

Прикладной статистический анализ данных.  
3. Непараметрическая проверка гипотез.

Рябенко Евгений  
riabenko.e@gmail.com

I/2015

## Виды задач

Одновыборочные:

 $X^n$ 

среднее выборки равно заданному числу 1 3 8

Двухвыборочные:

 $X_1^{n_1}, X_2^{n_2}$ 

средние выборок равны

 $X_1, X_2$  связанные 2 4 9 $X_1, X_2$  независимые 5 10

дисперсии выборок равны 6 11

## Варианты двухвыборочных гипотез

О положении:

$$H_0: \mathbb{E}X_1 = \mathbb{E}X_2,$$

$$H_1: \mathbb{E}X_1 <\neq> \mathbb{E}X_2;$$

$$H_0: \text{med } X_1 = \text{med } X_2,$$

$$H_1: \text{med } X_1 <\neq> \text{med } X_2;$$

$$H_0: p(X_1 > X_2) = 0.5,$$

$$H_1: p(X_1 > X_2) <\neq> 0.5;$$

$$H_0: F_{X_1}(x) = F_{X_2}(x),$$

$$H_1: F_{X_1}(x) = F_{X_2}(x + \Delta), \Delta <\neq> 0;$$

$$H_0: F_{X_1}(x) = F_{X_2}(x),$$

$$H_1: F_{X_1}(x) <\neq> F_{X_2}(x).$$

О рассеянии:

$$H_0: \mathbb{D}X_1 = \mathbb{D}X_2,$$

$$H_1: \mathbb{D}X_1 <\neq> \mathbb{D}X_2;$$

$$H_0: F_{X_1}(x) = F_{X_2}(x + \Delta),$$

$$H_1: F_{X_1}(x) = F_{X_2}(\sigma x + \Delta), \sigma <\neq> 1.$$

## (1) Одновыборочный критерий знаков

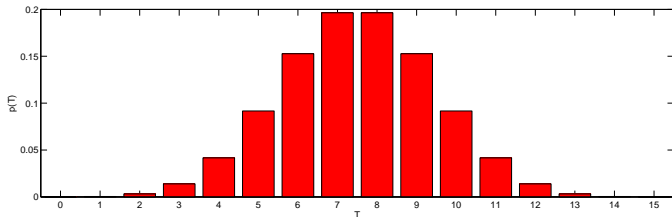
выборка:  $X^n = (X_1, \dots, X_n), X_i \neq m_0;$

нулевая гипотеза:  $H_0: \text{med } X = m_0;$

альтернатива:  $H_1: \text{med } X <\neq> m_0;$

$$\text{статистика: } T(X^n) = \begin{cases} n_1 = \sum_{i=1}^n [X_i > m_0], & H_1: \text{med } X_i > m_0, \\ n_2 = \sum_{i=1}^n [X_i < m_0], & H_1: \text{med } X_i < m_0, \\ \min(n_1, n_2), & H_1: \text{med } X_i \neq m_0; \end{cases}$$

$T(X^n) \sim \text{Bin}(n, \frac{1}{2})$  при  $H_0$ .



## (1) Одновыборочный критерий знаков

**Пример 1** (Капжі, критерий 45): предполагается, что стоимость материала, получаемого при переработке строительной конструкции, составляет в среднем 0.28 долларов. Взята случайная выборка из 10 конструкций, все они переработаны; стоимость в долларах полученного из каждой конструкции материала составила:

$$\{0.28, 0.18, 0.24, 0.30, 0.40, 0.36, 0.15, 0.42, 0.23, 0.48\}.$$

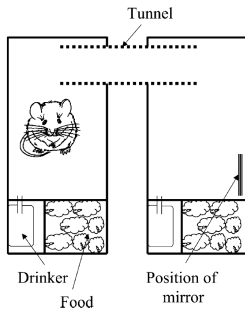
Правомерно ли использовать гипотезу о том, что она взята из популяции с медианой стоимости переработанного материала 0.28 долларов?

$H_0$ : медиана стоимости переработанного материала составляет 0.28 долларов.

$H_1$ : медиана стоимости переработанного материала отличается от 0.28 долларов  $\Rightarrow p = 1$ , 95% доверительный интервал для медианы —  $[0.196, 0.414]$ .

## (1) Одновыборочный критерий знаков

**Пример 2:** (Shervin, 2004): 16 лабораторных мышей были помещены в двухкомнатные клетки, в одной из комнат висело зеркало. Измерялось доля времени, которое каждая мышь проводила в каждой из своих двух клеток.



Общая постановка:

$H_0$ : мышам всё равно, висит в клетке зеркало или нет.

$H_1$ : у мышей есть какие-то предпочтения насчёт зеркала.

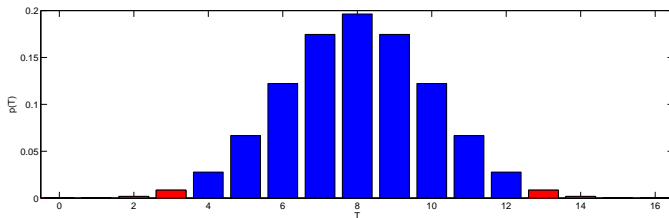
## (1) Одновыборочный критерий знаков

$H_0$ : медиана доли времени, проводимого в клетке с зеркалом, равна  $\frac{1}{2}$ .

$H_1$ : медиана доли времени, проводимого в клетке с зеркалом, не равна  $\frac{1}{2}$ .

Редуцированные данные: 0 — мышь провела больше времени в комнате с зеркалом, 1 — в комнате без зеркала.

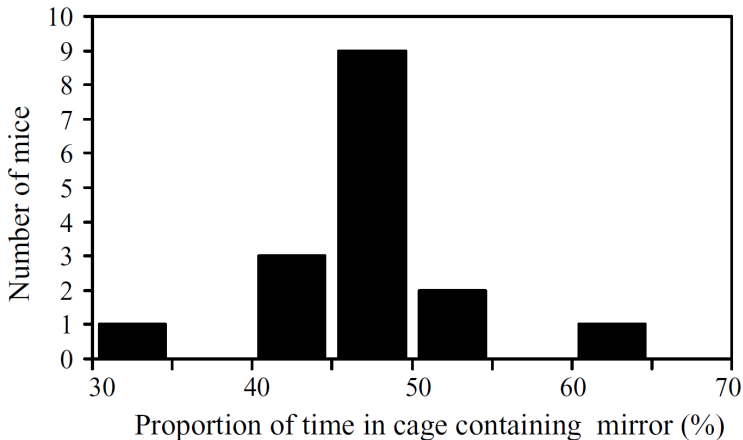
Статистика:  $T$  — число единиц в выборке.



13 из 16 мышей провели больше времени в комнате без зеркала.

Критерий знаков:  $p = 0.0213$ , 95% доверительный интервал для вероятности (что мышь проведёт больше времени в комнате без зеркала) —  $[0.54, 0.96]$ .

## (1) Одновыборочный критерий знаков



Средняя доля времени, проводимого в клетке с зеркалом —  $47.6 \pm 4.7\%$ .



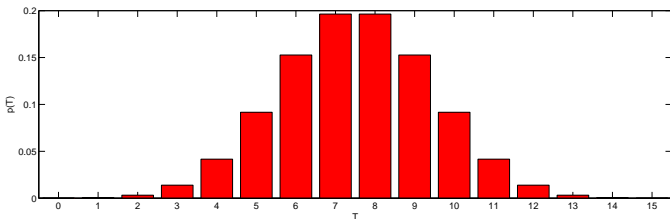
## (2) Двухвыборочный критерий знаков

выборки:  $X_1^n = (X_{11}, \dots, X_{1n})$ ,  
 $X_2^n = (X_{21}, \dots, X_{2n})$ ,  $X_{1i} \neq X_{2i}$ ,  
 выборки связанные;

нулевая гипотеза:  $H_0: p(X_1 > X_2) = \frac{1}{2}$ ;

альтернатива:  $H_1: p(X_1 > X_2) <\neq> \frac{1}{2}$ ;

статистика:  $T(X_1^n, X_2^n) = \begin{cases} n_1 = \sum_{i=1}^n [X_{1i} > X_{2i}], & H_1: >, \\ n_2 = \sum_{i=1}^n [X_{1i} < X_{2i}], & H_1: <, \\ \min(n_1, n_2), & H_1: \neq; \end{cases}$   
 $T(X_1^n, X_2^n) \sim \text{Bin}(n, \frac{1}{2})$  при  $H_0$ .



## (2) Двухвыборочный критерий знаков

**Пример 1** (Hollander & Wolfie, 29f): депрессивность 9 пациентов была измерена по шкале Гамильтона до и после первого приёма транквилизатора. Подействовал ли транквилизатор?

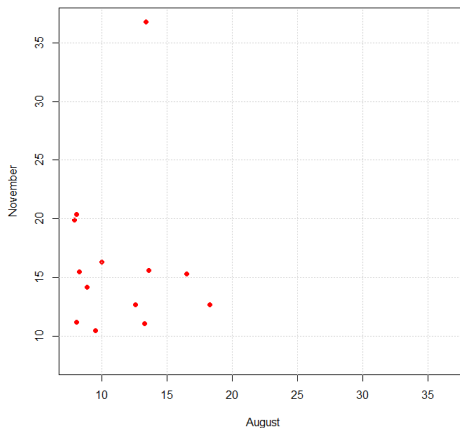
$H_0$ : уровень депрессивности не изменился.

$H_1$ : уровень депрессивности снизился  $\Rightarrow p = 0.09$ , 95% односторонний доверительный интервал для медианы изменения:

- $[-0.041, \infty]$  — сглаженный,
- $[0.01, \infty]$  — консервативный.

## (2) Двухвыборочный критерий знаков

**Пример 2:** (Laureysens et al., 2004): для 13 разновидностей тополей, растущих в зоне интенсивного загрязнения, в августе и ноябре измерялась средняя концентрация алюминия в микрограммах на грамм древесины.



## (2) Двухвыборочный критерий знаков

$H_0$ : концентрация алюминия не менялась.

$H_1$ : концентрация алюминия изменилась.

Для тополей 10 из 13 разновидностей концентрация алюминия увеличилась.

Критерий знаков:  $p = 0.0923$ , 95% доверительный интервал для медианы изменения —  $[0.687, 10.107]$ .

## Причины использовать критерий знаков

- Точные разности  $\Delta x_i$  неизвестны, известны только их знаки (сравнение агрессивности комаров).
- Разности  $\Delta x_i$  при  $H_1$  могут быть небольшими по модулю, но иметь систематический характер по знаку (пример с мышами).
- Разности  $\Delta x_i$  при  $H_0$  могут быть большими по модулю, но случайными по знаку (влияние меди на число личинок комаров).

## Вариационный ряд, ранги, связи

$$X_1, \dots, X_n \Rightarrow X_{(1)} \leq \dots < \underbrace{X_{(k_1)} = \dots = X_{(k_2)}}_{\text{связка размера } k_2 - k_1 + 1} < \dots \leq X_{(n)}$$

**Ранг** наблюдения  $X_i$ :

$$\text{rank}(X_i) = \mathbb{E} \{ r \mid X_i = X_{(r)} \}$$

т. е. если  $X_i$  не в связке, то ранг — номер  $X_i$  в вариационном ряду,  
если  $X_i$  в связке  $X_{(k_1)}, \dots, X_{(k_2)}$ , то  $\text{rank}(X_i) = \frac{k_1 + k_2}{2}$ .

## (3) Одновыборочный критерий знаковых рангов Уилкоксона

выборка:  $X^n = (X_1, \dots, X_n), X_i \neq m_0,$

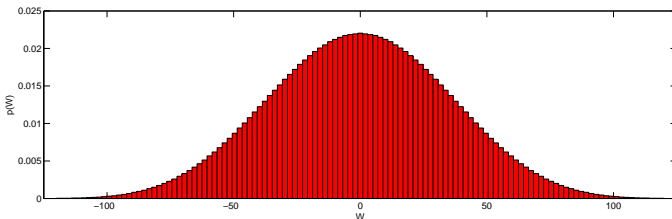
$F(X)$  симметрично относительно медианы;

нулевая гипотеза:  $H_0: \text{med } X = m_0;$

альтернатива:  $H_1: \text{med } X <\neq> m_0;$

статистика:  $W(X^n) = \sum_{i=1}^n \text{rank}(|X_i - m_0|) \cdot \text{sign}(X_i - m_0);$

$W(X^n)$  имеет табличное распределение при  $H_0$ .



## (3) Одновыборочный критерий знаковых рангов Уилкоксона

Откуда берётся табличное распределение?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	W
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-120
+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-118
-	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-116
+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-114
-	-	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-114
+	-	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-112
-	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-110
+	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-108
-	-	-	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-112
+	-	-	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-110
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	
-	+	+	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	110
+	+	+	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	112
-	-	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	108
+	-	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	110
-	+	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	112
+	+	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	114
-	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	114
+	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	116
-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	118
+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	120



### (3) Одновыборочный критерий знаковых рангов Уилкоксона

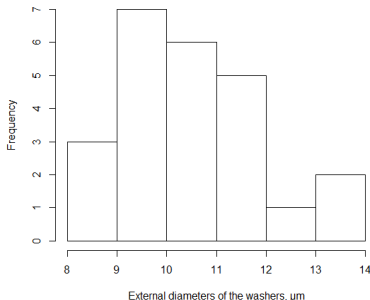
Аппроксимация для  $n > 20$ :

$$W \sim N \left( 0, \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right).$$

Обработка связок: зависит от реализации.

## (3) Одновыборочный критерий знаковых рангов Уилкоксона

**Пример 1** (Вопни, табл. 1.4): целевой внешний диаметр втулки — 10 мкм. Служба контроля качества производства измерила его для 24 втулок и получила следующее распределение:



$H_0$ : средний внешний диаметр втулок соответствует норме.

$H_1$ : средний внешний диаметр втулок не соответствует норме

$\Rightarrow p = 0.0673$ , 95% доверительный интервал для медианы —  $[9.95, 11.15]$ .

### (3) Одновыборочный критерий знаковых рангов Уилкоксона

**Пример 2** (зеркала в клетках мышей):

$H_0$ : медиана доли времени, проводимого в клетке с зеркалом, равна  $\frac{1}{2}$ .

$H_1$ : медиана доли времени, проводимого в клетке с зеркалом, не равна  $\frac{1}{2} \Rightarrow p = 0.0703$ .

#### (4) Критерий знаковых рангов Уилкоксона для связанных выборок

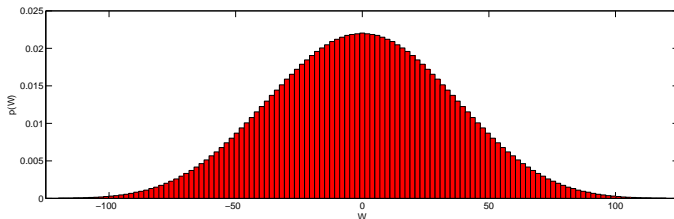
выборки:  $X_1^n = (X_{11}, \dots, X_{1n})$ ,  
 $X_2^n = (X_{21}, \dots, X_{2n})$ ,  $X_{1i} \neq X_{2i}$ ,  
 выборки связанные;

нулевая гипотеза:  $H_0: \text{med}(X_1 - X_2) = 0$ ;

альтернатива:  $H_1: \text{med}(X_1 - X_2) < \neq > 0$ ;

статистика:  $W(X_1^n, X_2^n) = \sum_{i=1}^n \text{rank}(|X_{1i} - X_{2i}|) \cdot \text{sign}(X_{1i} - X_{2i})$ ;

$W(X_1^n, X_2^n)$  имеет табличное распределение при  $H_0$ .



#### (4) Критерий знаковых рангов Уилкоксона для связанных выборок

**Пример 1** (Капји, критерий 48): управляемый вручную станок на каждом шаге процесса производит пару пружин. Для 14 пар измерена прочность:

$X_1$ : {1.38, 0.39, 1.42, 0.54, 5.94, 0.59, 2.67, 2.44, 0.56, 0.69, 0.71, 0.95, 0.50, 9.69},

$X_2$ : {1.42, 0.39, 1.46, 0.55, 6.15, 0.61, 2.69, 2.68, 0.53, 0.72, 0.72, 0.93, 0.53, 10.37}.

Одинакова ли прочность пружин в паре?

$H_0$ : средние значение прочности пружин в паре равны.

$H_1$ : средние значение прочности пружин в паре не равны  $\Rightarrow p = 0.0142$ ,  
95% доверительный интервал для медианной разности — [0.005, 0.14].

#### (4) Критерий знаковых рангов Уилкоксона для связанных выборок

**Пример 2** (алюминий в тополях):

$H_0$ : медиана изменения концентрации алюминия равна нулю.

$H_1$ : медиана изменения концентрации алюминия не равна нулю  $\Rightarrow 0.0398$ ,  
95% доверительный интервал для медианы изменения —  $[0.35, 9.3]$ .

## (5) Критерий Манна-Уитни-Уилкоксона

выборки:  $X_1^{n_1} = (X_{11}, \dots, X_{1n_1}),$

$X_2^{n_2} = (X_{21}, \dots, X_{2n_2}),$

выборки независимые;

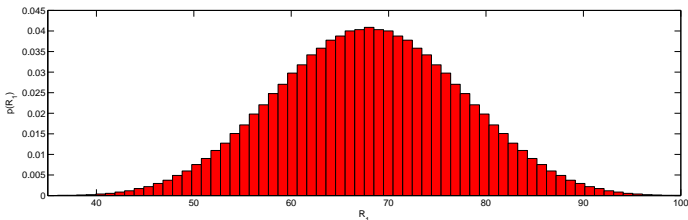
нулевая гипотеза:  $H_0: F_{X_1}(x) = F_{X_2}(x);$

альтернатива:  $H_1: F_{X_1}(x) = F_{X_2}(x + \Delta), \Delta < \neq 0;$

статистика:  $X_{(1)} \leq \dots \leq X_{(n_1+n_2)}$  — вариационный ряд  
объединённой выборки  $X = X_1^{n_1} \cup X_2^{n_2},$

$$R_1(X_1^{n_1}, X_2^{n_2}) = \sum_{i=1}^{n_1} \text{rank}(X_{1i});$$

$R_1(X_1^{n_1}, X_2^{n_2})$  имеет табличное распределение при  $H_0.$



## (5) Критерий Манна-Уитни-Уилкоксона

Откуда берётся табличное распределение?

Первая выборка	Вторая выборка	$R_1$
{1,2,3}	{4,5,6,7}	6
{1,2,4}	{3,5,6,7}	7
{1,2,5}	{3,4,6,7}	8
{1,2,6}	{3,4,5,7}	9
{1,2,7}	{3,4,5,6}	10
{1,3,4}	{2,5,6,7}	8
{1,3,5}	{2,4,6,7}	9
{1,3,6}	{2,4,5,7}	10
{1,3,7}	{2,4,5,6}	11
{1,4,5}	{2,3,6,7}	6
...	...	...
{3,4,5}	{1,2,6,7}	12
{3,4,6}	{1,2,5,7}	13
{3,4,7}	{1,2,5,6}	14
{3,5,6}	{1,2,4,7}	14
{3,5,7}	{1,2,4,6}	15
{3,6,7}	{1,2,4,5}	16
{4,5,6}	{1,2,3,7}	15
{4,5,7}	{1,2,3,6}	16
{4,6,7}	{1,2,3,5}	17
{5,6,7}	{1,2,3,4}	18



## (5) Критерий Манна-Уитни-Уилкоксона

Аппроксимация для  $n_1, n_2 > 10$ :

$$R_1 \sim N \left( \frac{n_1(n_1 + n_2 + 1)}{2}, \frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)}{12} \right).$$

Обработка связок: зависит от реализации.

## (5) Критерий Манна-Уитни-Уилкоксона

**Пример 1** (Капји, критерий 52): сотрудник налоговой службы хочет сравнить средние значения в двух выборках заявленных трат на компенсацию командировочных расходов в одной и той же компании в двух разных периодах (расходы скорректированы на инфляцию).

$$X_1: \{50.5, 37.5, 49.8, 56.0, 42.0, 56.0, 50.0, 54.0, 48.0\},$$

$$X_2: \{57.0, 52.0, 51.0, 44.2, 55.0, 62.0, 59.0, 45.2, 53.5, 44.4\}.$$

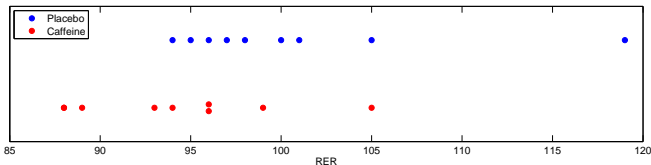
Равны ли средние расходы?

$H_0$ : средние расходы равны.

$H_1$ : средние расходы не равны  $\Rightarrow p = 0.3072$ , 95% доверительный интервал для медианной разности —  $[-9, 4]$ .

## (5) Критерий Манна-Уитни-Уилкоксона

**Пример 2:** RER (респираторный обмен)— соотношение числа молекул  $CO_2$  и  $O_2$  в выдыхаемом воздухе. Является косвенным признаком того, из жиров или углеводов вырабатывается энергия в момент измерения. Изучалось влияние кофеина на мышечный метаболизм. В эксперименте принимало участие 18 испытуемых, респираторный обмен которых измерялся в процессе физических упражнений. За час до этого 9 из них получили таблетку кофеина, оставшиеся 9 — плацебо. Повлиял ли кофеин на значение показателя респираторного обмена?



$H_0$ : среднее значение показателя респираторного обмена не отличается в двух группах.

$H_1$ : среднее значение показателя респираторного обмена отличается в двух группах.

## (б) Критерий Манна-Уитни-Уилкоксона

Ранг	Наблюдение	Номер наблюдения	Наблюдение	Ранг
16.5	105	1	96	9
18	119	2	99	13
14	100	3	94	5.5
11	97	4	89	3
9	96	5	96	9
15	101	6	93	4
5.5	94	7	88	1.5
7	95	8	105	16.5
12	98	9	88	1.5

Статистика  $R_1$  — сумма рангов в одной из групп.

$p = 0.0521$ , 95% доверительный интервал для медианной разности —  $[-0.00005, 1.2]$ .

## (6) Критерий Зигеля-Тьюки

выборки:  $X_1^{n_1} = (X_{11}, \dots, X_{1n_1}),$   
 $X_2^{n_2} = (X_{21}, \dots, X_{2n_2}),$

выборки независимые;

нулевая гипотеза:  $H_0: \mathbb{D}X_1 = \mathbb{D}X_2;$

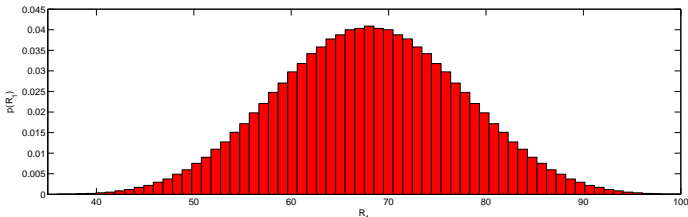
альтернатива:  $H_1: \mathbb{D}X_1 < \neq > \mathbb{D}X_2;$

статистика:  $X_{(1)} \leq \dots \leq X_{(N)}$  — вариационный ряд

объединённой выборки  $X^N = X_1^{n_1} \cup X_2^{n_2}, N = n_1 + n_2,$

$$R_1(X_1^{n_1}, X_2^{n_2}) = \sum_{i=1}^{n_1} \widetilde{\text{rank}}(X_{1i});$$

$R_1(X_1^{n_1}, X_2^{n_2})$  имеет табличное распределение при  $H_0.$



Ранги присваиваются необычным образом:

$$\begin{array}{cccccccc} X_{(i)} & X_{(1)} & X_{(2)} & X_{(3)} & \dots & X_{(N-2)} & X_{(N-1)} & X_{(N)} \\ \widetilde{\text{rank}}(X_{(i)}) & 1 & 4 & 5 & & 6 & 3 & 2 \end{array}$$

## (6) Критерий Зигеля-Тьюки

**Пример** (Капји, критерий 53): менеджер по кейтерингу хочет проверить, одинакова ли дисперсия количества соуса в упаковке при расфасовке с помощью двух диспенсеров. Каждым из диспенсеров он наполнил 10 упаковок.

$$X_1: \{2.4, 6.1, 7.3, 8.5, 8.8, 9.4, 9.8, 10.1, 10.1, 12.6\},$$

$$X_2: \{2.9, 3.3, 3.6, 4.2, 4.9, 7.3, 11.7, 13.1, 15.3, 16.5\}.$$

Предполагается, что оба диспенсера хорошо откалиброваны, то есть, дают одинаковое среднее количество соуса в упаковке.

$H_0$ : дисперсия количества соуса в упаковке не отличается для двух диспенсеров.

$H_1$ : дисперсия количества соуса в упаковке для двух диспенсеров отличается  $\Rightarrow p = 0.0288$ , 95% доверительный интервал для отношения дисперсий —  $[-11, -1.00003]$ .

## (6) Критерий Зигеля-Тьюки

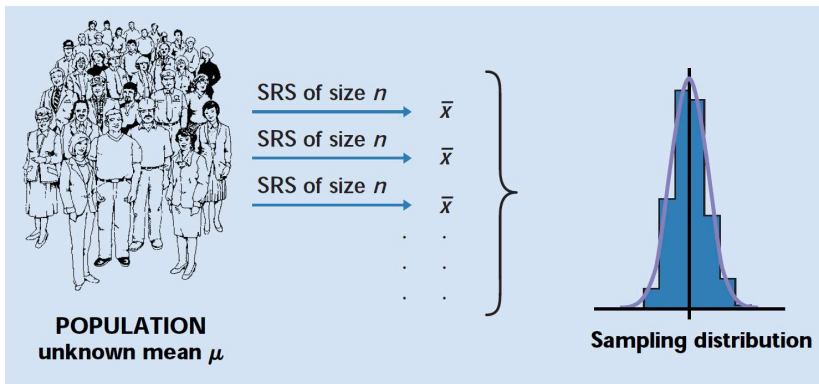
В стандартных реализациях критерия Зигеля-Тьюки в R часто бывает ошибка.

Верная реализация: <https://yadi.sk/d/iilLwa1NerKeU>

## Построение доверительных интервалов

Чтобы построить доверительный интервал для статистики  $T_n = T(X^n)$ , нужно знать её выборочное распределение  $F_{T_n}(x)$ . Как его оценить? (Hesterberg, 2005):

- наивный метод

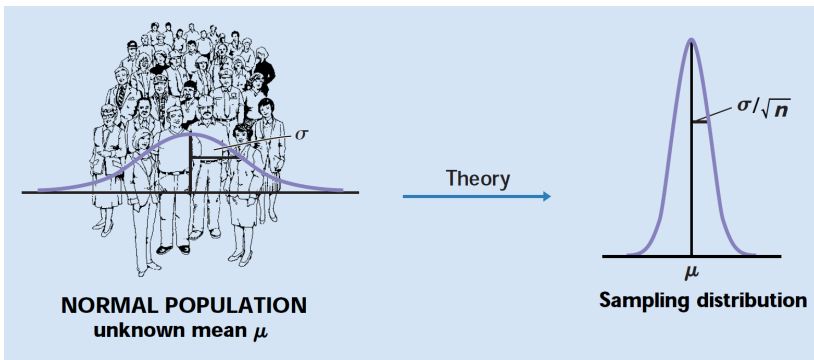


Извлечь из генеральной совокупности  $N$  выборок объёма  $n$  и оценить выборочное распределение  $T_n$  эмпирическим.



# Построение доверительных интервалов

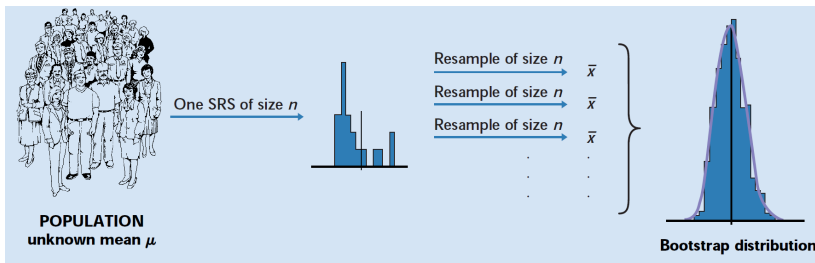
- параметрический метод



Сделать предположение, что  $X$  распределена по закону  $F_X(x)$ , при выполнении которого закон распределения  $T_n$  известен.

# Построение доверительных интервалов

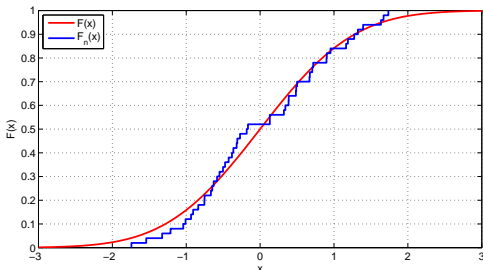
- бутстреп



Сгенерировать  $N$  «псевдовыборок» объёма  $n$  и оценить выборочное распределение  $T_n$  «псевдоэмпирическим».

## Бутстреп

Извлечение выборок из генеральной совокупности — сэмплирование из неизвестного распределения  $F_X(x)$ . Лучшая оценка  $F_X(x)$ , которая у нас есть —  $F_{X_n}(x)$ ; будем сэмплировать из неё. Это то же самое, что делать из  $X^n$  выборки с возвращением объёма  $n$ .



Способы построения доверительных интервалов с помощью бутстрепа:

- нормальный:  $t \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}} S_b$ ;
- базовый: границы —  $\frac{\alpha}{2}$  и  $1 - \frac{\alpha}{2}$ -квантили распределения значений  $T_n$  на псевдовыборках;
- ...

## Перестановочные критерии

С помощью перестановок можно не только строить доверительные интервалы, но и проверять гипотезы.

Но для проверки гипотез нужно оценить не выборочное распределение статистики, а нулевое, то есть распределение статистики при справедливости нулевой гипотезы.

**Идея:** найти такую группу перестановок  $G$  исходной выборки  $X^n$ , что распределение  $X^n$  при справедливости нулевой гипотезы не отличается от распределения  $gX^n, g \in G$ .

## (8) Одновыборочный перестановочный критерий, гипотеза о среднем

выборка:  $X_1^n = (X_1, \dots, X_n)$ ,

$F(X)$  симметрично относительно матожидания;

нулевая гипотеза:  $H_0: \mathbb{E}X = 0$ ;

альтернатива:  $H_1: \mathbb{E}X < \neq > 0$ ;

статистика:  $T(X^n) = \sum_{i=1}^n X_i$ .

Распределение  $T(X^n)$  при  $H_0$  порождается группой перестановок

$$G = \{g = (s_1, \dots, s_n)\}, s_i \in \{-1, 1\},$$

$$|G| = 2^n.$$

Для проверки гипотезы  $H_0: \mathbb{E}X = \mu_0$  группа строится по аналогии.

Достижимый уровень значимости:

$$p(t) = \begin{cases} \frac{\sum_{g \in G} [t(gx^n) \leq \geq t(x^n)]}{2^n}, & H_1: \mathbb{E}X < > 0, \\ \frac{\sum_{g \in G} [|t(gx^n)| \geq |t(x^n)|]}{2^n}, & H_1: \mathbb{E}X \neq 0. \end{cases}$$

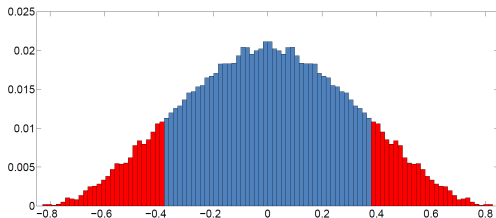
## (8) Одновыборочный перестановочный критерий, гипотеза о среднем

**Пример** (зеркала в клетках мышей):

$H_0$ : в клетке с зеркалом мыши проводят в среднем половину времени.

$H_1$ : в клетке с зеркалом мыши проводят в среднем не половину времени.

Статистика:  $T = \sum_{i=1}^n (X_i - 0.5)$ ;  $t = -0.3784$ .



$$p = \frac{\#\{|T| \geq |t|\}}{2^n} = 0.2292.$$

## (9) Двухвыборочный перестановочный критерий, гипотеза о средних, связанные выборки

выборки:  $X_1^n = (X_{11}, \dots, X_{1n}),$   
 $X_2^n = (X_{21}, \dots, X_{2n}),$   
 выборки связанные;

нулевая гипотеза:  $H_0: F_{X_1}(x) = F_{X_2}(x);$

альтернатива:  $H_1: F_{X_1}(x) < \neq > F_{X_2}(x);$

статистика:  $D^n = (X_{1i} - X_{2i}),$

$$T(X_1^n, X_2^n) = T(D^n) = \sum_{i=1}^n D_i.$$

Распределение  $T(D^n)$  при  $H_0$  порождается группой перестановок

$$G = \{g = (s_1, \dots, s_n)\}, s_i \in \{-1, 1\},$$

$$|G| = 2^n.$$

Достигаемый уровень значимости:

$$p(t) = \begin{cases} \frac{\sum_{g \in G} [t(gd^n) \leq t(d^n)]}{2^n}, & H_1: F_{X_1}(x) < > F_{X_2}(x), \\ \frac{\sum_{g \in G} [|t(gd^n)| \geq |t(d^n)|]}{2^n}, & H_1: F_{X_1}(x) \neq F_{X_2}(x). \end{cases}$$

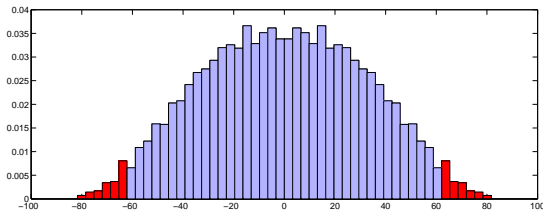
## ⑨ Двухвыборочный перестановочный критерий, гипотеза о средних, связанные выборки

**Пример** (алюминий в тополях):

$H_0$ : среднее изменения концентрации алюминия равна нулю.

$H_1$ : среднее изменения концентрации алюминия не равна нулю.

Статистика:  $T = \sum_{i=1}^n (X_{1i} - X_{2i})$ ;  $t = -63.7$ .



$$p = \frac{\#\{|T| \geq |t|\}}{2^n} = 0.0054.$$



## (10) Двухвыборочный перестановочный критерий, гипотеза о средних, независимые выборки

выборки:  $X_1^{n_1} = (X_{11}, \dots, X_{1n_1}),$   
 $X_2^{n_2} = (X_{21}, \dots, X_{2n_2}),$   
 выборки независимые;

нулевая гипотеза:  $H_0: F_{X_1}(x) = F_{X_2}(x);$   
 альтернатива:  $H_1: F_{X_1}(x) = F_{X_2}(x + \Delta), \Delta < \neq > 0;$

статистика:  $T(X_1^{n_1}, X_2^{n_2}) = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} X_{1i} - \frac{1}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} X_{2i}.$

Распределение  $T(X_1^{n_1}, X_2^{n_2})$  при  $H_0$  порождается группой перестановок  $G$ :

$$g(X_1^{n_1}, X_2^{n_2}) = (X_{\pi_{11}}, \dots, X_{\pi_{1n_1}}, X_{\pi_{21}}, \dots, X_{\pi_{2n_2}}) = (gX_1^{n_1}, gX_2^{n_2}),$$

где  $\pi_{11}, \dots, \pi_{1n_1}$  — сочетание из  $N = n_1 + n_2$  по  $n_1$ ,  $\pi_{21}, \dots, \pi_{2n_2}$  — его дополнение до множества  $\{1, \dots, N\}$ .

$$|G| = C_N^{n_1} = C_N^{n_2}.$$

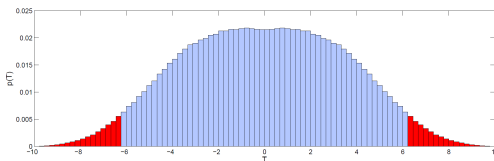
Достижимый уровень значимости:

$$p(t) = \begin{cases} \frac{\sum_{g \in G} [t(gx_1^{n_1}, gx_2^{n_2}) \leq t(x_1^{n_1}, x_2^{n_2})]}{C_N^{n_1}}, & H_1: \Delta < > 0, \\ \frac{\sum_{g \in G} [|t(gx_1^{n_1}, gx_2^{n_2})| \geq |t(x_1^{n_1}, x_2^{n_2})|]}{C_N^{n_1}}, & H_1: \Delta \neq 0. \end{cases}$$

## (10) Двухвыборочный перестановочный критерий, гипотеза о средних, независимые выборки

**Пример** (кофеин и респираторный обмен):  $H_0$ : среднее значение показателя респираторного обмена не отличается в двух группах.  
 $H_1$ : среднее значение показателя респираторного обмена отличается в двух группах.

Статистика:  $T = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} X_{1i} - \frac{1}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} X_{2i}$ ;  $t = 6.33$ .



$$p = \frac{\#\{ |T - \bar{T}| \geq |t - \bar{T}| \}}{C_{n_1+n_2}^{n_1}} = 0.0578.$$

# (11) Двухвыборочный перестановочный критерий, гипотеза о дисперсиях, статистика Али

выборки:  $X_1^n = (X_{11}, \dots, X_{1n}),$   
 $X_2^n = (X_{21}, \dots, X_{2n}),$   
 выборки независимые;

нулевая гипотеза:  $H_0: \mathbb{D}X_1 = \mathbb{D}X_2;$   
 альтернатива:  $H_1: \mathbb{D}X_1 < \neq > \mathbb{D}X_2;$

статистика:  $\delta \left( D_1^{n-1} \right) = \sum_{i=1}^{n-1} i(n-i)D_{1i},$   
 $D_{1i} = X_{1(i+1)} - X_{1(i)}.$

Распределение  $\delta \left( D_1^{n-1} \right)$  при  $H_0$  порождается группой  $G$  попарных перестановок  $D_{1i}$  и  $D_{2i}$ :

$$g \left( D_1^{n-1}, D_2^{n-1} \right) = \left( D_{\pi_1 1}, \dots, D_{\pi_{n-1}(n-1)}, D_{\pi'_1 1}, \dots, D_{\pi'_{n-1}(n-1)} \right) = \left( gD_1^{n-1}, gD_2^{n-1} \right),$$

где  $\forall i = 1, \dots, n-1$  либо  $\pi_i = 1, \pi'_i = 2$ , либо  $\pi_i = 2, \pi'_i = 1$ .

$$|G| = 2^{n-1}.$$

Достижимый уровень значимости:

$$p(\delta) = \begin{cases} p_1 = \frac{\sum_{g \in G} [\delta(gd_1^{n-1}) \geq \delta(d_1^{n-1})]}{2^{n-1}}, & H_1: \mathbb{D}X_1 > \mathbb{D}X_2, \\ p_2 = \frac{\sum_{g \in G} [\delta(gd_1^{n-1}) \leq \delta(d_1^{n-1})]}{2^{n-1}}, & H_1: \mathbb{D}X_1 < \mathbb{D}X_2, \\ 2 \cdot \min(p_1, p_2), & H_1: \mathbb{D}X_1 \neq \mathbb{D}X_2. \end{cases}$$

## Особенности перестановочных критериев

- Статистику критерия можно выбрать разными способами. В некоторых случаях разные статистики приведут к одному и тому же достигаемому уровню значимости:

$$X^n, \quad H_0: \mathbb{E}X = 0, \quad H_1: \mathbb{E}X \neq 0,$$

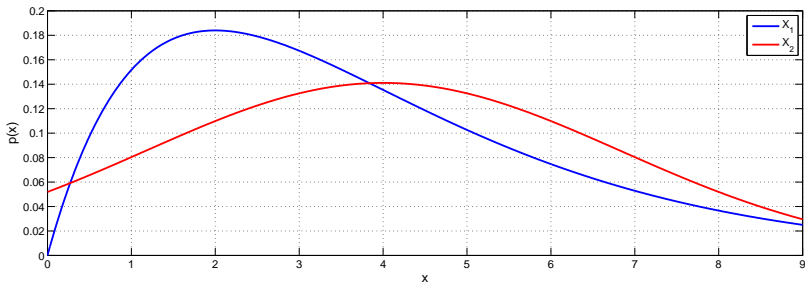
$$T_1(X^n) = \sum_{i=1}^n X_i \sim T_2(X^n) = \bar{X}.$$

В других случаях достигаемый уровень значимости будет зависеть от выбора статистики:

$$T_2(X^n) = \bar{X} \approx T_3(X^n) = \frac{\bar{X}}{S/\sqrt{n}}.$$

- Если  $|G|$  слишком велико, для оценки нулевого распределения  $T$  достаточно взять случайное подмножество  $G' \in G$ . При этом стандартное отклонение достигаемого уровня значимости будет равно примерно  $\sqrt{\frac{p(1-p)}{G'}}$ .

# Различия между моментами высокого порядка



$$X_1 \sim \chi_4^2, \quad X_2 \sim N(4, \sqrt{8});$$

$$\mathbb{E}X_1 = \mathbb{E}X_2, \quad \mathbb{D}X_1 = \mathbb{D}X_2.$$

## Двухвыборочные критерии согласия

выборки:  $X_1^{n_1} = (X_{11}, \dots, X_{1n_1})$ ,  
 $X_2^{n_2} = (X_{21}, \dots, X_{2n_2})$ ,  
выборки независимые;

нулевая гипотеза:  $H_0: F_{X_1}(x) = F_{X_2}(x)$ ;

альтернатива:  $H_1: H_0$  неверна.

Критерий Смирнова:

статистика:  $D(X_1^{n_1}, X_2^{n_2}) = \sup_{-\infty < x < \infty} |F_{n_1 X_1}(x) - F_{n_2 X_2}(x)|$ .

Критерий Андерсона (модификация критерия Смирнова-Крамера-фон Мизеса):

статистика: 
$$T(X_1^{n_1}, X_2^{n_2}) = \frac{1}{n_1 n_2 (n_1 + n_2)} \left( n_1 \sum_{i=1}^{n_1} (\text{rank}(X_{1i}) - i)^2 + n_2 \sum_{j=1}^{n_2} (\text{rank}(X_{2j}) - j)^2 \right) - \frac{4n_1 n_2 - 1}{6(n_1 + n_2)}.$$

Статистики имеют табличные распределения при  $H_0$ .

## Функция сдвига

Вместо равномерного сдвига

$$F_{X_1}(x) = F_{X_2}(x + \Delta)$$

можно предположить, что сдвиг зависит от  $x$ :

$$F_{X_1}(x) = F_{X_2}(x + \Delta(x)).$$

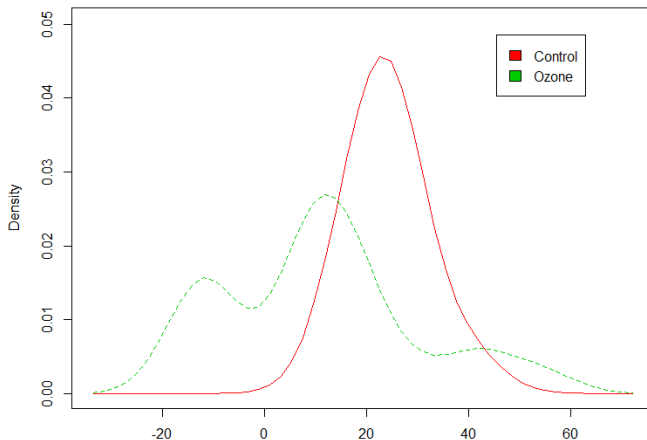
Такая модель позволяет оценить эффект отдельно для разных групп популяции. Примеры:

- удобрение увеличивает крупные экземпляры растения и не влияет на рост мелких;
- гамма-облучение семян увеличивает вариабельность сельскохозяйственных растений.

На основе инвертированного распределения критерия Смирнова можно построить доверительную ленту для функции сдвига.

## Функция сдвига

**Пример (Doksum, 1976):** из двух групп лабораторных мышей одна живёт в обычных условиях, а вторая — в среде, обогащённой озоном. Известен прирост веса для каждой особи за фиксированный контрольный период. Есть ли различия между группами?

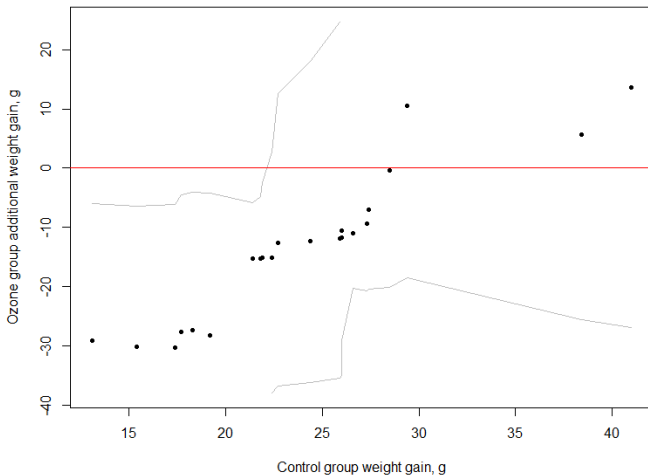




## Функция сдвига

Критерий Уэлша:  $p = 0.005$ , критерий Манна-Уитни:  $p = 0.001$ .

Функция сдвига:



## Примеры

Продажная стоимость недвижимости в Сиэтле (независимые выборки):

<https://yadi.sk/d/rGiG2AkHerKbd>

Поведенческая терапия при анорексии (связные выборки):

<https://yadi.sk/d/CLSiAkGderUYR>

Качество регрессионных моделей (для самостоятельной работы):

<https://yadi.sk/i/JOHDkSSFexkkZ>

## Литература

- критерии знаков (sign tests) — Kanji, №№ 45, 46;
- критерии знаковых рангов (signed-rank tests) — Kanji, №№ 47, 48;
- критерий Манна-Уитни-Уилкоксона (Mann-Whitney-Wilcoxon test) — Кобзарь, 4.2.1.1.2.2;
- бутстреп (bootstrap) — Hesterberg (попроще), Davidson (посложнее);
- перестановочные критерии (permutation tests) — Good, 3.2.1, 3.6.4, 3.7.2 (с ошибкой, исправлено в Ramsey);
- двухвыборочные критерии согласия (two-sample goodness-of-fit tests) — Кобзарь, 3.1.2.8;
- функция сдвига (shift function) — Wilcox, 5.1.

Кобзарь А.И. *Прикладная математическая статистика*. — М.: Физматлит, 2006.

Bonnini S., Corain L., Marozzi M., Salmaso S. *Nonparametric Hypothesis Testing - Rank and Permutation Methods with Applications in R*. John Wiley & Sons, 2014.

Davison A.C., Hinkley D.V. *Bootstrap Methods and their Application*. — Cambridge University Press, 1997.

Doksum K.A., Sievers G.L. (1976). *Plotting with confidence: Graphical comparisons of two populations*. *Biometrika*, 63(3), 421–434.

Good P. *Permutation, Parametric and Bootstrap Tests of Hypotheses: A Practical Guide to Resampling Methods for Testing Hypotheses*. — New York: Springer, 2005.

## Литература

- Hesterberg T., Monaghan S., Moore D.S., Clipson A., Epstein R. (2005). *Bootstrap methods and permutation tests*. In Introduction to the Practice of Statistics. <http://statweb.stanford.edu/~tibs/stat315a/Supplements/bootstrap.pdf>
- Hollander M., Wolfe D.A. *Nonparametric statistical methods*. — John Wiley & Sons, 1973.
- Kanji G.K. *100 statistical tests*. — London: SAGE Publications, 2006.
- Laureysens I., Blust R., De Temmerman L., Lemmens C., Ceulemans R. (2004). *Clonal variation in heavy metal accumulation and biomass production in a poplar coppice culture. I. Seasonal variation in leaf, wood and bark concentrations*. Environmental Pollution, 131, 485-494.
- Ramsey P.H., Ramsey P.P. (2008). *Brief investigation of tests of variability in the two-sample case*. Journal of Statistical Computation and Simulation, 78(12), 1125–1131.
- Shervin C.M. (2004) *Mirrors as potential environmental enrichment for individually housed laboratory mice*. Applied Animal Behaviour Science, 87(1-2), 95–103.
- Wilcox R.R. *Introduction to Robust Estimation and Hypothesis Testing*. — Academic Press, 2012.