов, мощности словаря, разреженности вероятностного распределения термов. В частности, с помощью перплексии некорректно сравнивать тематические модели одной и той же коллекции, построенные на разных словарях.

Обозначим через  $p_D(w|d)$  модель, построенную по обучающей коллекции документов  $D$ . Перплексия обучающей выборки  $\mathcal{P}_m(D; p_D)$  является оптимистично смещённой (заниженной) характеристикой качества модели из-за эффекта переобучения. Обобщающую способность тематических моделей принято оценивать *перплексией контрольной выборки* (hold-out perplexity)  $\mathcal{P}_m(D'; p_D)$ . Обычно коллекцию разделяют на обучающую и контрольную случайным образом в пропорции 9 : 1 [37].

В ранних экспериментах было показано, что LDA существенно превосходит PLSA по перплексии, откуда был сделан вывод, что LDA меньше переобучается [37]. Позже было показано, что на больших коллекциях перплексия моделей PLSA и LDA отличается незначительно [103, 183, 98].

На самом деле природа «переобучения» больше связана с особенностями перплексии, чем с качеством самих моделей. Перплексия чувствительна к малым значениям предсказанной вероятности термов, поскольку  $p(w|d)$  стоит под логарифмом. Сглаживание в LDA завышает оценки вероятностей редких термов, поэтому LDA имеет меньшую контрольную перплексию. Моделирование вероятности редких слов важно для статистического машинного перевода и других приложений компьютерной лингвистики, откуда перплексия и пришла в тематическое моделирование. Однако для понимания тематической кластерной структуры текстовой коллекции и выявления тематики отдельных документов редкие термы как раз наименее важны.

В [5, 133] были предложены *робастные тематические модели*, описывающие редкие термы специальным «фоновым» распределением. Контрольная перплексия робастных вариантов PLSA и LDA оказалась существенно меньшей и практически одинаковой.

В [6] было показано, что на достаточно больших коллекциях ( $n > 10^6$ ) обучающая и контрольная перплексия одинаково ранжируют сравниваемые модели, то есть приводят к одинаковым качественным выводам. Таким образом, для сравнения моделей нет особой необходимости вычислять контрольную перплексию.

При вычислении перплексии может возникнуть проблема нулевой вероятности  $p(w|d) = 0$ . Терм  $w$  в документе  $d$  встречается, тем не менее, модель предсказывает для него нулевую вероятность. В частности, при вычислении контрольной перплексии в документе может встретиться новый терм, который ни разу не встретился при обучении. В таких случаях в перплексии возникает бесконечно большое слагаемое ( $-\ln 0 = +\infty$ ). Простейшее решение этой проблемы заключается в том, чтобы проигнорировать все такие термы и посчитать их долю в коллекции как ещё одну меру качества модели. Другое решение — следуя [6], считать все такие термы нетематическими и описывать их вероятность частотной оценкой  $p(w|d) = \frac{n_w}{n}$ . Похожий результат получится при использовании тематической модели с необучаемой фоно-

вой темой  $p(w|b) = \frac{n_w}{n}$ . Такая модель никогда не будет давать нулевую вероятность термина, если, конечно, вероятность фоновой темы в документе не равна нулю.

**Интерпретируемость** тематической модели является плохо формализуемым требованием. Содержательно оно означает, что по спискам наиболее частотных слов и документов темы эксперт может понять, о чём эта тема, и дать ей адекватное название [41]. Примеры хорошо интерпретируемых тем показаны на рис. 13 и рис. 21. Свойство интерпретируемости важно в информационно-поисковых системах, использующих автоматически найденные темы как инструмент визуализации результатов поиска, например для вывода пояснений или сниппетов, либо как инструмент рубрикации или навигации по текстовой коллекции.

Большинство существующих методов оценивания интерпретируемости основано на привлечении экспертов-ассессоров. В [119] экспертам предлагалось непосредственно оценивать полезность тем по трёхбалльной шкале, рассматривая списки слов, ранжированные по убыванию  $p(w|t)$ . В *методе интрузий* [41] для каждой темы составляется список из 10 верхних слов списка, в который искусственно внедряется одно случайное слово. Тема считается интерпретируемой, если подавляющее большинство экспертов правильно указывают лишнее слово.

В прикладных социологических исследованиях [38, 82, 124] для экспертного оценивания темы используются не только списки верхних слов, но и списки документов, ранжированные по убыванию  $p(d|t)$ . Эта методика более трудоёмка, поскольку эксперт прочитывает документы. Но она более надёжна в тех случаях, когда прикладной целью тематического моделирования является поиск тем определённой направленности (например, обсуждений межэтнических отношений в социальных сетях), затем качественное понимание семантики каждой темы (в частности, какие этничности и какие проблемы затрагивает каждая тема), и наконец количественное оценивание объёма данной темы (где, когда и как часто возникает данный дискурс) [23, 24].

**Когерентность.** Экспертные подходы необходимы на стадии исследований, но они затрудняют автоматическое построение хороших тематических моделей. В серии работ [119, 120, 121, 113] было показано, что среди критериев качества, вычисляемых по коллекции автоматически, согласованность или *когерентность* (coherence) лучше всего коррелирует с экспертными оценками интерпретируемости.

Тема называется *когерентной* (согласованной), если термины, наиболее частые в данной теме, неслучайно часто совместно встречаются рядом в документах коллекции [120, 121]. Численной мерой когерентности темы  $t$  является *поточечная взаимная информация* (69), вычисляемая по  $k$  наиболее вероятным словам темы:

$$\mathcal{C}_t = \frac{2}{k(k-1)} \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i}^k \text{PMI}(w_i, w_j), \quad (89)$$

где  $w_i$  —  $i$ -й терм в порядке убывания  $\varphi_{wt}$ , число  $k$  обычно полагается равным 10.

Когерентность модели определяется как средняя когерентность  $\mathcal{C}_t$  по всем темам. Когерентность может оцениваться по сторонней коллекции (например, по Википедии) [117], либо по той же коллекции, по которой строится модель [113].

**Разреженность и лексические ядра тем.** Разреженность модели измеряется долей нулевых элементов в матрицах  $\Phi$  и  $\Theta$ . В моделях, разделяющих множество тем  $T$  на предметные  $S$  и фоновые  $B$ , разреженность оценивается только по столбцам  $\Phi$  и строкам  $\Theta$ , соответствующим предметным темам.

Недостаток такого определения разреженности в его неустойчивости. На практике матрицы  $\Phi$  и  $\Theta$  могут содержать большую долю значений, близких к нулю. Их обнуление практически не повлияет на модель, но резко повысит разреженность.

В [82] предлагается считать *существенными* лишь те условные вероятности, значения которых выше, чем у равномерного распределения:

$$W_t = \{w \in W \mid \varphi_{wt} > \frac{1}{|W|}\};$$

$$T_d = \{t \in T \mid \theta_{td} > \frac{1}{|T|}\}.$$

В экспериментах на 300 тысячах постов социальной сети при 120 темах разреженность  $\Phi$  превысила 96%, разреженность  $\Theta$  — 88%. При этом число слов, вошедших хотя бы в одно из множеств  $W_t$ , оказалось равным 8 тысячам при словаре 154 тысячи слов. Таким образом, недостатком данного подхода можно считать игнорирование большинства слов.

В [164] предлагается определять *лексическое ядро темы* как множество слов, которые с большой вероятностью употребляются в теме  $t$  и редко употребляются в других темах:  $W_t = \{w \in W \mid p(t|w) > 0.25\}$ , где  $p(t|w) = \varphi_{wt} \frac{n_t}{n_w}$ .

Независимо от того, каким образом определяется лексическое ядро, введём несколько показателей, характеризующих разреженность матрицы  $\Phi$ :

$$\text{ker}_t = |W_t| - \text{размер ядра (оптимум немного выше } \frac{|W|}{|T|}\text{)};$$

$$\text{pur}_t = \sum_{w \in W_t} p(w|t) - \text{чистота темы (чем выше, тем лучше)};$$

$$\text{con}_t = \frac{1}{|W_t|} \sum_{w \in W_t} p(t|w) - \text{контрастность темы (чем выше, тем лучше)};$$

$$\text{logLift}_t = \frac{1}{|W_t|} \sum_{w \in W_t} \log \frac{p(w|t)}{p(w)} - \text{подъём темы (чем выше, тем лучше)}.$$

Для модели в целом эти показатели определяются путём усреднения по всем предметным темам  $t \in S$ . Косвенно они являются также и мерой интерпретируемости модели, поскольку интерпретируемые темы должны обладать не слишком маленьким, но и не слишком большим лексическим ядром.

Логарифмический критерий чистоты (подъём) темы  $\text{logLift}$  показывает, на сколько порядков частота термов из лексического ядра темы превышает их обычную частоту в коллекции  $p(w)$ . Он был предложен в [154] для сортировки термов при визуализации темы в пользовательском интерфейсе. В [59] было предложено усреднять  $\text{logLift}$  по  $k = 30$  ключевым словам в каждой теме. Было показано, что средний  $\text{logLift}$  связан с долей информативных слов в темах, и что он значимо коррелирует с экспертными оценками качества тем.

**Доля фоновой лексики.** Пусть  $B \subset T$  — подмножество фоновых тем, в которых собрана общеупотребительная лексика. Определим *долю фоновой лексики* для всей

коллекции и для отдельного документа  $d$ :

$$\mathcal{B} = \frac{1}{n} \sum_{d \in D} \sum_{w \in d} \sum_{t \in B} n_{dw} p(t|d, w);$$

$$\mathcal{B}_d = \frac{1}{n_d} \sum_{w \in d} \sum_{t \in B} n_{dw} p(t|d, w).$$

Доля фоновой лексики принимает значения от 0 до 1. Если она близка к 0, то модель не способна выделять слова общей лексики, если же она близка к 1, то это свидетельствует о вырождении модели. В профессиональных текстах доля фоновой лексики может составлять от 30% до 90%. Возможна ситуация, когда среднее по коллекции значение  $\mathcal{B}$  укладывается в эти ориентировочные нормы, однако  $\mathcal{B}_d$  выходит за их пределы для значительной доли документов. Это может послужить сигналом к очистке коллекции или внесению исправлений в модель.

Такие критерии, как разреженность, размер ядра или доля фоновой лексики могут использоваться для контроля избыточного разреживания модели.

**Различность тем.** Введём функцию расстояния между темами  $\rho(t, s)$  как распределениями  $p(w|t)$  и  $p(w|s)$ , то есть столбцами матрицы  $\Phi$ . Определим для каждой темы  $t$  расстояние до ближайшей к ней темы  $s$ :

$$\mathcal{R}_t = \min_{s \in T \setminus t} \rho(t, s).$$

Если расстояние  $\mathcal{R}_t$  до ближайшей темы  $s$  близко к нулю, то темы  $t$  и  $s$  можно считать дубликатами. Возможно, эти темы следовало бы объединить.

Если расстояния  $\mathcal{R}_t$  велики для всех тем, то это означает, что все темы попарно существенно различны, то есть модель *хорошо декоррелирована*.

Расстояния между темами как столбцами матрицы  $\Phi$  можно определять по-разному. Обычно используется одно из следующих расстояний:

$$\rho(t, s) = 1 - \frac{\sum_w \varphi_{ws} \varphi_{wt}}{(\sum_w \varphi_{ws}^2)^{1/2} (\sum_w \varphi_{wt}^2)^{1/2}} \quad \text{— косинусное расстояние;} \quad (90)$$

$$\rho(t, s) = \left( \frac{1}{2} \sum_w (\sqrt{\varphi_{ws}} - \sqrt{\varphi_{wt}})^2 \right)^{1/2} \quad \text{— расстояние Хеллингера;} \quad (91)$$

$$\rho(t, s) = 1 - |W_t \cap W_s| : |W_t \cup W_s| \quad \text{— расстояние Жаккара;} \quad (92)$$

где  $W_t$  и  $W_s$  — лексические ядра тем, согласно одному из определений выше.

## 17 Критерии условной независимости

Гипотеза условной независимости является базовым предположением вероятностного тематического моделирования. При построении вероятностных моделей по эмпирическим данным базовые допущения принято проверять после того, как модель построена. Например, анализ регрессионных остатков содержит в своём арсенале десятки тестов для проверки статистических гипотез о свойствах остатков — независимости, некоррелированности, равенства математического ожидания нулю, гауссовости, постоянства дисперсии, и т. д. Статистический анализ вероятностных тематических моделей не настолько хорошо разработан, хотя есть отдельные работы в этом

направлении [171, 109, 59]. В данном разделе мы введём семейство средневзвешенных статистик, позволяющих измерять семантическую однородность и загрознённость темы, согласованность документа с темой или терма с темой. Неожиданно обнаружится, что перплексия тоже принадлежит этому семейству статистик.

**Гипотеза условной независимости** допускает три эквивалентных представления:

$$p(w, d | t) = p(w | t) p(d | t); \quad (93)$$

$$p(w | d, t) = p(w | t); \quad (94)$$

$$p(d | w, t) = p(d | t). \quad (95)$$

На практике все эти распределения неизвестны. После построения модели (и на каждом шаге EM-алгоритма) доступны лишь оценки этих распределений. В каждом из трёх равенств распределение в правой части оценивается по большему объёму данных, чем распределение в левой части. Поэтому в качестве нулевой гипотезы будем брать предположение, что эмпирическое распределение в левой части порождается (согласуется с) вероятностной моделью из правой части.

Несмотря на формальную эквивалентность, три представления (93), (94), (95) приводят к различным конструкциям статистических тестов с разными возможностями применения. Рассмотрим их подробнее.

1. Равенство (93) трансформируется в нулевую гипотезу о том, что для заданной темы  $t$  совместное распределение термов в документах порождается факторизованным распределением:

$$H_0 : \hat{p}(w, d | t) \sim p(w | t) p(d | t). \quad (96)$$

Для проверки данной гипотезы можно использовать статистику взаимной информации, предложенную в [109]:

$$S_t = \text{KL}(\hat{p}(w, d | t) \parallel p(w | t) p(d | t)) = \sum_{d \in D} \sum_{w \in d} \hat{p}(w, d | t) \ln \frac{\hat{p}(w, d | t)}{p(w | t) p(d | t)}.$$

Для получения удобной вычислительной формулы воспользуемся определением условной вероятности:  $\hat{p}(w, d | t) = p(t | d, w) \hat{p}(w | d) \frac{p(d)}{p(t)}$ ,  $p(d | t) = p(t | d) \frac{p(d)}{p(t)}$ , формулой Е-шага (16) и частотной оценкой условной вероятности  $\hat{p}(w, d | t) = \frac{n_{tdw}}{n_t}$ . Подставим полученные выражения в  $S_t$ :

$$\begin{aligned} \frac{\hat{p}(w, d | t)}{p(w | t) p(d | t)} &= \frac{p(t | d, w) \hat{p}(w | d)}{p(w | t) p(t | d)} = \frac{p_{tdw}}{\varphi_{wt} \theta_{td}} \hat{p}(w | d) = \frac{\hat{p}(w | d)}{p(w | d)}; \\ S_t &= \sum_{d \in D} \sum_{w \in d} \frac{n_{tdw}}{n_t} \ln \frac{\hat{p}(w | d)}{p(w | d)} = \text{avg}_{d, w} \left( n_{tdw}, \ln \frac{\hat{p}(w | d)}{p(w | d)} \right), \end{aligned} \quad (97)$$

где  $\text{avg}_{i \in I}(\gamma_i, x_i) = \frac{\sum_{i \in I} \gamma_i x_i}{\sum_{i \in I} \gamma_i}$  — средневзвешенное значений  $x_i$  с весами  $\gamma_i$ ,  $i \in I$ .

Статистика  $S_t$  равна средневзвешенному значению логарифмической функции потерь  $\ell(w, d) = \ln \frac{\hat{p}(w | d)}{p(w | d)}$  по всем термам  $w$  всех документов  $d$ , взятым с весами  $n_{tdw}$ .

Функция  $\ell(w, d)$  положительна, когда  $p(w | d) < \hat{p}(w | d)$ . Потеря тем выше, чем хуже тематическая модель предсказывает вероятность появления терма в документе  $p(w | d)$  по сравнению с тривиальной частотной оценкой  $\hat{p}(w | d) = \frac{n_{dw}}{n_d}$ .

Статистика  $S_t$  является мерой семантической неоднородности темы  $t$ . Если в модели оказалось слишком много семантически неоднородных тем, то целесообразно построить другую модель, увеличив число тем. Темы с аномально большими значениями  $S_t$  могут в дальнейшем расщепляться на более мелкие темы в иерархических тематических моделях.

2. Равенство (94) трансформируется в нулевую гипотезу о том, что эмпирическое распределение термов темы  $t$  в документе  $d$  порождается общим для всех документов распределением термов:

$$H_0 : \hat{p}(w|d, t) \sim p(w|t). \quad (98)$$

Для проверки данной гипотезы относительно фиксированного документа  $d$  введём статистику на основе KL-дивергенции и, опуская аналогичные выкладки, запишем её через средневзвешенное логарифмической функции потерь:

$$S_{td} = \text{KL}(\hat{p}(w|d, t) \parallel p(w|t)) = \text{avg}_{w \in d} \left( n_{tdw}, \ln \frac{\hat{p}(w|d)}{p(w|d)} \right). \quad (99)$$

Статистика  $S_{td}$  является мерой несогласованности документа  $d$  с темой  $t$ .

Чем больше значение  $S_{td}$ , тем сильнее документ  $d$  отклоняется от семантически однородного кластера темы  $t$ . Статистика  $S_{td}$  может применяться для отбора релевантных документов при суммаризации или визуализации темы, удаления нетематизируемых или «грязных» документов, выбора числа итераций по документу, выделения документов для формирования начальных приближений новых тем.

3. Равенство (95) трансформируется в нулевую гипотезу о том, что эмпирическое распределение термина  $w$  по документам в теме  $t$  порождается общим для всех термов распределением темы по документам:

$$H_0 : \hat{p}(d|w, t) \sim p(d|t). \quad (100)$$

Для проверки данной гипотезы относительно фиксированного термина  $w$  введём статистику на основе KL-дивергенции. Снова опуская выкладки, запишем её через средневзвешенное логарифмической функции потерь:

$$S_{wt} = \text{KL}(\hat{p}(d|w, t) \parallel p(d|t)) = \text{avg}_{d \in D} \left( n_{tdw}, \ln \frac{\hat{p}(w|d)}{p(w|d)} \right). \quad (101)$$

Статистика  $S_{wt}$  является мерой несогласованности термина  $w$  с темой  $t$ .

Аномально высокие значения  $S_{wt}$  говорят о том, что терм относится к общеупотребительной лексике. Для выделения таких термов в фоновые темы можно усилить регуляризаторы декоррелирования и сглаживания [165]. Аномально низкие значения  $S_{wt}$  говорят о том, что терм  $w$  является обязательным в теме и входит в её семантическое ядро. Темы, содержащие большое число таких термов, могут быть образованы шаблонными фразами, часто повторяющимися в текстах коллекции [109].

Для проверки статистической гипотезы об условной независимости значение статистики  $S_*$  преобразуется в достигаемый уровень значимости  $p\text{-value} = F(S_*)$ , где  $F$  — функция распределения статистики  $S_*$ , полученная в условиях истинности нулевой гипотезы. Если достигаемый уровень значимости близок к единице, то делается вывод, что данные противоречат нулевой гипотезе. Функция распределения  $F(S_*)$  строится по синтетической коллекции, генерируемой путём сэмплирования термов  $w \sim p(w|d)$  тематической моделью [18].

**Обобщённые средневзвешенные статистики.** Обобщим введённые выше статистики  $S_t$ ,  $S_{td}$ ,  $S_{wt}$  на случай произвольной функции потерь  $\ell(d, w)$ :

$$\begin{aligned} S_t &= \operatorname{avg}_{d,w} (n_{tdw}, \ell(d, w)) \text{ — неоднородность темы } t \text{ в коллекции;} \\ S_{td} &= \operatorname{avg}_{w \in d} (n_{tdw}, \ell(d, w)) \text{ — несогласованность документа } d \text{ с темой } t; \\ S_{wt} &= \operatorname{avg}_{d \in D} (n_{tdw}, \ell(d, w)) \text{ — несогласованность термина } w \text{ с темой } t. \end{aligned}$$

При логарифмической функции потерь  $\ell(d, w) = \ln \frac{\hat{p}(w|d)}{p(w|d)}$  обобщённые статистики  $S_t$ ,  $S_{td}$ ,  $S_{wt}$  переходят в (97), (99), (101) соответственно.

В общем случае от функции потерь потребуем, чтобы она не зависела от темы и чтобы значение  $\ell(d, w)$  было тем выше, чем хуже тематическая модель предсказывает появление термина  $w$  в документе  $d$ .

Далее рассмотрим несколько частных случаев этой общей конструкции.

**Меры несогласованности, толерантные к повторяемости слов.** Гипотеза условной независимости является избыточно сильным предположением. Некоторые языковые явления могут формально её нарушать, не приводя к семантической неоднородности. Например, явление *повторяемости слов* (word burstiness) — если слово встретилось в тексте один раз, то оно с большой вероятностью встретится ещё [55, 90]. Тема может содержать много синонимов, из которых каждый автор употребляет лишь некоторые. Тема может обладать несколькими аспектами, каждый со своей лексикой, однако в тексте может идти речь только о части аспектов. Вследствие этих явлений в документе может встретиться намного меньше слов темы, при этом некоторые из них будут встречаться намного чаще, чем можно было бы ожидать в условиях строгого выполнения гипотезы условной независимости.

Статистики  $S_t$ ,  $S_{td}$ ,  $S_{wt}$  нетрудно сделать толерантными к повторяемости слов, если заменить частоты слов в документах бинарными индикаторами:  $n_{dw} := [n_{dw} \geq 1]$ . Для этого достаточно вместо весов  $n_{tdw} = n_{dw} p_{tdw}$  взять веса  $p_{tdw}$ :

$$S_t = \operatorname{avg}_{d,w} (p_{tdw}, \ell(d, w)); \quad S_{td} = \operatorname{avg}_{w \in d} (p_{tdw}, \ell(d, w)); \quad S_{wt} = \operatorname{avg}_{d \in D} (p_{tdw}, \ell(d, w)).$$

Чтобы функцию потерь также сделать толерантной к повторяемости, будем сравнивать модельную вероятность  $p(w|d)$  с частотной оценкой  $\hat{p}(w|d) = \frac{n_{dw}}{n_d}$ , в которой счётчик  $n_{dw}$  заменён единицей или, для общности, параметром  $\alpha$  (уменьшение  $\alpha$  делает статистики ещё более толерантными к нарушениям нулевой гипотезы):

$$\ell(d, w) = [p(w|d) < \frac{\alpha}{n_d}].$$

Теперь статистики  $S_t$ ,  $S_{td}$ ,  $S_{wt}$  принимают значения из отрезка  $[0, 1]$  и выражают долю термов темы  $t$ , для которых модель предсказывает слишком малую вероятность. Благодаря столь универсальной интерпретации статистики с бинарной функцией потерь можно использовать для сравнения тем в моделях с различным числом тем, с различными словарями и даже построенных по различным коллекциям.

**Перплексия темы.** Заметим, что логарифм перплексии тематической модели можно записать через средневзвешенную функцию потерь  $\ell(d, w) = \ln \frac{1}{p(w|d)}$ , причём как для всей коллекции, так и для отдельного документа:

$$\begin{aligned}\ln \mathcal{P} &= \text{avg}_{d,w,t} \left( n_{tdw}, \ln \frac{1}{p(w|d)} \right) = \text{avg}_{d,w} \left( n_{dw}, \ln \frac{1}{p(w|d)} \right); \\ \ln \mathcal{P}_d &= \text{avg}_{w,t} \left( n_{tdw}, \ln \frac{1}{p(w|d)} \right) = \text{avg}_{w \in d} \left( n_{dw}, \ln \frac{1}{p(w|d)} \right).\end{aligned}$$

По аналогии определим через обобщённые средневзвешенные логарифм *перплексии темы*  $t$  как по всей коллекции, так и по отдельному документу:

$$\begin{aligned}\ln \mathcal{P}_t &= S_t = \text{avg}_{d,w} \left( n_{tdw}, \ln \frac{1}{p(w|d)} \right); \\ \ln \mathcal{P}_{td} &= S_{td} = \text{avg}_{w \in d} \left( n_{tdw}, \ln \frac{1}{p(w|d)} \right).\end{aligned}$$

Значение перплексии  $\mathcal{P}_{td}$  не определено, если  $n_{tdw} = 0$  для всех  $w \in d$ , то есть если тема полностью отсутствует в документе.

**Дивергенция Кресси–Рида.** При функции потерь

$$\ell(d, w) = \frac{1}{\lambda(\lambda + 1)} \left( \left( \frac{\hat{p}(w|d)}{p(w|d)} \right)^\lambda - 1 \right)$$

обобщённые средневзвешенные статистики переходят в дивергенцию Кресси–Рида. Это параметрическое семейство статистик используется в качестве обобщения статистики хи-квадрат Пирсона для проверки гипотезы о согласии эмпирического распределения с заданным дискретным распределением [48].

При конкретных значениях параметра  $\lambda$  дивергенция Кресси–Рида переходит (с точностью до множителя) в статистику хи-квадрат Пирсона ( $\lambda = 1$ ), дивергенцию Кульбака–Лейблера ( $\lambda \rightarrow 0$ ), статистику Фримана–Тьюки или расстояние Хеллингера ( $\lambda = -\frac{1}{2}$ ), модифицированную статистику логарифма отношения правдоподобий ( $\lambda \rightarrow -1$ ), модифицированную статистику хи-квадрат Неймана или взвешенное евклидово расстояние ( $\lambda = -2$ ). Все эти статистики являются несимметричными (за исключением расстояния Хеллингера) функциями пары дискретных распределений.

Преимущество такой параметризации в том, что свободой выбора параметра  $\lambda$  можно распорядиться для оптимизации какого-либо внешнего критерия качества.

## 18 Особенности реализации EM-алгоритма

EM-алгоритм в тематическом моделировании — это метод простых итераций для решения системы уравнений вида (16)–(18) в случае обычной двухматричной модели или (40)–(42) для мультимодальной модели или (52)–(54) для гиперграфовой модели. Реализации итерационного процесса могут отличаться порядком вычислений по формулам E-шага и M-шага. В рациональном варианте (Алгоритм 2, стр. 13) каждая итерация выполняется за один проход по всем термам всех документов, в результате которого формируются счётчики  $n_{wt}$ ,  $n_{td}$  и обновляются параметры модели  $\varphi_{wt}$ ,  $\theta_{td}$ . В данном разделе обсуждаются приёмы улучшения сходимости и особенности организации этого итерационного процесса для больших текстовых коллекций.



---

**Алгоритм 5.** Оффлайнный и онлайнный EM-алгоритм для ARTM.

---

- 1 **функция**  $(\tilde{n}_{wt}) := \text{ProcessBatches}$  (множество пакетов  $\{D_b\}$ , матрица  $\Phi$ );
  - 2  $\tilde{n}_{wt} := 0$  для всех  $w \in W$ ,  $t \in T$ ;
  - 3 **для всех** пакетов  $D_b$ , **всех** документов  $d \in D_b$
  - 4     инициализировать  $\theta_{td} := \frac{1}{|T|}$  для всех  $t \in T$ ;
  - 5     **повторять**
  - 6          $n_{tdw} := n_{dw} \text{norm}_{t \in T}(\varphi_{wt} \theta_{td})$  для всех  $w \in d$ ,  $t \in T$ ;
  - 7          $\theta_{td} := \text{norm}_{t \in T} \left( \sum_{w \in d} n_{tdw} + \theta_{td} \frac{\partial R}{\partial \theta_{td}} \right)$  для всех  $t \in T$ ;
  - 8     **пока**  $\theta_d$  не сойдётся;
  - 9      $\tilde{n}_{wt} := \tilde{n}_{wt} + n_{tdw}$  для всех  $w \in d$ ,  $t \in T$ ;
  
  - 10 **функция**  $\text{FitOffline}$  (коллекция  $D = \{D_b: b \in B\}$ );
  - 11 инициализировать  $\varphi_{wt}$  для всех  $w \in W$ ,  $t \in T$ ;
  - 12 **повторять**
  - 13      $(n_{wt}) := \sum_{b=1}^B \text{ProcessBatches}(D_b, \Phi)$ ;
  - 14      $\varphi_{wt} := \text{norm}_{w \in W} \left( n_{wt} + \varphi_{wt} \frac{\partial R}{\partial \varphi_{wt}} \right)$  для всех  $w \in W$ ,  $t \in T$ ;
  - 15 **пока**  $\Phi$  не сойдётся;
  
  - 16 **функция**  $\text{FitOnline}$  (коллекция  $D = \{D_b: b \in B\}$ , параметры  $k_{\text{decay}}, k_{\text{apply}}, h$ );
  - 17 инициализировать  $\varphi_{wt}$  для всех  $w \in W$ ,  $t \in T$ ;
  - 18  $n_{wt} := 0$  для всех  $w \in W$ ,  $t \in T$ ;
  - 19 **для**  $i := 1, \dots, B/h$
  - 20      $(\tilde{n}_{wt}) := \text{ProcessBatches}(\{D_{hi-h+1}, \dots, D_{hi}\}, \Phi)$ ;
  - 21      $n_{wt} := k_{\text{decay}} n_{wt} + k_{\text{apply}} \tilde{n}_{wt}$  для всех  $w \in W$ ,  $t \in T$ ;
  - 22      $\varphi_{wt} := \text{norm}_{w \in W} \left( n_{wt} + \varphi_{wt} \frac{\partial R}{\partial \varphi_{wt}} \right)$  для всех  $w \in W$ ,  $t \in T$ ;
- 

**Пакетный алгоритм** позволяет обрабатывать коллекции документов, не помещающиеся в оперативную память. Коллекция  $D$  разбивается на пакеты  $D_b$ ,  $b = 1, \dots, B$ , каждый из которых хранится в отдельном файле. Пакеты обрабатываются по очереди. Каждый пакет загружается в память, обновляет матрицу  $\Phi$  и выгружается, освобождая память для обработки следующего пакета.

Функция  $\text{ProcessBatches}$  обрабатывает за один раз множество пакетов  $\{D_b\}$ , см. Алгоритм 5. Для каждого документа  $d$  каждого из пакетов  $D_b$  производятся итерации вектора  $\theta_d$  со встроенным E-шагом при фиксированной матрице  $\Phi$ . На последней итерации документа обновляются счётчики  $\tilde{n}_{wt}$  текущего пакета.

Оффлайнный и онлайнный алгоритм — это две разные стратегии агрегирования счётчиков, полученных от разных пакетов, в итоговых счётчиках  $n_{wt}$ .

**Оффлайнный алгоритм**  $\text{FitOffline}$  совершает много проходов по коллекции. На каждом проходе счётчики  $n_{wt}$  формируются при фиксированной матрице  $\Phi$  и суммируются по всем документам. Обновление  $\Phi$  с учётом всех регуляризаторов произ-

водится в конце каждого прохода коллекции. Оффлайновый режим ориентирован на обработку относительно небольших коллекций.

**Онлайновый алгоритм** FitOnline был предложен для модели LDA в [67], позже для модели PLSA в [29]. Он реализован в библиотеках машинного обучения `Vowpal Wabbit`, `Gensim`, `BigARTM` и других, и считается наиболее эффективным методом обучения тематических моделей. Его основная идея заключается в специальной организации последовательности вычислений по формулам E-шага и M-шага. Она не затрагивает механизмы регуляризации и одинаково применима к PLSA, LDA и ARTM. Онлайновый алгоритм делает один проход по коллекции, обновляя матрицу  $\Phi$  после каждых  $h$  пакетов: на шаге 21 счётчики  $\tilde{n}_{wt}$ , накопленные по  $h$  последним пакетам, суммируются со счётчиками  $n_{wt}$ , накопленными по всем предыдущим пакетам, с весами  $k_{\text{decay}}$  и  $k_{\text{apply}}$ . На шаге 22 матрица  $\Phi$  пересчитывается по обновлённым счётчикам с учётом регуляризаторов. Онлайновый алгоритм ориентирован на обработку больших коллекций или потоков данных.

Весовые коэффициенты  $k_{\text{decay}}$  и  $k_{\text{apply}}$  позволяют управлять темпом забывания предыдущих пакетов. Переменная  $n_{wt}$  накапливает сумму значений  $\tilde{n}_{wt}$  при  $k_{\text{decay}} = k_{\text{apply}} = 1$ , среднее арифметическое при  $k_{\text{decay}} = 1 - \frac{1}{i}$ ,  $k_{\text{apply}} = \frac{1}{i}$ , экспоненциальное скользящее среднее при  $k_{\text{decay}} + k_{\text{apply}} = 1$ . Для алгоритма Online LDA в [67] предлагалось брать  $k_{\text{decay}} = 1 - \rho_i$ ,  $k_{\text{apply}} = \rho_i$ , где  $\rho_i = (\tau_0 + i)^{-\kappa}$ , значение  $\tau_0$  задаются в диапазоне от 64 до 1024, значения  $\kappa$  — от 0.5 до 0.7.

На практике вместо контроля условий сходимости на шаге 8 и шаге 15 часто задают фиксированное число итераций по коллекции и по каждому документу.

В онлайн-алгоритме разбиение коллекции на пакеты и порядок обработки пакетов могут влиять на результат, в отличие от оффлайнового алгоритма. Чтобы уменьшить это влияние, коллекцию разбивают на пакеты случайным образом.

**Параллельный алгоритм.** Обработка пакетов может выполняться параллельно в несколько потоков как в онлайн-алгоритме, так и в оффлайновом. В *синхронном алгоритме* обработка следующей порции пакетов не начинается, пока не завершено обновление матрицы  $\Phi$  на шагах 21–22. Эти задержки приводят к неэффективной загрузке вычислительных ресурсов. Проблема решается в *асинхронном онлайн-алгоритме* с помощью обновлений с запаздыванием [62]. Пока один процесс занят формированием нового приближения матрицы  $\Phi$ , остальные процессы продолжают использовать её предыдущее приближение для обработки пакетов и обновления счётчиков  $\tilde{n}_{wt}$ .

В обзорной статье [3] описаны 11 технических приёмов для повышения эффективности параллельных алгоритмов тематического моделирования и 14 библиотек, в которых эти приёмы реализованы в различных сочетаниях.

**Улучшение сходимости.** Метод простой итерации в общем случае не гарантирует сходимости к стационарной точке регуляризованного правдоподобия [11]. Этот недостаток исправляется простой модификацией, не требующей дополнительных затрат времени или памяти. Вместо текущих значений  $\varphi_{wt}$  и  $\theta_{td}$  в регуляризационных поправках M-шага надо подставлять их частотные оценки  $\hat{\varphi}_{wt} = \frac{n_{wt}}{n_t}$  и  $\hat{\theta}_{td} = \frac{n_{td}}{n_d}$  —

те самые, которые вычисляются в модели PLSA:

$$\varphi_{wt} = \operatorname{norm}_{w \in W} \left( n_{wt} + \hat{\varphi}_{wt} \frac{\partial R(\hat{\Phi}, \hat{\Theta})}{\partial \varphi_{wt}} \right);$$

$$\theta_{td} = \operatorname{norm}_{t \in T} \left( n_{td} + \hat{\theta}_{td} \frac{\partial R(\hat{\Phi}, \hat{\Theta})}{\partial \theta_{td}} \right).$$

Эксперименты в [11] показали, что данная модификация приводит к более высоким значениям регуляризованного правдоподобия, причём итерационный процесс гораздо быстрее (уже на второй итерации) входит в режим монотонного увеличения регуляризованного правдоподобия. Чем больше коэффициент регуляризации, тем сильнее проявляется эффект улучшения сходимости.

**Произвольные функции потерь и E-шаг без нормировки.** Изменим критерий оптимизационной задачи, заменив в критерии правдоподобия логарифм на произвольную гладкую неубывающую функцию  $\ell(p)$ . Теперь для оценивания параметров тематической модели  $\Phi$  и  $\Theta$  по коллекции документов  $D$  будем максимизировать сумму потерь  $\ell(p(w|d))$  по всем терминам во всех документах:

$$\sum_{d \in D} \sum_{w \in d} n_{dw} \ell \left( \sum_{t \in T} \varphi_{wt} \theta_{td} \right) + R(\Phi, \Theta) \rightarrow \max_{\Phi, \Theta}. \quad (102)$$

**Теорема 18.1.** *Решение  $\Phi, \Theta$  задачи (102) при ограничениях неотрицательности и нормировки удовлетворяет системе уравнений со вспомогательными переменными  $p_{tdw} = p(t|d, w)$ , если из решения исключить нулевые столбцы матриц  $\Phi, \Theta$ :*

$$p_{tdw} = \varphi_{wt} \theta_{td} \ell'(p(w|d)); \quad (103)$$

$$\varphi_{wt} = \operatorname{norm}_{w \in W} \left( \sum_{d \in D} n_{dw} p_{tdw} + \varphi_{wt} \frac{\partial R}{\partial \varphi_{wt}} \right); \quad (104)$$

$$\theta_{td} = \operatorname{norm}_{t \in T} \left( \sum_{w \in d} n_{dw} p_{tdw} + \theta_{td} \frac{\partial R}{\partial \theta_{td}} \right). \quad (105)$$

Система уравнений отличается от классической только формулой E-шага.

Доказательство следует из леммы 3.2 о максимизации на единичных симплексах.

Только при  $\ell(p) = \ln p$  на E-шаге возникает формула Байеса. При этом задача максимизации правдоподобия эквивалентна минимизации взвешенной суммы KL-дивергенций с весами  $n_d$  между эмпирическими распределениями  $\hat{p}(w|d) = \frac{n_{dw}}{n_d}$  и модельными распределениями  $p(w|d) = \langle \varphi_w, \theta_d \rangle$ .

При  $\ell(p) = p^\lambda$  задача эквивалентна минимизации взвешенной суммы дивергенций Кресси–Рида (стр. 96).

При  $\ell(p) = p$  задача переходит в максимизацию скалярных произведений:

$$\sum_{d \in D} n_d \langle \hat{p}(w|d), \langle \varphi_w, \theta_d \rangle \rangle + R(\Phi, \Theta) \rightarrow \max_{\Phi, \Theta}.$$

Данный принцип оптимизации модели представляется не менее разумным, чем максимизация правдоподобия. При этом  $p_{tdw} = \varphi_{wt} \theta_{td}$ , то есть из обычной формулы E-шага уходит знаменатель с нормировочным множителем. Будем называть это

быстрым  $E$ -шагом. Он может давать заметное ускорение EM-алгоритма, поскольку нормировочные множители требуют вычисления скалярных произведений  $\langle \varphi_w, \theta_d \rangle$ .

По результатам сравнения различных стратегий оптимизации в [25] была предложена комбинированная стратегия, когда первая половина итераций использует быстрый  $E$ -шаг, при этом модель становится разреженной благодаря регуляризации. Финальная доводка модели происходит уже по максимуму правдоподобия, но теперь скалярные произведения  $\langle \varphi_w, \theta_d \rangle$  могут вычисляться намного быстрее благодаря разреженности распределений  $\varphi_{wt}$  и  $\theta_{td}$ . Этот вариант алгоритма даёт выигрыш в скорости вычислений до 30% при большом числе тем (500 и более).

## 19 Проект BigARTM

BigARTM — это библиотека с открытым кодом, основанная на теории ARTM. Она имеет расширяемый встроенный набор регуляризаторов и метрик качества, реализует онлайнный и оффлайнный многопоточный пакетный EM-алгоритм, обеспечивающий высокую эффективность обработки больших коллекций на одном компьютере. Библиотека является кроссплатформенной: сборку и исполнение можно производить под Windows 7/8/10, Mac OS и различными дистрибутивами Linux. Поддерживаются программные интерфейсы под Python 2.7.\* / 3.\*, C++, а также запуск в виде исполняемого бинарного файла. Исходный код BigARTM написан на C++11. Поддерживается несколько популярных форматов текстовых данных. Исчерпывающую информацию по библиотеке можно найти в документации на сайте <http://bigartm.org>.

Ниже представлен минимальный код в Python, выполняющий загрузку и преобразование данных во внутренний формат пакетов документов (*батчей*), создание и обучение модели, вычисление и вывод перплексии.

```
1 # Import all necessary tools and data
2 from sklearn.feature_extraction.text import CountVectorizer
3 from sklearn.datasets import fetch_20newsgroups
4 from numpy import array
5 import artm
6 # Extract data using sklearn and numpy
7 cv = CountVectorizer(max_features=1000, stop_words='english')
8 n_wd = array(cv.fit_transform(fetch_20newsgroups().data).todense()).T
9 vocabulary = cv.get_feature_names()
10 # Create batches and dictionary
11 bv = artm.BatchVectorizer(data_format='bow_n_wd',
12                           n_wd=n_wd,
13                           vocabulary=vocabulary)
14 # Learn simple PLSA model
15 model = artm.ARTM(num_topics=15, dictionary=bv.dictionary)
16 model.scores.add(artm.PerplexityScore(name='perp',
17                                       dictionary=bv.dictionary))
18 model.fit_offline(bv, num_collection_passes=20)
19 # Print perplexity values by iterations
20 print(model.score_tracker['perp'].value)
```

**Подготовка данных.** Универсальным объектом, принимаемым на вход всеми операциями BigARTM, является векторизатор `artm.BatchVectorizer`. В примере выше (шаги 10–13) он был создан по матрице «мешка слов» `n_wd` и словаря, задающего соответствие между строками матрицы и словами коллекции. В этом случае пакеты создаются в оперативной памяти и полностью удаляются из неё по завершении работы библиотеки. Этот способ хранения данных подходит только для небольших коллекций, целиком помещающихся в памяти. Во всех остальных случаях используются форматы данных, предполагающие чтение исходных документов с диска и запись итоговых пакетов на диск. Наиболее популярен формат текстовых файлов Vowpal Wabbit, в котором каждая строка соответствует одному документу и имеет вид

```
doc_title token_1:value_1 token_2:value_2 ...
```

Данный формат позволяет представлять документы как «мешком слов», так и последовательным текстом, а также записывать в документы термины различных модальностей. Пример создания векторизатора по данным в формате Vowpal Wabbit:

```
1 bv = artm.BatchVectorizer(data_path='docword.vw.txt',
2                             data_format='vowpal_wabbit',
3                             target_folder='my_collection_batches')
```

Здесь `data_path` — путь к файлу с документами, параметр `target_folder` указывает на несуществующую директорию для сохранения готовых пакетов.

Парсинг большой коллекции — относительно длительный процесс (даже несмотря на то, что BigARTM умеет выполнять его в многопоточном режиме), поэтому удобно сохранить пакеты на диск и использовать их многократно. Пример создания векторизатора, загружающего пакеты с диска:

```
1 bv = artm.BatchVectorizer(data_path='my_collection_batches',
2                             data_format='batches')
```

**Словари BigARTM** предназначены для хранения данных о словах и используются в некоторых регуляризаторах и метриках качества. Словарю соответствует объект `artm.Dictionary`, который можно либо сформировать автоматически во время разбиения коллекции на пакеты (задав в `artm.BatchVectorizer` параметр `gather_dictionary`, по умолчанию равный `True`), либо создать вручную на основе своих данных. Объект словаря можно сохранить в бинарный или текстовый файл, затем загружать его из этого файла:

```
1 bv = artm.BatchVectorizer(data_path='docword.vw.txt',
2                             data_format='vowpal_wabbit',
3                             target_folder='my_collection_batches')
4 bv.dictionary.save('my_collection_batches/dictionary')
5 # Load dictionary back during next BigARTM launch:
6 dictionary = artm.Dictionary()
7 dictionary.load('my_collection_batches/dictionary.dict')
```

Готовый словарь можно изменять. Для этого достаточно сохранить его на диск в текстовом виде, затем модифицировать полученный файл и загрузить его обратно:

```
1 dictionary.save_text('my_collection_batches/dictionary.txt')
2 # Change file according to your needs ...
```

```

3 # Then, load it back
4 dictionary.load_text('my_collection_batches/dictionary.txt')

```

Словарь, сохранённый в текстовом файле, состоит из строк следующего вида:

```
token class_id value tf df
```

где `token` — строковое представление слова, `class_id` — модальность, `tf` — абсолютная частота слова в коллекции, `df` — число документов коллекции, в которых слово встретилось хотя бы раз. Поле `value` по умолчанию заполняется нормированным значением `tf`, но может быть изменено (эта возможность используется как механизм передачи данных в некоторых регуляризаторах и метриках качества).

Словари можно фильтровать встроенными средствами по значениям `tf` и `df`, например, можно отбрасывать слишком частые или слишком редкие слова. Указание словаря в конструкторе `artm.ARTM` или в методе `artm.ARTM.initialize` задаёт порядок строк в матрицах  $\Phi$  и  $(n_{wt})$  согласно порядку слов в словаре. Это важно, например, для модальности меток времени.

**Регуляризаторы** могут воздействовать на матрицы  $\Phi$ ,  $\Theta$  или  $(p_{tdw})$ . Регуляризаторы  $\Phi$  могут воздействовать на отдельные модальности. Наличие параметра `class_id` указывает, что регуляризатор работает с одной модальностью, по умолчанию с `@default_class`. Наличие параметра `class_ids` указывает, что регуляризатор работает со списком модальностей, по умолчанию со всеми. Почти все параметры всех регуляризаторов можно менять между итерациями обучения.

**SmoothSparsePhiRegularizer** — регуляризатор сглаживания–разреживания матрицы  $\Phi$ , реализован по формуле (24) с небольшим обобщением:

$$\varphi_{wt} = \operatorname{norm}_{w \in W} (n_{wt} + \tau \beta_w f(\varphi_{wt})).$$

Если в определении KL-дивергенции заменить логарифм  $\ln x$  на функцию  $\lambda(x)$ , то  $f(x) = x\lambda'(x)$ . По умолчанию  $f(x) = 1$ , что и соответствует логарифму. В библиотеке можно задавать  $f(x)$  как степенную функцию. Вектор  $(\beta_w)$  загружается из словаря и задаётся значениями поля `value` каждого слова. Для каждой темы  $t$  может быть задан свой такой вектор. Таким способом можно задавать «белые» и «чёрные» списки слов для частичного обучения.

**SpecifiedSparsePhiRegularizer** — регуляризатор разреженности  $\Phi$ , реализован по той же формуле, но  $\tau\beta_w$  является константой и подбирается таким образом, чтобы доля нулевых элементов в матрице  $\Phi$  оказалась не ниже заданного порога. При этом функция  $f$  не используется, то есть  $f(x) = 1$ .

**SmoothSparseThetaRegularizer** — регуляризатор сглаживания–разреживания матрицы  $\Theta$ , реализован по формуле (25), с аналогичным обобщением:

$$\theta_{td} = \operatorname{norm}_{t \in T} (n_{td} + \tau \alpha_i \alpha_{td} f(\theta_{td})).$$

Функция  $f$  играет ту же роль, что и в регуляризаторе сглаживания–разреживания  $\Phi$ . Массив множителей  $\alpha_i$  позволяет управлять воздействием регуляризатора на каждой  $i$ -й внутренней итерации обработки документа. Вектор или матрица  $(\alpha_{td})$  позволяет управлять воздействием регуляризатора на элементы матрицы  $\Theta$ .

`DecorrelatorPhiRegularizer` — регуляризатор декоррелирования тем в матрице  $\Phi$ , реализован согласно (36). От пользователя требуется указать коэффициент регуляризации  $\tau$  и список модальностей, на которые нужно воздействовать.

`TopicSelectionThetaRegularizer` — регуляризатор отбора тем в матрице  $\Theta$ , реализован по формуле (63). Единственное отличие заключается в наличии массива множителей  $\alpha_i$ , как в регуляризаторе сглаживания–разреживания  $\Theta$ .

`SmoothTimeInTopicsPhiRegularizer` — регуляризатор сглаживания тем по модальности времени в матрице  $\Phi$ , реализован по формуле (50). Для корректной работы регуляризатора требуется указать имя модальности времени и расположить термины времени в словаре и в матрице  $\Phi$  в хронологическом порядке.

`NetPlsaPhiRegularizer` — регуляризатор *NetPLSA* для модальности вершин графа в матрице  $\Phi$ , определяется по формуле (62). В документах должны быть заранее записаны термины вершин графа  $v$ . В параметрах регуляризатора задаются имена вершин  $v$ , их веса (мощности множеств  $|D_v|$ ) и веса рёбер графа  $w_{uv}$ .

`ImproveCoherencePhiRegularizer` — регуляризатор когерентности, реализован по формуле (68) и в качестве параметра требует словарь парной сочетаемости слов  $C_{uv}$  (собрать его можно с помощью встроенного парсера).

`BitermsPhiRegularizer` — регуляризатор битермов, реализован по формулам (66)–(67) и в качестве параметра также требует словарь частот битермов  $n_{uv}$  (задача его сборки ложится на пользователя).

`LabelRegularizationPhiRegularizer` — частотный регуляризатор матрицы  $\Phi$  для классификации с несбалансированными классами. Реализован по формуле (59). В качестве параметра требует словарь классов со значениями их мощностей  $|D_c|$ .

`HierarchySparsingThetaRegularizer` — регуляризатор иерархического разреживания  $\Theta$ , используется для разреживания матрицы связей между родительскими темами и их дочерними подтемами в иерархических моделях, согласно формуле (65).

`TopicSegmentationPtdwRegularizer` — регуляризатор  $E$ -шага для разреживания сегментов в матрицах  $(p_{tdw})$ , определяемый по формуле (81).

`SmoothPtdwRegularizer` — регуляризатор  $E$ -шага для сглаживания матриц  $(p_{tdw})$  по локальному контексту. Приближает тематический профиль каждого вхождения термина к усредненному профилю его соседей (по окну фиксированной ширины).

Регуляризаторы могут включаться, отключаться или модифицироваться в любой момент между вызовами `fit_offline` или `fit_online`, что позволяет, в совокупности с контролем метрик качества, гибко перестраивать стратегию регуляризации в соответствии с текущим состоянием модели. Пример:

```
1 reg = artm.DecorrelatorPhiRegularizer(name='decor', tau=1e+5)
2 model.regularizer.add(reg)
3 model.scores.SparsityPhiScore(name='sparse')
4
5 model.fit_offline(batch_vectorizer=bv, num_collection_passes=10)
6 print model.score_tracker('sparse').last_value
7
8 # Printing result: 0.15 - too small. Let's increase tau
```

```

9 model.regularizer['decor'].tau = 3e+5
10 model.fit_offline(batch_vectorizer=bv, num_collection_passes=15)

```

**Многопоточный пакетный EM-алгоритм.** Библиотека BigARTM позволяет обрабатывать коллекции документов, не помещающиеся в оперативную память. Для этого коллекция  $D$  с помощью `BatchVectorizer` разбивается на пакеты  $D_b$ ,  $b = 1, \dots, B$ , каждый из которых хранится в отдельном файле. Обычно используются пакеты размером от сотен килобайт до десятков мегабайт. Коэффициенты регуляризации задаются в момент создания модели, но потом могут быть в любой момент изменены, в том числе в ходе EM-итераций.

Пакеты обрабатываются функцией `ProcessBatches` как описано в Алгоритме 5. Оффлайнный алгоритм `FitOffline` запускается функцией `ARTM.fit_offline`, онлайнный `FitOnline` — функцией `ARTM.fit_online`. Для включения асинхронного алгоритма последней надо передать параметр `async=True`. Контроль условий сходимости EM-алгоритма возлагается на пользователя. Проще всего задавать число итераций по коллекции и по каждому документу.

Построенную тематическую модель можно использовать для тематизации отдельных документов при фиксированной матрице  $\Phi$ . Эта возможность реализуется функцией `ARTM.transform`, которая пропускает документы через `ProcessBatches`.

**Метрики качества** добавляются через поля `scores` объекта `ARTM`. В этот момент у многих метрик можно задавать параметры. Вычисленные значения метрик извлекаются через поля `score_tracker`.

`PerplexityScore` — *перплексия*, вычисляемая по формуле (88). Для её корректной работы нужен словарь, содержащий нормированные частоты слов в коллекции (не модифицированные значения `value` для каждого слова). Они используются в качестве аппроксимации нулевых значений  $p(w|d)$  и позволяют корректно оценивать модели на одном словаре, но с разной степенью разреженности.

Пример подключения перплексии для модальности `@default_class` (стандартная модальность слов):

```

1 # m = artm.ARTM(...)
2 m.scores.add(artm.PerplexityScore(name='perp',
3                                 class_ids=['@default_class'],
4                                 dictionary=dictionary))

```

Значения перплексии можно вывести следующим образом (вместо `value` можно вывести, например, числитель и знаменатель перплексии по каждой модальности):

```

1 print(model.score_tracker['perp'].value)

```

Поле `value` содержит всю историю значений метрики по обновлениям матрицы  $\Phi$ . У любого поля любой метрики имеется вариант с префиксом `last_`, который возвращает значение метрики на момент последней синхронизации. Это может быть полезно для получения массивных метрик типа `TopTokensScore`.

`SparsityPhiScore/SparsityThetaScore` — *разреженности матриц  $\Phi$  и  $\Theta$* . Оцениваются долей элементов матрицы, меньших заданного пользователем порога.



**TopTokensScore** — *топ-слова в темах*, список из заданного числа слов с наибольшей вероятностью по каждой теме. Если в параметрах этой метрики указать словарь парной сочетаемости слов, то будет вычислена когерентность  $\text{coher}_t$  по спискам топ-слов в темах, согласно формуле (89).

**TopicKernelScore** — *ядровые характеристики тем*: чистота  $\text{pur}_t$ , контрастность  $\text{con}_t$ , размер ядра  $\text{ker}_t$  оценивающие различность и, косвенно, интерпретируемость каждой темы  $t$ , см. стр. 91. Аналогично топ-словам, указание словаря парной сочетаемости запускает подсчёт когерентности, но теперь уже по ядрам тем.

**BackgroundTokensRatioScore** — *доля фоновых слов*, оценивает долю слов, для которых KL-дивергенция между распределениями  $p(t)$  и  $p(w|t)$  выше заданного порога.

**TopicMassPhiScore** — *частоты тем  $n_t$*  и распределения  $p(t) = \frac{n_t}{n}$  для всех тем  $t$ , вычисляемые по матрице  $(n_{wt})$ .

**ItemsProcessedScore** — *число обработанных документов*, техническая метрика, показывающая по итерациям количество документов (с повторами), обработанных EM-алгоритмом с момента включения метрики.

**PeakMemoryUsage** — *пиковое потребление памяти*, техническая метрика (доступная только в C++ интерфейсе), предоставляющая информацию о максимальном потреблении оперативной памяти за время каждой итерации алгоритма.

Пользователь может не только создавать собственные метрики, но и вычислять их напрямую, сделав выгрузку параметров модели  $\Phi$  и  $\Theta$ .

**Выгрузка параметров модели.** В следующем коде показано, как получить матрицу  $\Phi$  (точнее, первые 10 тем дефолтной модальности):

```
1 model.get_phi(topic_names=model.topic_names[: 10],
2               class_ids=['@default_class'],
3               model_name=model.model_pwt)
```

Указание параметра `model_name=model.model_nwt` позволяет аналогичным образом получить значения  $n_{wt}$  вместо  $\varphi_{wt}$ .

С матрицей  $\Theta$  можно работать по-разному. Во-первых, её можно вообще не хранить, если она не нужна. Во-вторых, можно хранить её в кэше, задав перед началом обучения параметр `cache_theta=True`. В третьих, можно включить хранение  $\Theta$  в  $\Phi$ -подобной матрице, задав параметр `theta_name`. Это даст свободный доступ к матрице на чтение и запись в любой момент. В первом случае выгрузить матрицу невозможно, в остальных применим следующий код:

```
1 # case 2
2 model.get_theta()
3 # case 3
4 model.get_phi(model_name=model.theta_name)
```

Все описанные выше вызовы возвращают объекты `pandas.DataFrame`.

Помимо описанного интерфейса выгрузки матриц, есть возможность получить указатель на матрицу и напрямую модифицировать память, используемую ядром библиотеки, что существенно уменьшает расход памяти и время вычислений.

## 20 Разведочный информационный поиск

Важным приложением тематического моделирования является *информационный поиск* (information retrieval) [187, 21]. Современные поисковые системы предназначены, главным образом, для поиска конкретных ответов на короткие текстовые запросы. Другие поисковые потребности возникают у пользователей, которым необходимо разобраться в новой предметной области или пополнить свой багаж знаний. Пользователь может не владеть терминологией, слабо понимать структуру предметной области, не иметь точных формулировок запроса и не подразумевать единственный правильный ответ. В таких случаях нужен поиск не по ключевым словам, а по смыслу. Запросом может быть длинный фрагмент текста, документ или подборка документов. Результатом поиска может быть обычная поисковая выдача в виде списка документов или более структурированное представление с разделением по темам или графическая визуализация — «дорожная карта» предметной области, статическая или интерактивная.

Для этих случаев подходит парадигма *разведочного информационного поиска* (exploratory search) [101, 182]. Его целью является получение ответов на сложные вопросы: «какие темы представлены в тексте запроса», «что читать в первую очередь по этим темам», «что находится на стыке этих тем со смежными областями», «какова тематическая структура данной предметной области», «как она развивалась во времени», «каковы последние достижения», «где находятся основные центры компетентности», «кто является экспертом по данной теме» и т. д. Пользователь обычной поисковой системы вынужден итеративно переформулировать свои короткие запросы, расширяя зону поиска по мере усвоения терминологии предметной области, периодически пересматривая и систематизируя результаты поиска. Это требует затрат времени и высокой квалификации. Разведочный поиск реализуется с помощью визуальных тексто-графических представлений «общей картины», дающих пользователю больше уверенности, что все важнейшие аспекты изучаемой проблемы найдены и отображены. Если образно представить итеративный поиск как блуждание по лабиринту знаний с фонариком, то разведочный поиск — это автоматическое построение карты для любой части этого лабиринта.

**Тематический поиск.** Полнотекстовые поисковые системы основаны на инвертированных индексах, в которых для каждого слова хранится список содержащих его документов [14]. Поисковая система ищет документы, содержащие все слова запроса, поэтому по длинному запросу, скорее всего, ничего не будет найдено.

Система тематического разведочного поиска сначала строит тематическую модель запроса и определяет короткий список тем запроса. Затем для поиска документов схожей тематики применяются те же механизмы индексирования и поиска, только в роли слов выступают темы. Поскольку число тем на несколько порядков меньше объёма словаря, тематический поиск требует намного меньше памяти по сравнению с полнотекстовым поиском и может быть реализован на более скромной технике. Технологии информационного поиска на основе тематического моделирования в настоящее время находятся в стадии исследований и разработок [152, 31, 128, 39, 20, 174].

В литературе по разведочному поиску тематическое моделирование стали использовать относительно недавно [143, 64, 140, 161], а многие обзоры о нём вообще не упоминают [60, 136, 150, 76, 102, 72]. В статье [161] важными преимуществами тематиче-

ских моделей называются гибкость, возможности визуализации и навигации. В то же время, в качестве недостатков отмечаются проблемы с интерпретируемостью тем, трудности с модификацией тематической модели при поступлении новых документов и высокая вычислительная сложность. Эти проблемы относятся к устаревшим методам и успешно решены в последние годы: десятки новых моделей разработаны для улучшения интерпретируемости; онлайн-алгоритмы способны обрабатывать большие коллекции и потоки документов за линейное время [110, 29, 162]. С другой стороны, в работах по тематическому моделированию разведочный поиск часто называют одним из важнейших приложений, а оценки качества поиска используют для валидации моделей [187, 21]. Однако эти исследования пока не привели к созданию общедоступных систем разведочного поиска. Всё это говорит о разобщённости научных сообществ, разрабатывающих эти два направления. Тенденция к их сближению наметилась лишь в последние годы.

Тематическая модель для разведочного поиска должна удовлетворять многим требованиям одновременно. Она должна быть:

- *хорошо интерпретируемой* в тех случаях, когда темы используются в пользовательском интерфейсе для навигации по коллекции, уточнения критериев поиска, визуализации результатов поиска;
- *разреженной*, чтобы каждый документ состоял из небольшого числа тем — это необходимо для эффективного хранения инвертированного индекса;
- *иерархической*, чтобы пользователь мог получить представление о тематической структуре предметной области на любом уровне детализации; кроме того, иерархическое деление тем на подтемы позволяет увеличить размерность тематических векторов и повысить качество поиска;
- способной автоматически *определять число тем* на каждом уровне иерархии, автоматически *создавать новые темы* и автоматически *именовать темы* релевантными заголовками;
- *мультиграммной*, так как выделение ключевых фраз и терминов существенно улучшает интерпретируемость тем;
- *мультиязычной* в тех приложениях, где требуется кросс-языковой или мультиязыковой поиск, например, при поиске патентов на одном языке по патенту на другом языке;
- *мультимодальной*, чтобы учитывать метаданные документов: авторов, цитирование, категории или теги, если таковые имеются;
- *темпоральной*, чтобы выявлять динамику развития тем, обнаруживать новые темы и быстро растущие тематические тренды;
- *сегментирующей*, чтобы не только находить релевантные документы, но и указывать в них конкретные сегменты, релевантные сегментам запроса.
- *обучаемой* по оценкам ассессоров или логам пользователей, чтобы улучшать качество поиска на постоянной основе;

- обладать *онлайновой, параллельной и распределённой* реализацией, чтобы чтобы эффективно обрабатывать большие коллекции текстов.

Методы аддитивной регуляризации тематических моделей (ARTM) позволяют строить модели с заданными свойствами, объединяя многие из перечисленных возможностей для создания сервисов разведочного поиска.

**Оценивание качества разведочного поиска.** Модель ARTM для разведочного поиска была предложена в [19] и улучшена в [185, 71]. Для измерения качества разведочного тематического поиска использовались критерии точности и полноты на основе оценок ассессоров.

Была составлена выборка из 100 запросов — заданий разведочного поиска. Каждый запрос представлял собой текст объёмом около одной страницы формата А4, описывающий тематику поиска. Каждое задание сначала выполнялось независимо несколькими ассессорами, затем системой тематического поиска, затем её результат снова оценивался ассессорами. Данная методика позволяет, единожды сделав разметку результатов поиска, многократно оценивать качество различных тематических моделей и механизмов поиска.

**Эксперименты по подбору тематической модели для разведочного поиска** проводились на двух коллекциях: 175 тысяч статей русскоязычного коллективного блога `habrahabr.ru` и 760 тысяч статей англоязычного блога `techcrunch.com`.

Было показано, что тематический поиск находит больше релевантных документов, чем ассессоры, сокращая среднее время поиска с получаса до секунды. Комбинирование регуляризаторов декоррелирования, разреживания и сглаживания вместе с модальностями  $n$ -грамм, авторов и категорий значительно улучшает качество поиска и позволяет достичь точности выше 80% и полноты выше 90%.

**Визуализация.** Систематизация результатов тематического поиска невозможна без интерактивного графического представления. В обзоре [2] описываются и сравниваются 16 средств визуализации тематических моделей на основе веб-интерфейсов. Ещё больше идей можно почерпнуть из интерактивного обзора<sup>7</sup>, который насчитывает более 400 средств визуализации текстов. Несмотря на такое богатство технических решений, основных идей визуализации тематических моделей не так много: это либо двумерное отображение семантической близости тем в виде графа или карты, либо тематическая иерархия, либо динамика развития тем во времени, либо графовая структура взаимосвязей между темами, документами, авторами или иными модальностями, либо сегментная тематическая структура отдельных документов.

Графическая визуализация больших данных практически бесполезна в статичном исполнении, но может оказаться мощным когнитивным средством в случае интерактивной реализации. Принцип интерактивного визуального поиска информации известен как *мантра Шнейдермана*: «сначала крупный план, затем масштабирование и фильтрация, детали по требованию» [148].

Графическое отображение результатов тематического моделирования и разведочного поиска согласуется с концепцией *дальнего чтения* (distant reading), предложенной социологом литературы Франко Моретти [115]. Он противопоставляет этот

---

<sup>7</sup><http://textvis.lnu.se> — интерактивный обзор средств визуализации текстов.

способ изучения текстов нашему привычному пристальному чтению (close reading). Невозможно прочитать миллионы книг или статей, но вполне возможно применить статистические методы и графическую визуализацию, чтобы понять в общих чертах, о чём вся эта литература, увидеть нетривиальные общие закономерности и научиться быстрее отыскивать нужное. «Дальнее чтение — это специальная форма представления знаний, в которой меньше элементов, грубее смысл их взаимосвязей, остаются лишь формы, отношения, структуры, модели» [115].

## 21 Заключение

**Замена фундамента.** Вероятностное тематическое моделирование — относительно молодое направление исследований на стыке машинного обучения и автоматической обработки текстов. Ему чуть более 20 лет. За это время успела сложиться научная традиция — рассматривать эту область как часть или как приложение байесовского обучения. В этой книге предпринята попытка сломать эту традицию, предложив намного более простой, но не менее выразительный теоретический фундамент в виде классической не-байесовской регуляризации. При замене фундамента с тяжёлого на лёгкий со здания осыпалась мишура, но оно устояло.

Сотни байесовских алгоритмов тематического моделирования, описанных в тысячах публикаций за последние два десятилетия, могут быть дебаесизированы и получены прямолинейно, буквально в одну строку, с помощью леммы о максимизации гладкой функции на единичных симплексах. Вероятностное тематическое моделирование можно теперь называть «теорией одной леммы». Объяснять, строить и комбинировать тематические модели стало на порядок проще.

Может возникнуть вопрос, как так получилось, что эта возможность не была замечена сразу. Ведь байесовский вывод, трудоёмкий и уникальный для каждой модели, приносит исследователям много технических неудобств.

Многие области анализа данных и машинного обучения, включая обработку изображений и сигналов, развивались по общему сценарию. Сначала формализация модели и оптимизационной задачи; затем её дополнение различными структурами, вспомогательными критериями и регуляризаторами; и только в последнюю очередь переход к байесовской регуляризации. Этот переход нужен тогда, когда возникает практическая потребность оценивания не только самих параметров модели, но и их апостериорных распределений. Например, для получения интервальных оценок, проверки статистических гипотез, сэмплирования параметров, анализа устойчивости моделей и прочих теоретико-вероятностных экзерсисов.

В тематическом моделировании типовой сценарий был нарушен, и сообщество перешло к методам байесовского обучения минуя этап развития в рамках классической регуляризации. Это тем более парадоксально, что в практике тематического моделирования апостериорные распределения используются только для получения точечных оценок максимального правдоподобия.

Теория аддитивной регуляризации (ARTM) есть попытка восполнить этот пробел. Возможно, попытка запоздалая, поскольку фокус интереса научного сообщества уже переключился на глубокие нейросетевые модели языка, модели внимания и архитектуры трансформеров. Тематическое моделирование теперь больше сосредото-

чено на интеграции с нейронными сетями в поисках возможностей для «объединения лучшего от двух миров» [193].

Оба вида моделей, нейросетевые и тематические, генерируют векторные представления слов и текстов.

Оба вида моделей тяготеют к гомогенизации [125], то есть использованию единого векторного пространства для описания разнородных объектов по данным об их взаимодействиях. В разделе 10 было показано, как это реализуется в гиперграфовых тематических моделях.

Оба вида моделей генерируют как глобальные эмбединги, так и локальные для каждого слова в его контексте. В разделе 15 было показано несколько подходов к тематическому моделированию последовательного текста.

Нейросетевые модели намного сложнее, их эмбединги способны вобрать в себя всю полноту информации о связях между словами, причём мы даже не понимаем, какие именно связи и как именно учтены.

Тематические модели намного проще, их эмбединги учитывают только лексическую сочетаемость слов, зато сохраняют интерпретируемость. Свойство покоординатной интерпретируемости является прямым следствием того, что тематические эмбединги являются дискретными вероятностными распределениями, то есть неотрицательными нормированными векторами.

Отказ от байесовского вывода тематических моделей упрощает их возможную интеграцию с нейросетевыми моделями. Любой векторный параметр нейронной сети, если на него наложить ограничения неотрицательности и нормировки, можно обучать с помощью мультипликативного градиентного шага с проекцией на единичный симплекс. Такая модификация не затрагивает вычисление самого градиента методом обратного распространения ошибки. Реализация этой идеи в системах PyTorch или TensorFlow позволит применять их для обучения произвольных тематических моделей с аддитивной регуляризацией. Неплохая перспектива для будущих исследований!

**Мифы о тематическом моделировании.** Доминирование байесовского подхода, разобщённость академического и индустриального сообщества привели к некоторым заблуждениям о тематическом моделировании, достойным упоминания и критики.

- «Тематическое моделирование — это в основном LDA». Нет, есть сотни моделей, решающих разнообразные задачи, с которыми LDA справляется хуже.
- «Тематическое моделирование подходит только для анализа текстов». Нет, есть модели для анализа изображений, видео, графов, сигналов, транзакций.
- «Тематическое моделирование — это раздел байесовского обучения». Нет, большинство моделей гораздо проще строятся в ARTM без байесовского вывода.
- «Тематические модели служат для предсказания частоты слов в документах». Формально да, но их цель в выявлении кластерной структуры коллекции.
- «Темы часто оказываются дублирующими или плохо интерпретируемыми». Это так в LDA. Проблема решается с помощью других регуляризаторов.

- «Тематические модели основаны на гипотезе мешка слов». Многие, но не все. Тематические модели  $n$ -грамм, битермов, предложений, сегментации, регуляризаторы Е-шага, однопроходный Е-шаг учитывают порядок слов в документах.
- «Тематические векторы не так хорошо отражают смыслы слов, как word2vec». Они делают это не хуже, если строить тематическую модель по частотам парных сочетаний слов, как это и делается в word2vec.
- «Тематическая модель LDA переобучается гораздо меньше, чем PLSA» [37]. Нет, их качество примерно одинаково, особенно на больших коллекциях. LDA осторожнее оценивает вероятности редких слов. Формально это улучшает правдоподобие, однако эти слова практически не важны для описания тем.
- «Тематическая модель LDA имеет намного меньше параметров, чем PLSA». Нет, матрицы  $\Phi$  и  $\Theta$  оцениваются в обеих моделях, поскольку они нужны для приложений. На самом деле в LDA больше параметров, добавляются  $\beta$  и  $\alpha$ .
- «Изучение тематического моделирования начинается с вероятностных графических моделей и байесовского вывода». Не обязательно. Проще начать с матричного разложения, EM-алгоритма и регуляризации.

**Открытые проблемы.** Не претендуя на полноту, укажем семь проблем, которые представляются актуальными и перспективными направлениями исследований.

- *Гарантирование качества тем для несбалансированных коллекций.* Модель может выдавать плохо интерпретируемые, дублирующие или мусорные темы, если в исходной коллекции темы различаются по объёму в сотни раз. Максимизация правдоподобия имеет тенденцию выравнивать темы по объёму, а не по семантической однородности. В результате крупные темы дробятся на темы-дубликаты, а мелкие объединяются и образуют мусорные темы.  
*Открытая проблема:* сконструировать оптимизационный критерий так, чтобы модель сама определяла, какие темы являются крупными, какие мелкими в случае несбалансированной коллекции.
- *Обеспечение устойчивости тематических моделей.* При многократных запусках моделирования с разными регуляризаторами, из разных случайных начальных приближений или с использованием стохастического Е-шага, могут получаться модели с хорошими, но различными темами. Построение полного набора интерпретируемых тем может потребовать десятков и даже сотен запусков.  
*Открытая проблема:* построение полного набора хорошо интерпретируемых тем за один запуск. Возможно ли это с помощью регуляризации?
- *Автоматическое именование и изложение тем.* Большинство приложений тематического моделирования связано с визуальным представлением тем пользователю. Каждая тема должна уметь рассказать о себе. Однако в литературе задача суммаризации тем до сих пор не ставилась.  
*Открытая проблема:* генерировать для любой темы не только краткое название и релевантные фразы, но и краткое связное изложение заданного объёма.

- *Автоматизация подбора гиперпараметров.* При использовании нескольких регуляризаторов и модальностей их весовые коэффициенты обычно подбираются вручную, путём многократного перестроения модели по всем данным.  
*Открытая проблема:* быстрая адаптивная оптимизация гиперпараметров по заданной совокупности критериев в режиме пакетной обработки коллекции.
- *Моделирование тематики связного текста с учётом порядка слов.* Модели, основанные на гипотезе «мешка слов», слишком хаотично относят близко стоящие слова к разным темам.  
*Открытая проблема:* создание тематических моделей внимания по аналогии с нейросетевыми моделями, возможно, на основе однопроходного E-шага.
- *Динамическое создание событийных тем* в текстовых потоках. Несмотря на обилие исследований по темпоральным тематическим моделям, пока не существует универсальной модели, подходящей для любых задач с динамикой.  
*Открытая проблема:* автоматическое и своевременное детектирование новой тематической лексики, присутствия новой темы в документе, моментов появления и завершения тем. Решение этих задач должно обходиться без экспериментального подбора гиперпараметров.
- *Бережливое объединение тематических моделей* при пополнении коллекции значительным объёмом текстовых данных с неизвестным числом новых тем, либо при объединении коллекций с готовыми тематическими моделями.  
*Открытая проблема:* выделение общих и сохранение уникальных тем при объединении нескольких тематических моделей, возможно, в условиях несбалансированности тем по их объёмам.

**Что осталось за бортом.** В эту книгу не вошли некоторые важные типы моделей, например, для анализа изображений и видеопотоков, аннотирования изображений, рекомендательных систем, суммаризации текстов, анализа тональности и выявления мнений, использования и построения онтологий, обнаружения новых тем и прослеживания новостных сюжетов. Также не были затронуты вопросы инициализации и автоматического именованя тем. Не нашла отражения в обзоре новая тенденция создания гибридных моделей на основе тематического моделирования и нейронных сетей.

**Благодарности.** Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 17-07-01536, 20-07-00936) и правительства Российской Федерации (соглашение 05.Y09.21.0018).

## Список литературы

- [1] Агеев М. С., Добров Б. В., Лукашевич Н. В. Автоматическая рубрикация текстов: методы и проблемы // *Учёные записки Казанского государственного университета. Серия Физико-математические науки.* — 2008. — Т. 150, № 4. — С. 25–40.
- [2] Айсина Р. М. Обзор средств визуализации тематических моделей коллекций текстовых документов // *Машинное обучение и анализ данных (<http://jmla.org>).* — 2015. — Т. 1, № 11. — С. 1584–1618.



- [3] *Апишев М. А.* Эффективные реализации алгоритмов тематического моделирования // *Труды ИСП РАН*. — 2020. — Т. 32, № 1. — С. 137–152.
- [4] *Воронцов К. В.* Аддитивная регуляризация тематических моделей коллекций текстовых документов // *Доклады РАН*. — 2014. — Т. 456, № 3. — С. 268–271.
- [5] *Воронцов К. В., Потапенко А. А.* Регуляризация, робастность и разреженность вероятностных тематических моделей // *Компьютерные исследования и моделирование*. — 2012. — Т. 4, № 4. — С. 693–706.
- [6] *Воронцов К. В., Потапенко А. А.* Модификации EM-алгоритма для вероятностного тематического моделирования // *Машинное обучение и анализ данных*. — 2013. — Т. 1, № 6. — С. 657–686.
- [7] *Воронцов К. В., Потапенко А. А.* Регуляризация вероятностных тематических моделей для повышения интерпретируемости и определения числа тем // *Компьютерная лингвистика и интеллектуальные технологии: По материалам ежегодной Международной конференции «Диалог» (Бекасово, 4–8 июня 2014 г.)*. — Вып. 13 (20). — М: Изд-во РГГУ, 2014. — С. 676–687.
- [8] *Воронцов К. В., Фрей А. И., Ромов П. А., Янина А. О., Суворова М. А., Апишев М. А.* BigARTM: библиотека с открытым кодом для тематического моделирования больших текстовых коллекций // *Аналитика и управление данными в областях с интенсивным использованием данных. XVII Международная конференция DAMDID/RCDL'2015*. — НИЯУ МИФИ Обнинск, 2015. — С. 28–36.
- [9] *Дударенко М. А.* Регуляризация многоязычных тематических моделей // *Вычислительные методы и программирование*. — 2015. — Т. 16. — С. 26–38.
- [10] *Ирхин И. А., Булатов В. Г., Воронцов К. В.* Аддитивная регуляризация тематических моделей с быстрой векторизацией текста // *Компьютерные исследования и моделирование*. — 2020. — Т. 12, № 6. — С. 1515–1528.
- [11] *Ирхин И. А., Воронцов К. В.* Сходимость алгоритма аддитивной регуляризации тематических моделей // *Труды Института математики и механики УрО РАН*. — 2020. — Т. 26, № 3. — С. 56–68.
- [12] *Колмогоров А. Н.* Теория информации и теория алгоритмов / Под ред. Ю. В. Прохоров. — М.: Наука, 1987. — 304 с.
- [13] *Лукашевич Н. В.* Тезаурусы в задачах информационного поиска. — Издательство МГУ имени М. В. Ломоносова, 2011.
- [14] *Маннинг К. Д., Рагхаван П., Шютце Х.* Введение в информационный поиск. — Вильямс, 2011.
- [15] *Павлов А. С., Добров Б. В.* Метод обнаружения массово порожденных неестественных текстов на основе анализа тематической структуры // *Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии*. — 2011. — Т. 12. — С. 58–72.
- [16] *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1986.
- [17] *Хрыльченко К. Я., Воронцов К. В.* Оптимизация весов модальностей в тематических моделях транзакционных данных // *Автоматика и телемеханика*. — 2022. — № 12. — С. 44–62.
- [18] *Цельх В. Р., Воронцов К. В.* Критерии согласия для разреженных дискретных распределений и их применение в тематическом моделировании // *Машинное обучение и анализ данных*. — 2012. — Т. 1, № 4. — С. 437–447.
- [19] *Янина А. О., Воронцов К. В.* Мультимодальные тематические модели для разведочного поиска в коллективном блоге // *Машинное обучение и анализ данных*. — 2016. — Т. 2, № 2. — С. 173–186.
- [20] *Airoldi E. M., Erosheva E. A., Fienberg S. E., Joutard C., Love T., Shringarpure S.* Reconceptualizing the classification of PNAS articles // *Proceedings of The National Academy of Sciences*. — 2010. — Vol. 107. — Pp. 20899–20904.

- [21] *Andrzejewski D., Buttler D.* Latent topic feedback for information retrieval // Proceedings of the 17th ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining. — KDD '11. — 2011. — Pp. 600–608.
- [22] *Andrzejewski D., Zhu X.* Latent Dirichlet allocation with topic-in-set knowledge // Proceedings of the NAACL HLT 2009 Workshop on Semi-Supervised Learning for Natural Language Processing. — SemiSupLearn '09. — Stroudsburg, PA, USA: Association for Computational Linguistics, 2009. — Pp. 43–48.
- [23] *Apishev M., Koltcov S., Koltsova O., Nikolenko S., Vorontsov K.* Additive regularization for topic modeling in sociological studies of user-generated text content // MICAI 2016, 15th Mexican International Conference on Artificial Intelligence. — Vol. 10061. — Springer, Lecture Notes in Artificial Intelligence, 2016. — Pp. 166–181.
- [24] *Apishev M., Koltcov S., Koltsova O., Nikolenko S., Vorontsov K.* Mining ethnic content online with additively regularized topic models // *Computacion y Sistemas*. — 2016. — Vol. 20, no. 3. — Pp. 387–403.
- [25] *Apishev M. A., Vorontsov K. V.* Learning topic models with arbitrary loss // Proceeding of the 26th Conference of FRUCT (Finnish-Russian University Cooperation in Telecommunications) Association. — 2020. — Pp. 30–37.
- [26] *Asuncion A., Welling M., Smyth P., Teh Y. W.* On smoothing and inference for topic models // Proceedings of the International Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence. — 2009. — Pp. 27–34.
- [27] Attention is all you need / A. Vaswani, N. Shazeer, N. Parmar, J. Uszkoreit, L. Jones, A. N. Gomez, L. u. Kaiser, I. Polosukhin // *Advances in Neural Information Processing Systems 30* / Ed. by I. Guyon, U. V. Luxburg, S. Bengio, H. Wallach, R. Fergus, S. Vishwanathan, R. Garnett. — Curran Associates, Inc., 2017. — Pp. 5998–6008.
- [28] *Balikas G., Amini M., Clausel M.* On a topic model for sentences // Proceedings of the 39th International ACM SIGIR Conference on Research and Development in Information Retrieval. — SIGIR '16. — New York, NY, USA: ACM, 2016. — Pp. 921–924.
- [29] *Bassiou N., Kotropoulos C.* Online PLSA: Batch updating techniques including out-of-vocabulary words // *Neural Networks and Learning Systems, IEEE Transactions on*. — Nov 2014. — Vol. 25, no. 11. — Pp. 1953–1966.
- [30] *Bishop C. M.* Pattern Recognition and Machine Learning. — Springer, Series: Information Science and Statistics, 2006. — 740 pp.
- [31] *Blei D., Lafferty J.* A correlated topic model of Science // *Annals of Applied Statistics*. — 2007. — Vol. 1. — Pp. 17–35.
- [32] *Blei D. M.* Probabilistic topic models // *Communications of the ACM*. — 2012. — Vol. 55, no. 4. — Pp. 77–84.
- [33] *Blei D. M., Griffiths T., Jordan M., Tenenbaum J.* Hierarchical topic models and the nested chinese restaurant process // NIPS. — 2003.
- [34] *Blei D. M., Griffiths T. L., Jordan M. I.* The nested chinese restaurant process and bayesian nonparametric inference of topic hierarchies // *J. ACM*. — 2010. — Vol. 57, no. 2. — Pp. 7:1–7:30.
- [35] *Blei D. M., Jordan M. I.* Modeling annotated data // Proceedings of the 26th Annual International ACM SIGIR Conference on Research and Development in Informaion Retrieval. — New York, NY, USA: ACM, 2003. — Pp. 127–134.
- [36] *Blei D. M., Ng A. Y., Jordan M. I.* Latent dirichlet allocation // *Advances in Neural Information Processing Systems 14, NIPS 2001, December 3–8, 2001, Vancouver, British Columbia, Canada* / Ed. by T. G. Dietterich, S. Becker, Z. Ghahramani. — MIT Press, 2001. — Pp. 601–608.
- [37] *Blei D. M., Ng A. Y., Jordan M. I.* Latent Dirichlet allocation // *Journal of Machine Learning Research*. — 2003. — Vol. 3. — Pp. 993–1022.

- [38] *Bodrunova S., Koltsov S., Koltsova O., Nikolenko S. I., Shimorina A.* Interval semi-supervised LDA: Classifying needles in a haystack // MICAI (1) / Ed. by F. C. Espinoza, A. F. Gelbukh, M. Gonzalez-Mendoza. — Vol. 8265 of *Lecture Notes in Computer Science*. — Springer, 2013. — Pp. 265–274.
- [39] *Bolelli L., Ertekin S., Giles C. L.* Topic and trend detection in text collections using latent Dirichlet allocation // ECIR. — Vol. 5478 of *Lecture Notes in Computer Science*. — Springer, 2009. — Pp. 776–780.
- [40] *Boyd-Graber J., Hu Y., Mimno D.* Applications of topic models // *Foundations and Trends® in Information Retrieval*. — 2017. — Vol. 11, no. 2-3. — Pp. 143–296.
- [41] *Chang J., Gerrish S., Wang C., Boyd-Graber J. L., Blei D. M.* Reading tea leaves: How humans interpret topic models // *Neural Information Processing Systems (NIPS)*. — 2009. — Pp. 288–296.
- [42] *Chemudugunta C., Smyth P., Steyvers M.* Modeling general and specific aspects of documents with a probabilistic topic model // *Advances in Neural Information Processing Systems*. — Vol. 19. — MIT Press, 2007. — Pp. 241–248.
- [43] *Chen B.* Word topic models for spoken document retrieval and transcription. — 2009. — Vol. 8, no. 1. — Pp. 2:1–2:27.
- [44] *Chien J.-T., Chang Y.-L.* Bayesian sparse topic model // *Journal of Signal Processing Systems*. — 2013. — Vol. 74. — Pp. 375–389.
- [45] *Chirkova N. A., Vorontsov K. V.* Additive regularization for hierarchical multimodal topic modeling // *Journal Machine Learning and Data Analysis*. — 2016. — Vol. 2, no. 2. — Pp. 187–200.
- [46] *Chuang J., Gupta S., Manning C., Heer J.* Topic model diagnostics: Assessing domain relevance via topical alignment // *Proceedings of the 30th International Conference on Machine Learning (ICML-13)* / Ed. by S. Dasgupta, D. Mcallester. — Vol. 28. — JMLR Workshop and Conference Proceedings, 2013. — Pp. 612–620.
- [47] *Churchill R., Singh L.* The evolution of topic modeling // *ACM Comput. Surv.* — 2022. — Vol. 54, no. 10s. — 35 pp.
- [48] *Cressie N., Read T. R. C.* Multinomial goodness-of-fit tests // *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*. — 1984. — Vol. 46, no. 3. — Pp. 440–464.
- [49] *Dai A. M., Olah C., Le Q. V.* Document embedding with paragraph vectors // *NIPS Deep Learning Workshop*. — 2015.
- [50] *Daud A., Li J., Zhou L., Muhammad F.* Knowledge discovery through directed probabilistic topic models: a survey // *Frontiers of Computer Science in China*. — 2010. — Vol. 4, no. 2. — Pp. 280–301.
- [51] *De Smet W., Moens M.-F.* Cross-language linking of news stories on the web using interlingual topic modelling // *Proceedings of the 2Nd ACM Workshop on Social Web Search and Mining*. — SWSM '09. — New York, NY, USA: ACM, 2009. — Pp. 57–64.
- [52] *Dempster A. P., Laird N. M., Rubin D. B.* Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm // *J. of the Royal Statistical Society, Series B*. — 1977. — no. 34. — Pp. 1–38.
- [53] *Devlin J., Chang M.-W., Lee K., Toutanova K.* BERT: Pre-training of deep bidirectional transformers for language understanding // *Proceedings of the 2019 Conference of the North American Chapter of the Association for Computational Linguistics: Human Language Technologies, Volume 1 (Long and Short Papers)*. — Minneapolis, Minnesota: Association for Computational Linguistics, 2019. — Pp. 4171–4186.
- [54] *Dietz L., Bickel S., Scheffer T.* Unsupervised prediction of citation influences // *Proceedings of the 24th international conference on Machine learning*. — ICML '07. — New York, NY, USA: ACM, 2007. — Pp. 233–240.
- [55] *Doyle G., Elkan C.* Accounting for burstiness in topic models // *Proceedings of the 26th Annual International Conference on Machine Learning*. — ICML'09. — New York, NY, USA: ACM, 2009. — Pp. 281–288.

- [56] *Egghe L.* Untangling Herdan's law and Heaps' law: Mathematical and informetric arguments // *Journal of the American Society for Information Science and Technology*. — 2007. — Vol. 58, no. 5. — Pp. 702–709.
- [57] *Eisenstein J., Ahmed A., Xing E. P.* Sparse additive generative models of text // ICML'11. — 2011. — Pp. 1041–1048.
- [58] *El-Kishky A., Song Y., Wang C., Voss C. R., Han J.* Scalable topical phrase mining from text corpora // *Proc. VLDB Endowment*. — 2014. — Vol. 8, no. 3. — Pp. 305–316.
- [59] *Fan A., Doshi-Velez F., Miratrix L.* Assessing topic model relevance: Evaluation and informative priors // *Statistical Analysis and Data Mining: The ASA Data Science Journal*. — 2019. — Vol. 12, no. 3. — Pp. 210–222.
- [60] *Feldman S. E.* The answer machine // *Synthesis Lectures on Information Concepts, Retrieval, and Services*. — Morgan & Claypool Publishers, 2012. — Vol. 4. — Pp. 1–137.
- [61] *Feng Y., Lapata M.* Topic models for image annotation and text illustration // *Human Language Technologies: The 2010 Annual Conference of the North American Chapter of the Association for Computational Linguistics*. — Association for Computational Linguistics, 2010. — Pp. 831–839.
- [62] *Frei O., Apishev M.* Parallel non-blocking deterministic algorithm for online topic modeling // AIST'2016, Analysis of Images, Social networks and Texts. — Vol. 661. — Springer International Publishing Switzerland, Communications in Computer and Information Science (CCIS), 2016. — Pp. 132–144.
- [63] *Girolami M., Kabán A.* On an equivalence between PLSI and LDA // SIGIR'03: Proceedings of the 26th annual international ACM SIGIR conference on Research and development in informaion retrieval. — 2003. — Pp. 433–434.
- [64] *Grant C. E., George C. P., Kanjilal V., Nirakhiwale S., Wilson J. N., Wang D. Z.* A topic-based search, visualization, and exploration system // FLAIRS Conference. — AAAI Press, 2015. — Pp. 43–48.
- [65] *Harris Z.* Distributional structure // *Word*. — 1954. — Vol. 10, no. 23. — Pp. 146–162.
- [66] *Helsingaun K.* An effective implementation of the linB“kernighan traveling salesman heuristic // *European Journal of Operational Research*. — 2000. — Vol. 126, no. 1. — Pp. 106–130.
- [67] *Hoffman M. D., Blei D. M., Bach F. R.* Online learning for latent Dirichlet allocation // NIPS. — Curran Associates, Inc., 2010. — Pp. 856–864.
- [68] *Hofmann T.* Probabilistic latent semantic indexing // Proceedings of the 22nd annual international ACM SIGIR conference on Research and development in information retrieval. — New York, NY, USA: ACM, 1999. — Pp. 50–57.
- [69] *Hospedales T., Gong S., Xiang T.* Video behaviour mining using a dynamic topic model // *International Journal of Computer Vision*. — 2012. — Vol. 98, no. 3. — Pp. 303–323.
- [70] *Huang P.-S., He X., Gao J., Deng L., Acero A., Heck L.* Learning deep structured semantic models for web search using clickthrough data // Proceedings of the 22Nd ACM International Conference on Conference on Information and Knowledge Management. — CIKM '13. — New York, NY, USA: ACM, 2013. — Pp. 2333–2338.
- [71] *Ianina A., Vorontsov K.* Regularized multimodal hierarchical topic model for document-by-document exploratory search // Proceeding Of The 25th Conference Of FRUCT (Finnish-Russian University Cooperation in Telecommunications) Association. The seminar on Intelligence, Social Media and Web (ISMW). Helsinki, Finland, November 5–8, 2019. / Ed. by S. Balandin, V. Niemi, T. Tutina. — 2019. — Pp. 131–138.
- [72] *Jacksi K., Dimililer N., Zeebaree S. R. M.* A survey of exploratory search systems based on LOD resources // Proceedings of the 5th International Conference on Computing and Informatics, ICOCI 2015. — School of Computing, Universiti Utara Malaysia, 2015. — Pp. 501–509.

- [73] *Jagarlamudi J., Daumé III H., Udupa R.* Incorporating lexical priors into topic models // Proceedings of the 13th Conference of the European Chapter of the Association for Computational Linguistics. — EACL'12. — Stroudsburg, PA, USA: Association for Computational Linguistics, 2012. — Pp. 204–213.
- [74] *Jameel S., Lam W.* An N-gram topic model for time-stamped documents // 35th European Conference on Information Retrieval, ECIR-2013, Moscow, Russia, 24-27 March 2013. — Lecture Notes in Computer Science (LNCS), Springer Verlag-Germany, 2013. — Pp. 292–304.
- [75] *Jelodar H., Wang Y., Yuan C., Feng X., Jiang X., Li Y., Zhao L.* Latent dirichlet allocation (LDA) and topic modeling: models, applications, a survey // *Multimedia Tools and Applications*. — 2019. — Vol. 78, no. 11. — Pp. 15169–15211.
- [76] *Jiang T.* Exploratory Search: A Critical Analysis of the Theoretical Foundations, System Features, and Research Trends // *Library and Information Sciences: Trends and Research* / Ed. by C. Chen, R. Larsen. — Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2014. — Pp. 79–103.
- [77] *Kataria S., Mitra P., Caragea C., Giles C. L.* Context sensitive topic models for author influence in document networks // Proceedings of the Twenty-Second international joint conference on Artificial Intelligence — Volume 3. — IJCAI'11. — AAAI Press, 2011. — Pp. 2274–2280.
- [78] *Khodorchenko M., Butakov N., Sokhin T., Teryoshkin S.* Surrogate-based optimization of learning strategies for additively regularized topic models // *Logic Journal of the IGPL*. — 2022. — jzac019.
- [79] *Khodorchenko M., Teryoshkin S., Sokhin T., Butakov N.* Optimization of learning strategies for artm-based topic models // *Hybrid Artificial Intelligent Systems* / Ed. by E. A. de la Cal, J. R. Villar Flecha, H. Quintián, E. Corchado. — Springer International Publishing, 2020. — Pp. 284–296.
- [80] *Kim S.-J., Koh K., Boyd S., Gorinevsky D.* L1 trend filtering // *SIAM review*. — 2009. — Vol. 51, no. 2. — Pp. 339–360.
- [81] *Kochedykov D. A., Apishev M. A., Golitsyn L. V., Vorontsov K. V.* Fast and modular regularized topic modelling // Proceeding of the 21st Conference Of FRUCT (Finnish-Russian University Cooperation in Telecommunications) Association. The seminar on Intelligence, Social Media and Web (ISMW). Helsinki, Finland, November 6–10, 2017. — IEEE, 2017. — Pp. 182–193.
- [82] *Koltcov S., Koltsova O., Nikolenko S.* Latent Dirichlet allocation: Stability and applications to studies of user-generated content // Proceedings of the 2014 ACM Conference on Web Science. — WebSci'14. — New York, NY, USA: ACM, 2014. — Pp. 161–165.
- [83] *Konietzny S., Dietz L., McHardy A.* Inferring functional modules of protein families with probabilistic topic models // *BMC Bioinformatics*. — 2011. — Vol. 12, no. 1. — P. 141.
- [84] *Krestel R., Fankhauser P., Nejdl W.* Latent Dirichlet allocation for tag recommendation // Proceedings of the third ACM conference on Recommender systems. — ACM, 2009. — Pp. 61–68.
- [85] *La Rosa M., Fiannaca A., Rizzo R., Urso A.* Probabilistic topic modeling for the analysis and classification of genomic sequences // *BMC Bioinformatics*. — 2015. — Vol. 16, no. Suppl 6. — P. S2.
- [86] *Lample G., Ballesteros M., Subramanian S., Kawakami K., Dyer C.* Neural architectures for named entity recognition // HLT-NAACL / Ed. by K. Knight, A. Nenkova, O. Rambow. — The Association for Computational Linguistics, 2016. — Pp. 260–270.
- [87] Language models are few-shot learners // *Advances in Neural Information Processing Systems* / Ed. by H. Larochelle, M. Ranzato, R. Hadsell, M. Balcan, H. Lin. — Vol. 33. — Curran Associates, Inc., 2020. — Pp. 1877–1901.
- [88] *Larsson M. O., Ugander J.* A concave regularization technique for sparse mixture models // *Advances in Neural Information Processing Systems 24* / Ed. by J. Shawe-Taylor, R. Zemel, P. Bartlett, F. Pereira, K. Weinberger. — 2011. — Pp. 1890–1898.
- [89] *Lee S. S., Chung T., McLeod D.* Dynamic item recommendation by topic modeling for social networks // *Information Technology: New Generations (ITNG)*, 2011 Eighth International Conference on. — IEEE, 2011. — Pp. 884–889.

- [90] *Lei S., Zhang J., Weng S., Zhang C.* Topic model with constrained word burstiness intensities // The 2011 International Joint Conference on Neural Networks. — 2011. — Pp. 68–74.
- [91] *Levy O., Goldberg Y.* Neural word embedding as implicit matrix factorization // Advances in Neural Information Processing Systems 27 / Ed. by Z. Ghahramani, M. Welling, C. Cortes, N. D. Lawrence, K. Q. Weinberger. — Curran Associates, Inc., 2014. — Pp. 2177–2185.
- [92] *Li S., Li J., Pan R.* Tag-weighted topic model for mining semi-structured documents // IJCAI'13 Proceedings of the Twenty-Third international joint conference on Artificial Intelligence. — AAAI Press, 2013. — Pp. 2855–2861.
- [93] *Li W., McCallum A.* Pachinko allocation: Dag-structured mixture models of topic correlations // ICML. — 2006.
- [94] *Li X.-X., Sun C.-B., Lu P., Wang X.-J., Zhong Y.-X.* Simultaneous image classification and annotation based on probabilistic model // *The Journal of China Universities of Posts and Telecommunications*. — 2012. — Vol. 19, no. 2. — Pp. 107–115.
- [95] *Litvak M., Vanetik N., Liu C., Xiao L., Savas O.* Improving summarization quality with topic modeling // Proceedings of the 2015 Workshop on Topic Models: Post-Processing and Applications. — New York, NY, USA: Association for Computing Machinery, 2015. — Pp. 39–47.
- [96] *Liu J., Shang J., Wang C., Ren X., Han J.* Mining quality phrases from massive text corpora // Proceedings of the 2015 ACM SIGMOD International Conference on Management of Data. — SIGMOD '15. — New York, NY, USA: ACM, 2015. — Pp. 1729–1744.
- [97] *Liu Y., Liu Z., Chua T.-S., Sun M.* Topical word embeddings // Proceedings of the Twenty-Ninth AAAI Conference on Artificial Intelligence. — AAAI'15. — AAAI Press, 2015. — Pp. 2418–2424.
- [98] *Lu Y., Mei Q., Zhai C.* Investigating task performance of probabilistic topic models: an empirical study of PLSA and LDA // *Information Retrieval*. — 2011. — Vol. 14, no. 2. — Pp. 178–203.
- [99] *M. A. Basher A. R., Fung B. C. M.* Analyzing topics and authors in chat logs for crime investigation // *Knowledge and Information Systems*. — 2014. — Vol. 39, no. 2. — Pp. 351–381.
- [100] *Mann G. S., McCallum A.* Simple, robust, scalable semi-supervised learning via expectation regularization // Proceedings of the 24th international conference on Machine learning. — ICML '07. — New York, NY, USA: ACM, 2007. — Pp. 593–600.
- [101] *Marchionini G.* Exploratory search: From finding to understanding // *Commun. ACM*. — 2006. — Vol. 49, no. 4. — Pp. 41–46.
- [102] *Marie N., Gandon F.* Survey of linked data based exploration systems // Proceedings of the 3rd International Workshop on Intelligent Exploration of Semantic Data (IESD 2014) co-located with the 13th International Semantic Web Conference (ISWC 2014), Riva del Garda, Italy, October 20, 2014. — 2014.
- [103] *Masada T., Kiyasu S., Miyahara S.* Comparing LDA with pLSI as a dimensionality reduction method in document clustering // Proceedings of the 3rd International Conference on Large-scale knowledge resources: construction and application. — LKR'08. — Springer-Verlag, 2008. — Pp. 13–26.
- [104] *McAuliffe J. D., Blei D. M.* Supervised topic models // Advances in Neural Information Processing Systems 20 / Ed. by J. C. Platt, D. Koller, Y. Singer, S. T. Roweis. — Curran Associates, Inc., 2008. — Pp. 121–128.
- [105] *Mei Q., Cai D., Zhang D., Zhai C.* Topic modeling with network regularization // Proceedings of the 17th International Conference on World Wide Web. — WWW'08. — New York, NY, USA: ACM, 2008. — Pp. 101–110.
- [106] *Mei Q., Shen X., Zhai C.* Automatic labeling of multinomial topic models // Proceedings of the 13th ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining. — New York, NY, USA: Association for Computing Machinery, 2007. — Pp. 490–499.
- [107] *Mikolov T., Chen K., Corrado G., Dean J.* Efficient estimation of word representations in vector space // *CoRR*. — 2013. — Vol. abs/1301.3781.

- [108] *Mikolov T., Sutskever I., Chen K., Corrado G., Dean J.* Distributed representations of words and phrases and their compositionality // *CoRR*. — 2013. — Vol. abs/1310.4546.
- [109] *Mimno D., Blei D.* Bayesian checking for topic models // 11th Conference on Empirical Methods in Natural Language Processing. — Association for Computational Linguistics, 2011. — Pp. 227–237.
- [110] *Mimno D., Hoffman M., Blei D.* Sparse stochastic inference for latent Dirichlet allocation // Proceedings of the 29th International Conference on Machine Learning (ICML-12) / Ed. by J. Langford, J. Pineau. — New York, NY, USA: Omnipress, July 2012. — Pp. 1599–1606.
- [111] *Mimno D., Li W., McCallum A.* Mixtures of hierarchical topics with pachinko allocation // ICML. — 2007.
- [112] *Mimno D., Wallach H. M., Naradowsky J., Smith D. A., McCallum A.* Polylingual topic models // Proceedings of the 2009 Conference on Empirical Methods in Natural Language Processing: Volume 2 - Volume 2. — EMNLP '09. — Stroudsburg, PA, USA: Association for Computational Linguistics, 2009. — Pp. 880–889.
- [113] *Mimno D., Wallach H. M., Talley E., Leenders M., McCallum A.* Optimizing semantic coherence in topic models // Proceedings of the Conference on Empirical Methods in Natural Language Processing. — EMNLP '11. — Stroudsburg, PA, USA: Association for Computational Linguistics, 2011. — Pp. 262–272.
- [114] *Minka T. P.* Estimating a Dirichlet distribution: Tech. rep.: 2000 (revised 2003, 2009, 2012).
- [115] *Moretti F.* Graphs, maps, trees : abstract models for literary history. — London; New York: Verso, 2007.
- [116] *Nadeau D., Sekine S.* A survey of named entity recognition and classification // *Linguisticae Investigationes*. — 2007. — Vol. 30, no. 1. — Pp. 3–26.
- [117] *Newman D., Bonilla E. V., Buntine W. L.* Improving topic coherence with regularized topic models // Advances in Neural Information Processing Systems 24 / Ed. by J. Shawe-Taylor, R. Zemel, P. Bartlett, F. Pereira, K. Weinberger. — 2011. — Pp. 496–504.
- [118] *Newman D., Chemudugunta C., Smyth P.* Statistical entity-topic models // Proceedings of the 12th ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining. — KDD '06. — New York, NY, USA: ACM, 2006. — Pp. 680–686.
- [119] *Newman D., Karimi S., Cavedon L.* External evaluation of topic models // Australasian Document Computing Symposium. — December 2009. — Pp. 11–18.
- [120] *Newman D., Lau J. H., Grieser K., Baldwin T.* Automatic evaluation of topic coherence // Human Language Technologies: The 2010 Annual Conference of the North American Chapter of the Association for Computational Linguistics. — HLT '10. — Stroudsburg, PA, USA: Association for Computational Linguistics, 2010. — Pp. 100–108.
- [121] *Newman D., Noh Y., Talley E., Karimi S., Baldwin T.* Evaluating topic models for digital libraries // Proceedings of the 10th annual Joint Conference on Digital libraries. — JCDL '10. — New York, NY, USA: ACM, 2010. — Pp. 215–224.
- [122] *Ni J., Dinu G., Florian R.* Weakly supervised cross-lingual named entity recognition via effective annotation and representation projection // The 55th Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics (ACL). — 2017.
- [123] *Ni X., Sun J.-T., Hu J., Chen Z.* Mining multilingual topics from wikipedia // Proceedings of the 18th International Conference on World Wide Web. — WWW '09. — New York, NY, USA: ACM, 2009. — Pp. 1155–1156.
- [124] *Nikolenko S. I., Koltcov S., Koltsova O.* Topic modelling for qualitative studies // *Journal of Information Science*. — 2017. — Vol. 43, no. 1. — Pp. 88–102.
- [125] On the opportunities and risks of foundation models / R. Bommasani, D. A. Hudson, E. Adeli, R. Altman, S. Arora, S. von Arx, M. S. Bernstein et al. // *CoRR*. — 2021. — Vol. abs/2108.07258.

- [126] *Paul M. J., Dredze M.* Drug extraction from the web: Summarizing drug experiences with multi-dimensional topic models // Human Language Technologies: Conference of the North American Chapter of the Association of Computational Linguistics, Proceedings, June 9–14, 2013, Westin Peachtree Plaza Hotel, Atlanta, Georgia, USA. — 2013. — Pp. 168–178.
- [127] *Paul M. J., Dredze M.* Discovering health topics in social media using topic models // *PLoS ONE*. — 2014. — Vol. 9, no. 8.
- [128] *Paul M. J., Girju R.* Topic modeling of research fields: An interdisciplinary perspective // RANLP. — RANLP 2009 Organising Committee / ACL, 2009. — Pp. 337–342.
- [129] *Pennington J., Socher R., Manning C. D.* GloVe: Global vectors for word representation // Empirical Methods in Natural Language Processing (EMNLP). — 2014. — Pp. 1532–1543.
- [130] *Phuong D. V., Phuong T. M.* A keyword-topic model for contextual advertising // Proceedings of the Third Symposium on Information and Communication Technology. — SoICT '12. — New York, NY, USA: ACM, 2012. — Pp. 63–70.
- [131] *Pinto J. C. L., Chahed T.* Modeling multi-topic information diffusion in social networks using latent Dirichlet allocation and Hawkes processes // Tenth International Conference on Signal-Image Technology & Internet-Based Systems. — 2014. — Pp. 339–346.
- [132] *Potapenko A., Popov A., Vorontsov K.* Interpretable probabilistic embeddings: bridging the gap between topic models and neural networks // Communications in Computer and Information Science, vol 789. AINL-6: Artificial Intelligence and Natural Language Conference, St. Petersburg, Russia, September 20-23, 2017. — Springer, Cham, 2017. — Pp. 167–180.
- [133] *Potapenko A. A., Vorontsov K. V.* Robust PLSA performs better than LDA // 35th European Conference on Information Retrieval, ECIR-2013, Moscow, Russia, 24-27 March 2013. — Lecture Notes in Computer Science (LNCS), Springer Verlag-Germany, 2013. — Pp. 784–787.
- [134] *Pritchard J. K., Stephens M., Donnelly P.* Inference of population structure using multilocus genotype data // *Genetics*. — 2000. — Vol. 155. — Pp. 945–959.
- [135] *Pujara J., Skomoroch P.* Large-scale hierarchical topic models // NIPS Workshop on Big Learning. — 2012.
- [136] *Rahman M.* Search engines going beyond keyword search: A survey // *International Journal of Computer Applications*. — August 2013. — Vol. 75, no. 17. — Pp. 1–8.
- [137] *Ramage D., Hall D., Nallapati R., Manning C. D.* Labeled LDA: a supervised topic model for credit attribution in multi-labeled corpora // Proceedings of the 2009 Conference on Empirical Methods in Natural Language Processing: Volume 1. — EMNLP '09. — Stroudsburg, PA, USA: Association for Computational Linguistics, 2009. — Pp. 248–256.
- [138] *Reisenbichler M., Reutterer T.* Topic modeling in marketing: recent advances and research opportunities // *Journal of Business Economics*. — 2019. — Vol. 89, no. 3. — Pp. 327–356.
- [139] *Riedl M., Biemann C.* TopicTiling: A text segmentation algorithm based on LDA // Proceedings of ACL 2012 Student Research Workshop. — ACL '12. — Stroudsburg, PA, USA: Association for Computational Linguistics, 2012. — Pp. 37–42.
- [140] *Rönnqvist S.* Exploratory topic modeling with distributional semantics // Advances in Intelligent Data Analysis XIV: 14th International Symposium, IDA 2015, Saint Etienne, France, October 22–24, 2015. Proceedings / Ed. by E. Fromont, T. De Bie, M. van Leeuwen. — Springer International Publishing, 2015. — Pp. 241–252.
- [141] *Rosen-Zvi M., Griffiths T., Steyvers M., Smyth P.* The author-topic model for authors and documents // Proceedings of the 20th conference on Uncertainty in artificial intelligence. — UAI '04. — Arlington, Virginia, United States: AUAI Press, 2004. — Pp. 487–494.
- [142] *Rubin T. N., Chambers A., Smyth P., Steyvers M.* Statistical topic models for multi-label document classification // *Machine Learning*. — 2012. — Vol. 88, no. 1-2. — Pp. 157–208.



- [143] *Scherer M., von Landesberger T., Schreck T.* Topic modeling for search and exploration in multivariate research data repositories // Research and Advanced Technology for Digital Libraries: International Conference on Theory and Practice of Digital Libraries, TPDL 2013, Valletta, Malta, September 22-26, 2013. Proceedings / Ed. by T. Aalberg, C. Papatheodorou, M. Dobрева, G. Tsakonas, C. J. Farrugia. — Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2013. — Pp. 370–373.
- [144] *Shang J., Liu J., Jiang M., Ren X., Voss C. R., Han J.* Automated phrase mining from massive text corpora // *CoRR*. — 2017. — Vol. abs/1702.04457.
- [145] *Sharma A., Pawar D. M.* Survey paper on topic modeling techniques to gain usefull forecasting information on violant extremist activities over cyber space // *International Journal of Advanced Research in Computer Science and Software Engineering*. — 2015. — Vol. 5, no. 12. — Pp. 429–436.
- [146] *Shashanka M., Raj B., Smaragdis P.* Sparse overcomplete latent variable decomposition of counts data // Advances in Neural Information Processing Systems, NIPS-2007 / Ed. by J. C. Platt, D. Koller, Y. Singer, S. Roweis. — Cambridge, MA: MIT Press, 2008. — Pp. 1313–1320.
- [147] *Shivashankar S., Srivathsan S., Ravindran B., Tendulkar A. V.* Multi-view methods for protein structure comparison using latent dirichlet allocation. // *Bioinformatics [ISMB/ECCB]*. — 2011. — Vol. 27, no. 13. — Pp. 61–68.
- [148] *Shneiderman B.* The eyes have it: A task by data type taxonomy for information visualizations // Proceedings of the 1996 IEEE Symposium on Visual Languages. — VL'96. — Washington, DC, USA: IEEE Computer Society, 1996. — Pp. 336–343.
- [149] *Si X., Sun M.* Tag-LDA for scalable real-time tag recommendation // *Journal of Information & Computational Science*. — 2009. — Vol. 6. — Pp. 23–31.
- [150] *Singh R., Hsu Y.-W., Moon N.* Multiple perspective interactive search: a paradigm for exploratory search and information retrieval on the Web // *Multimedia Tools and Applications*. — 2013. — Vol. 62, no. 2. — Pp. 507–543.
- [151] *Sokolov E., Bogotubsky L.* Topic models regularization and initialization for regression problems // Proceedings of the 2015 Workshop on Topic Models: Post-Processing and Applications. — New York, NY, USA: ACM, 2015. — Pp. 21–27.
- [152] *Steyvers M., Griffiths T.* Finding scientific topics // *Proceedings of the National Academy of Sciences*. — 2004. — Vol. 101, no. Suppl. 1. — Pp. 5228–5235.
- [153] *Sun Y., Han J., Gao J., Yu Y.* iTopicModel: Information network-integrated topic modeling // 2009 Ninth IEEE International Conference on Data Mining. — 2009. — Pp. 493–502.
- [154] *Taddy M.* On estimation and selection for topic models // *Artificial Intelligence and Statistics*. — 2012. — Pp. 1184–1193.
- [155] *Tan Y., Ou Z.* Topic-weak-correlated latent Dirichlet allocation // 7th International Symposium Chinese Spoken Language Processing (ISCSLP). — 2010. — Pp. 224–228.
- [156] *Teh Y. W., Jordan M. I., Beal M. J., Blei D. M.* Hierarchical Dirichlet processes // *Journal of the American Statistical Association*. — 2006. — Vol. 101, no. 476. — Pp. 1566–1581.
- [157] *Teh Y. W., Newman D., Welling M.* A collapsed variational Bayesian inference algorithm for latent Dirichlet allocation // NIPS. — 2006. — Pp. 1353–1360.
- [158] TextFlow: Towards better understanding of evolving topics in text. / W. Cui, S. Liu, L. Tan, C. Shi, Y. Song, Z. Gao, H. Qu, X. Tong // *IEEE transactions on visualization and computer graphics*. — 2011. — Vol. 17, no. 12. — Pp. 2412–2421.
- [159] *Varadarajan J., Emonet R., Odobez J.-M.* A sparsity constraint for topic models — application to temporal activity mining // NIPS-2010 Workshop on Practical Applications of Sparse Modeling: Open Issues and New Directions. — 2010.
- [160] *Varshney D., Kumar S., Gupta V.* Modeling information diffusion in social networks using latent topic information // Intelligent Computing Theory / Ed. by D.-S. Huang, V. Bevilacqua, P. Premaratne. — Springer International Publishing, 2014. — Vol. 8588 of *Lecture Notes in Computer Science*. — Pp. 137–148.

- [161] *Veas E. E., di Sciascio C.* Interactive topic analysis with visual analytics and recommender systems // 2nd Workshop on Cognitive Computing and Applications for Augmented Human Intelligence, CCAAI2015, International Joint Conference on Artificial Intelligence, IJCAI, Buenos Aires, Argentina, July 2015. — Aachen, Germany, Germany: CEUR-WS.org, 2015.
- [162] *Vorontsov K., Frei O., Apishev M., Romov P., Suvorova M., Yanina A.* Non-bayesian additive regularization for multimodal topic modeling of large collections // Proceedings of the 2015 Workshop on Topic Models: Post-Processing and Applications. — New York, NY, USA: ACM, 2015. — Pp. 29–37.
- [163] *Vorontsov K. V., Frei O. I., Apishev M. A., Romov P. A., Suvorova M. A.* BigARTM: Open source library for regularized multimodal topic modeling of large collections // AIST'2015, Analysis of Images, Social networks and Texts. — Springer International Publishing Switzerland, Communications in Computer and Information Science (CCIS), 2015. — Pp. 370–384.
- [164] *Vorontsov K. V., Potapenko A. A.* Tutorial on probabilistic topic modeling: Additive regularization for stochastic matrix factorization // AIST'2014, Analysis of Images, Social networks and Texts. — Vol. 436. — Springer International Publishing Switzerland, Communications in Computer and Information Science (CCIS), 2014. — Pp. 29–46.
- [165] *Vorontsov K. V., Potapenko A. A.* Additive regularization of topic models // *Machine Learning, Special Issue on Data Analysis and Intelligent Optimization with Applications*. — 2015. — Vol. 101, no. 1. — Pp. 303–323.
- [166] *Vorontsov K. V., Potapenko A. A., Plavin A. V.* Additive regularization of topic models for topic selection and sparse factorization // The Third International Symposium On Learning And Data Sciences (SLDS 2015). April 20-22, 2015. Royal Holloway, University of London, UK. / Ed. by A. G. et al. — Springer International Publishing Switzerland 2015, 2015. — Pp. 193–202.
- [167] *Vulic I., De Smet W., Tang J., Moens M.-F.* Probabilistic topic modeling in multilingual settings: an overview of its methodology and applications // *Information Processing & Management*. — 2015. — Vol. 51, no. 1. — Pp. 111–147.
- [168] *Vulić I., Smet W., Moens M.-F.* Cross-language information retrieval models based on latent topic models trained with document-aligned comparable corpora // *Information Retrieval*. — 2012. — Pp. 1–38.
- [169] *Wallach H.* Structured Topic Models for Language: Ph.D. thesis / Newnham College, University of Cambridge. — 2008.
- [170] *Wallach H., Mimno D., McCallum A.* Rethinking LDA: Why priors matter // Advances in Neural Information Processing Systems 22: 23rd Annual Conference on Neural Information Processing Systems, Vancouver, BC, Canada / Ed. by Y. Bengio, D. Schuurmans, J. Lafferty, C. K. I. Williams, A. Culotta. — 2009. — Pp. 1973–1981.
- [171] *Wallach H., Murray I., Salakhutdinov R., Mimno D.* Evaluation methods for topic models // 26th International Conference on Machine Learning, Montreal, Canada. — 2009. — Pp. 1105–1112.
- [172] *Wallach H. M.* Topic modeling: Beyond bag-of-words // Proceedings of the 23rd International Conference on Machine Learning. — ICML '06. — New York, NY, USA: ACM, 2006. — Pp. 977–984.
- [173] *Wang C., Blei D. M.* Decoupling sparsity and smoothness in the discrete hierarchical Dirichlet process // NIPS. — Curran Associates, Inc., 2009. — Pp. 1982–1989.
- [174] *Wang C., Blei D. M.* Collaborative topic modeling for recommending scientific articles // Proceedings of the 17th ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining. — New York, NY, USA: ACM, 2011. — Pp. 448–456.
- [175] *Wang C., Danilevsky M., Desai N., Zhang Y., Nguyen P., Taula T., Han J.* A phrase mining framework for recursive construction of a topical hierarchy // Proceedings of the 19th ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining. — KDD '13. — New York, NY, USA: ACM, 2013. — Pp. 437–445.

- [176] Wang C., Liu J., Desai N., Danilevsky M., Han J. Constructing topical hierarchies in heterogeneous information networks // *Knowledge and Information Systems*. — 2014. — Vol. 44, no. 3. — Pp. 529–558.
- [177] Wang C., Liu X., Song Y., Han J. Scalable and robust construction of topical hierarchies // *CoRR*. — 2014. — Vol. abs/1403.3460.
- [178] Wang C., Liu X., Song Y., Han J. Towards interactive construction of topical hierarchy: A recursive tensor decomposition approach // Proceedings of the 21th ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining. — KDD '15. — New York, NY, USA: ACM, 2015. — Pp. 1225–1234.
- [179] Wang H., Zhang D., Zhai C. Structural topic model for latent topical structure analysis // Proceedings of the 49th Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics: Human Language Technologies - Volume 1. — HLT '11. — Stroudsburg, PA, USA: Association for Computational Linguistics, 2011. — Pp. 1526–1535.
- [180] Wang X., McCallum A. Topics over time: A non-markov continuous-time model of topical trends // Proceedings of the 12th ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining. — KDD '06. — New York, NY, USA: ACM, 2006. — Pp. 424–433.
- [181] Wang X., McCallum A., Wei X. Topical n-grams: Phrase and topic discovery, with an application to information retrieval // Proceedings of the 2007 Seventh IEEE International Conference on Data Mining. — Washington, DC, USA: IEEE Computer Society, 2007. — Pp. 697–702.
- [182] White R. W., Roth R. A. Exploratory Search: Beyond the Query-Response Paradigm. Synthesis Lectures on Information Concepts, Retrieval, and Services. — Morgan and Claypool Publishers, 2009.
- [183] Wu Y., Ding Y., Wang X., Xu J. A comparative study of topic models for topic clustering of Chinese web news // Computer Science and Information Technology (ICCSIT), 2010 3rd IEEE International Conference on. — Vol. 5. — July 2010. — Pp. 236–240.
- [184] Yan X., Guo J., Lan Y., Cheng X. A biterm topic model for short texts // Proceedings of the 22Nd International Conference on World Wide Web. — WWW '13. — Republic and Canton of Geneva, Switzerland: International World Wide Web Conferences Steering Committee, 2013. — Pp. 1445–1456.
- [185] Yanina A., Golitsyn L., Vorontsov K. Multi-objective topic modeling for exploratory search in tech news // Communications in Computer and Information Science, vol 789. AINL-6: Artificial Intelligence and Natural Language Conference, St. Petersburg, Russia, September 20-23, 2017 / Ed. by A. Filchenkov, L. Pivovarova, J. Žižka. — Springer International Publishing, Cham, 2018. — Pp. 181–193.
- [186] Yeh J.-h., Wu M.-l. Recommendation based on latent topics and social network analysis // Proceedings of the 2010 Second International Conference on Computer Engineering and Applications. — Vol. 1. — IEEE Computer Society, 2010. — Pp. 209–213.
- [187] Yi X., Allan J. A comparative study of utilizing topic models for information retrieval // Advances in Information Retrieval. — Springer Berlin Heidelberg, 2009. — Vol. 5478 of *Lecture Notes in Computer Science*. — Pp. 29–41.
- [188] Yin H., Cui B., Chen L., Hu Z., Zhang C. Modeling location-based user rating profiles for personalized recommendation // *ACM Transactions of Knowledge Discovery from Data*. — 2015.
- [189] Yin H., Cui B., Sun Y., Hu Z., Chen L. LCARS: A spatial item recommender system // *ACM Transaction on Information Systems*. — 2014.
- [190] Yin Z., Cao L., Han J., Zhai C., Huang T. Geographical topic discovery and comparison // Proceedings of the 20th international conference on World wide web / ACM. — 2011. — Pp. 247–256.
- [191] Zavitsanos E., Paliouras G., Vouros G. A. Non-parametric estimation of topic hierarchies from texts with hierarchical Dirichlet processes // *Journal of Machine Learning Research*. — 2011. — Vol. 12. — Pp. 2749–2775.

- [192] *Zhang J., Song Y., Zhang C., Liu S.* Evolutionary hierarchical Dirichlet processes for multiple correlated time-varying corpora // Proceedings of the 16th ACM SIGKDD international conference on Knowledge discovery and data mining. — 2010. — Pp. 1079–1088.
- [193] *Zhao H., Phung D., Huynh V., Jin Y., Du L., Buntine W.* Topic modelling meets deep neural networks: A survey // Proceedings of the Thirtieth International Joint Conference on Artificial Intelligence, IJCAI-21 / Ed. by Z.-H. Zhou.— International Joint Conferences on Artificial Intelligence Organization, 8 2021. — Pp. 4713–4720.
- [194] *Zhao W. X., Jiang J., Weng J., He J., Lim E.-P., Yan H., Li X.* Comparing Twitter and traditional media using topic models // Proceedings of the 33rd European Conference on Advances in Information Retrieval. — ECIR'11. — Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2011. — Pp. 338–349.
- [195] *Zhao X. W., Wang J., He Y., Nie J.-Y., Li X.* Originator or propagator?: Incorporating social role theory into topic models for Twitter content analysis // Proceedings of the 22Nd ACM International Conference on Conference on Information and Knowledge Management. — CIKM '13. — New York, NY, USA: ACM, 2013. — Pp. 1649–1654.
- [196] *Zhou S., Li K., Liu Y.* Text categorization based on topic model // *International Journal of Computational Intelligence Systems*. — 2009. — Vol. 2, no. 4. — Pp. 398–409.
- [197] *Zuo Y., Zhao J., Xu K.* Word network topic model: A simple but general solution for short and imbalanced texts // *Knowledge and Information Systems*. — 2016. — Vol. 48, no. 2. — Pp. 379–398.