Прикладная статистика 3. Непараметрическая проверка гипотез.

25 февраля 2013 г.

Виды задач: одновыборочные

$\boxed{X^n}$

среднее выборки равно заданному числу ▸ 1 ▸ 3 ▸ 8

Виды задач: двухвыборочные

- $X_1^{n_1}, X_2^{n_2}$
  - средние выборок равны
    - X_1, X_2 связные 2 4 9
    - X_1, X_2 независимые 5 10
  - дисперсии выборок равны 6 7 11

Варианты двухвыборочных гипотез о положении

$$H_0\colon\ \mathrm{med}\,X_1 = \mathrm{med}\,X_2;\quad H_1\colon\ \mathrm{med}\,X_1 <\neq> \mathrm{med}\,X_2$$

$$H_0\colon \mathbb{E}X_1 = \mathbb{E}X_2;\quad H_1\colon \mathbb{E}X_1 <\neq> \mathbb{E}X_2$$

$$H_0\colon p\left(X_1 > X_2\right) = \frac{1}{2};\quad H_1\colon p\left(X_1 > X_2\right) <\neq> \frac{1}{2}$$

$$H_0\colon F_{X_1}\left(x\right) = F_{X_2}\left(x\right);\quad H_1\colon F_{X_1}\left(x\right) <\neq> F_{X_2}\left(x\right)$$

$$H_0\colon F_{X_1}\left(x-\Delta\right) = F_{X_2}\left(x\right), \Delta = 0;\quad H_1\colon \Delta <\neq> 0$$

Варианты двухвыборочных гипотез о рассеивании

$$H_0\colon \mathbb{D}X_1 = \mathbb{D}X_2; \quad H_1\colon \mathbb{D}X_1 <\neq> \mathbb{D}X_2$$

$$H_0\colon \mathbb{D}X_1 = \mathbb{D}X_2, \mathrm{med}\, X_1 = \mathrm{med}\, X_2; \quad H_1\colon \mathbb{D}X_1 <\neq> \mathbb{D}X_2$$

$$H_0\colon F_{X_1}(x) = F_{X_2}(\sigma x + \Delta), \sigma = 1; \quad H_1\colon \sigma <\neq> 1$$

(1) Одновыборочный критерий знаков

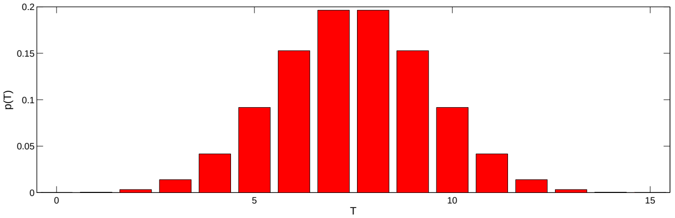
выборка: $X^n = (X_1, \dots, X_n)\,, X_i \neq m_0$

нулевая гипотеза: $H_0\colon\ \operatorname{med} X = m_0;$

альтернатива: $H_1\colon\ \operatorname{med} X <\neq> m_0;$

статистика: $$T(X^n) = \begin{cases} n_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} [X_i > m_0]\,, & H_1\colon\ \operatorname{med} X > m_0, \\ n_2 = \sum\limits_{i=1}^{n} [X_i < m_0]\,, & H_1\colon\ \operatorname{med} X < m_0, \\ \min(n_1, n_2), & H_1\colon\ \operatorname{med} X \neq m_0; \end{cases}$$

$T(X^n) \sim Bin(n, \frac{1}{2})$ при H_0;



достигаемый уровень значимости:

$$p(t) = \begin{cases} binocdf(t, n, 0.5), & H_1\colon\ \operatorname{med} X <> m_0, \\ \min(1, 2 * binocdf(t, n, 0.5)), & H_1\colon\ \operatorname{med} X \neq m_0. \end{cases}$$

(1) Одновыборочный критерий знаков

Пример: предполагается, что стоимость материала, получаемого при переработке строительной конструкции, составляет в среднем 0.28 долларов. Взята случайная выборка из 10 конструкций, все они переработаны; стоимость в долларах полученного из каждой конструкции материала составила:

$$\{0.28, 0.18, 0.24, 0.30, 0.40, 0.36, 0.15, 0.42, 0.23, 0.48\}.$$

Правомерно ли использовать гипотезу о том, что она взята из популяции с медианой стоимости переработанного материала 0.28 долларов?

H_0: медиана стоимости переработанного материала составляет 0.28 долларов.
H_1: медиана стоимости переработанного материала отличается от 0.28 долларов $\Rightarrow p \approx 1$.

(2) Двухвыборочный критерий знаков

выборки: $X_1^n = (X_{11}, \dots, X_{1n})$,
$X_2^n = (X_{21}, \dots, X_{2n})$, $X_{1i} \neq X_{2i}$, выборки связные;

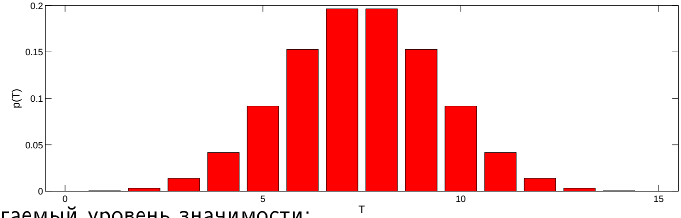
нулевая гипотеза: $H_0\colon \operatorname{med} X_1 = \operatorname{med} X_2$;

альтернатива: $H_1\colon \operatorname{med} X_1 <\neq> \operatorname{med} X_2$;

статистика:

$$T(X_1^n, X_2^n) = \begin{cases} n_1 = \sum\limits_{i=1}^n [X_{1i} > X_{2i}], & H_1\colon \operatorname{med} X_1 > \operatorname{med} X_2, \\ n_2 = \sum\limits_{i=1}^n [X_{1i} < X_{2i}], & H_1\colon \operatorname{med} X_1 < \operatorname{med} X_2, \\ \min(n_1, n_2), & H_1\colon \operatorname{med} X_1 \neq \operatorname{med} X_2; \end{cases}$$

$T(X_1^n, X_2^n) \sim Bin(n, \frac{1}{2})$ при H_0;



достигаемый уровень значимости:

$$p(t) = \begin{cases} binocdf(t, n, 0.5), & H_1\colon \operatorname{med} X_1 <> \operatorname{med} X_2, \\ \min(1, 2 * binocdf(t, n, 0.5)), & H_1\colon \operatorname{med} X_1 \neq \operatorname{med} X_2. \end{cases}$$

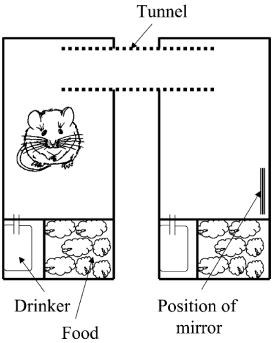
(2) Двухвыборочный критерий знаков

Пример: показатель качества работы 10 машин производственного цикла был измерен до и после модификации процесса производства. Для трёх машин значение показателя упало, для семи — повысилось. Влияет ли модификация на среднее значение показателя качества?

H_0: модификация не влияет на среднее значение показателя качества работы машин.
H_1: модификация влияет на среднее значение показателя качества работы машин $\Rightarrow p = 0.3438$.

Зеркала в клетках мышей

Shervin, Mirrors as potential environmental enrichment for individually housed laboratory mice, 2004: 16 лабораторных мышей были помещены в двухкомнатные клетки, в одной из комнат висело зеркало. Измерялось доля времени, которое каждая мышь проводила в каждой из своих двух клеток.



Общая постановка:

H_0: мышам всё равно, висит в клетке зеркало или нет.

H_1: у мышей есть какие-то предпочтения насчёт зеркала.

Зеркала в клетках мышей

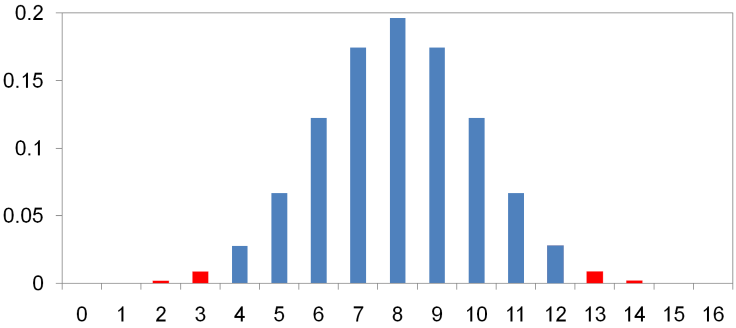
Уточнённая постановка-1:
H_0: вероятность того, что мышь предпочтёт комнату с зеркалом, равна $\frac{1}{2}$.
H_1: вероятность того, что мышь предпочтёт комнату с зеркалом, не равна $\frac{1}{2}$.

Редуцированные данные: 0 — мышь провела больше времени в комнате с зеркалом, 1 — в комнате без зеркала.

0000000000000000	0100000000000000	1000000000000000	1100000000000000
0000000000000001	0100000000000001	1000000000000001	1100000000000001
0000000000000010	0100000000000010	1000000000000010	1100000000000010
0000000000000011	0100000000000011	1000000000000011	1100000000000011
0000000000000100	0100000000000100	1000000000000100	1100000000000100
0000000000000101	0100000000000101	1000000000000101	1100000000000101
0000000000000110	0100000000000110	1000000000000110	1100000000000110
...	...	...	...

Используем критерий знаков.

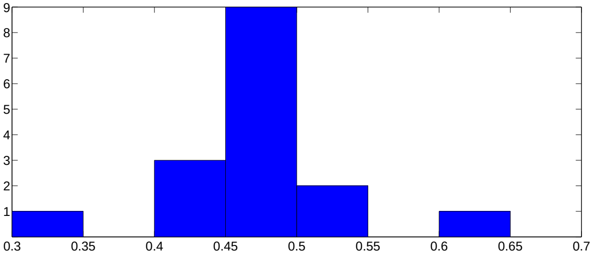
Зеркала в клетках мышей



13 из 16 мышей провели больше времени в комнате без зеркала.

Критерий знаков: $p = 0.0213$.

Зеркала в клетках мышей

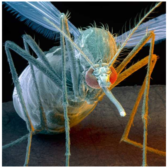


Гистограмма распределения доли времени, проводимого в клетке с зеркалом.

Средняя доля времени, проводимого в клетке с зеркалом — $47.6 \pm 4.7\%$.

Причины использовать критерий знаков

- разности Δx_i при H_1 могут быть небольшими по модулю, но иметь систематический характер по знаку (пример с мышами);
- разности Δx_i при H_0 могут быть большими по модулю, но случайными по знаку (влияние меди на число личинок комаров);
- точные разности Δx_i неизвестны, известны только их знаки (сравнение агрессивности комаров).



Вариационный ряд, ранги, связки

$$X_1, \ldots, X_n \quad \longrightarrow \quad X_{(1)} \leq \ldots < \underbrace{X_{(k_1)} = \ldots = X_{(k_2)}}_{\text{связка размера } k_2 - k_1 + 1} < \ldots \leq X_{(n)}$$

Ранг измерения X_i:

$$r_i = r\left(X_i\right) = Avr\left\{r \left| X_i = X_{(r)} \right.\right\}$$

т. е. если X_i не в связке, то ранг — номер X_i в вариационном ряду,
если X_i в связке $[k_1, k_2]$, то ранг $r_i = \frac{k_1+k_2}{2}$.

(3) Одновыборочный критерий знаковых рангов Уилкоксона

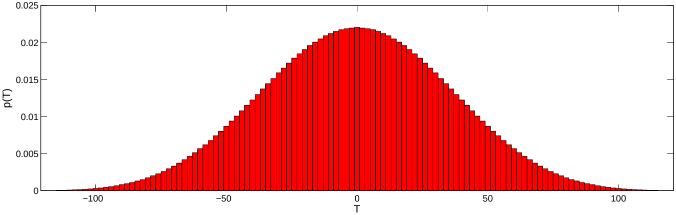
выборка: $X^n = (X_1, \dots, X_n)\,, X_i \neq \mu_0;$

нулевая гипотеза: $H_0\colon \mathbb{E}X = \mu_0;$

альтернатива: $H_1\colon \mathbb{E}X <\neq> \mu_0;$

статистика: $W(X^n) = \sum\limits_{i=1}^{n} r\left(|X_i - \mu_0|\right) \cdot \operatorname{sign}\left(X_i - \mu_0\right);$

$W(X^n)$ имеет табличное распределение при H_0.



(3) Одновыборочный критерий знаковых рангов Уилкоксона

Откуда берётся табличное распределение?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	W
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-120
+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-118
-	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-116
+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-114
-	-	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-114
+	-	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-112
+	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-110
-	-	-	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-108
+	-	-	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-112
+	+	-	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-110
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
-	-	+	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	110
-	+	+	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	112
+	+	+	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	108
-	-	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	110
-	+	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	112
+	+	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	114
-	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	114
+	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	116
-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	118
+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	120

(3) Одновыборочный критерий знаковых рангов Уилкоксона

Аппроксимация для $n > 20$:

$$W \sim N\left(\frac{n(n+1)}{4}, \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right).$$

Обработка связок: зависит от реализации.

(3) Одновыборочный критерий знаковых рангов Уилкоксона

Пример: значение депозитной ставки измеряется на выборке из 10 инвесторов до и после рекламной кампании. Повлияла ли рекламная кампания на среднее значение депозитной ставки?

H_0 : рекламная кампания не повлияла на среднее значение депозитной ставки.
H_1 : средние значения депозитной ставки до и после рекламной кампании отличаются $\Rightarrow p = 0.5536$.

Зеркала в клетках мышей

Уточнённая постановка-2:
H_0: средняя доля времени, проведённого в клетке с зеркалом, равна 0.5.
H_1: средняя доли времени, проведённого в клетке с зеркалом, не равна 0.5.

Критерий знаковых рангов: $p = 0.0703$.

(4) Критерий знаковых рангов Уилкоксона для связных выборок

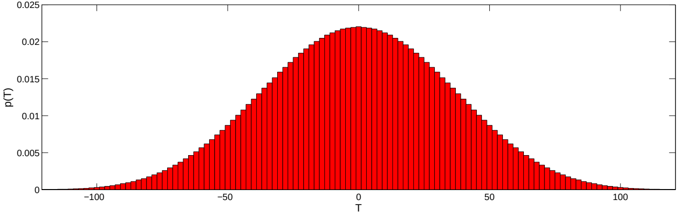
выборки: $X_1^n = (X_{11}, \dots, X_{1n})$,
$X_2^n = (X_{21}, \dots, X_{2n})$, $X_{1i} \neq X_{2i}$, выборки связные;

нулевая гипотеза: $H_0\colon \mathbb{E}X_1 = \mathbb{E}X_2$;

альтернатива: $H_1\colon \mathbb{E}X <\neq> \mathbb{E}X_2$;

статистика: $W\left(X_1^n, X_2^n\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} r\left(|X_{1i} - X_{2i}|\right) \cdot \operatorname{sign}\left(X_i - X_{2i}\right)$;

$W\left(X^n\right)$ имеет табличное распределение при H_0.



(4) Критерий знаковых рангов Уилкоксона для связных выборок

Пример: управляемый вручную станок на каждом шаге процесса производит пару пружин. Одинакова ли прочность пружин в паре?

H_0: средние значения прочности пружин в паре равны.
H_1: средние значения прочности пружин в паре не равны $\Rightarrow p = 0.01424$.

(5) Критерий Манна-Уитни-Уилкоксона

выборки: $X_1^{n_1} = (X_{11}, \ldots, X_{1n_1})$,
$X_2^{n_2} = (X_{21}, \ldots, X_{2n_2})$, $X_{1i} \neq X_{2j}$, выборки независимы;

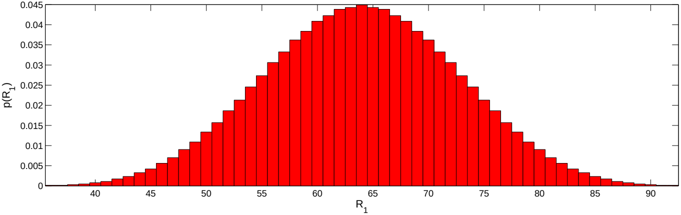
нулевая гипотеза: $H_0\colon p(X_1 > X_2) = \frac{1}{2}$;

альтернатива: $H_1\colon p(X_1 > X_2) <\neq> \frac{1}{2}$;

статистика: $X_{(1)} \leq \ldots \leq X_{(n_1+n_2)}$ — вариационный ряд объединённой выборки $X = X_1^{n_1} \bigcup X_2^{n_2}$,

$$R_1 = \sum_{i=1}^{n_1} r(X_{1i});$$

$R_1(X_1^{n_1}, X_2^{n_2})$ имеет табличное распределение при H_0.



(5) Критерий Манна-Уитни-Уилкоксона

Откуда берётся табличное распределение?

Первая выборка	Вторая выборка	R_1
{1,2,3}	{4,5,6,7}	6
{1,2,4}	{3,5,6,7}	7
{1,2,5}	{3,4,6,7}	8
{1,2,6}	{3,4,5,7}	9
{1,2,7}	{3,4,5,6}	10
{1,3,4}	{2,5,6,7}	8
{1,3,5}	{2,4,6,7}	9
{1,3,6}	{2,4,5,7}	10
{1,3,7}	{2,4,5,6}	11
{1,4,5}	{2,3,6,7}	10
...	...	...
{3,4,5}	{1,2,6,7}	12
{3,4,6}	{1,2,5,7}	13
{3,4,7}	{1,2,5,6}	14
{3,5,6}	{1,2,4,7}	14
{3,5,7}	{1,2,4,6}	15
{3,6,7}	{1,2,4,5}	16
{4,5,6}	{1,2,3,7}	15
{4,5,7}	{1,2,3,6}	16
{4,6,7}	{1,2,3,5}	17
{5,6,7}	{1,2,3,4}	18

(5) Критерий Манна-Уитни-Уилкоксона

Аппроксимация для $n_1, n_2 > 10$:

$$R_1\left(X_1^{n_1}, X_2^{n_2}\right) \sim N\left(\frac{n_1\left(n_1+n_2+1\right)}{2}, \frac{n_1 n_2\left(n_1+n_2+1\right)}{12}\right).$$

Обработка связок: зависит от реализации.

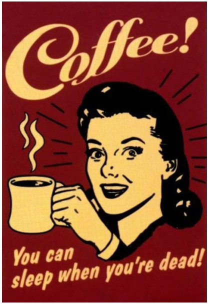
(5) Критерий Манна-Уитни-Уилкоксона

Пример: сотрудник налоговой службы хочет сравнить средние значения в двух выборках заявленых трат на компенсацию командировочных расходов в одной и той же компании в двух разных периодах (расходы скорректированы на инфляцию). Равны ли средние расходы?

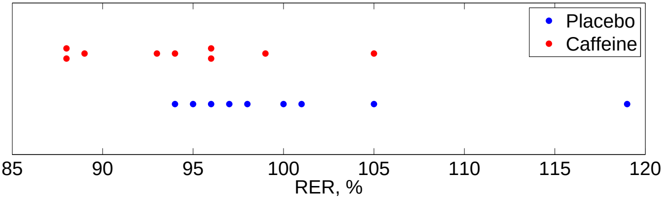
H_0: средние расходы равны.
H_1: средние расходы не равны $\Rightarrow p = 0.3072$.

Кофеин и респираторный обмен

RER (респираторный обмен)— соотношение числа молекул CO_2 и O_2 в выдыхаемом воздухе. Является косвенным признаком того, из жиров или углеводов вырабатывается энергия в момент измерения.
Изучалось влияние кофеина на мышечный метаболизм. В эксперименте принимало участие 18 испытуемых, респираторный обмен которых измерялся в процессе физических упражнений. За час до этого 9 из них получили таблетку кофеина, оставшиеся 9 — плацебо.
Повлиял ли кофеин на значение показателя респираторного обмена?



Кофеин и респираторный обмен



Значение показателя респираторного обмена в двух группах.

H_0: среднее значение показателя респираторного обмена не отличается в двух группах.
H_1: среднее значение показателя респираторного обмена отличается в двух группах.

Кофеин и респираторный обмен

Ранг	Наблюдение	Номер наблюдения	Наблюдение	Ранг
16.5	105	1	96	9
18	119	2	99	13
14	100	3	94	5.5
11	97	4	89	3
9	96	5	96	9
15	101	6	93	4
5.5	94	7	88	1.5
7	95	8	105	16.5
12	98	9	88	1.5

R: $p = 0.0521$.
Matlab: $p = 0.0468$.

(6) Критерий Зигеля-Тьюки

выборки: $X_1^{n_1} = (X_{11}, \ldots, X_{1n_1})$,
$X_2^{n_2} = (X_{21}, \ldots, X_{2n_2})$, $X_{1i} \neq X_{2j}$, выборки независимы,
$\operatorname{med} X_1 = \operatorname{med} X_2$;

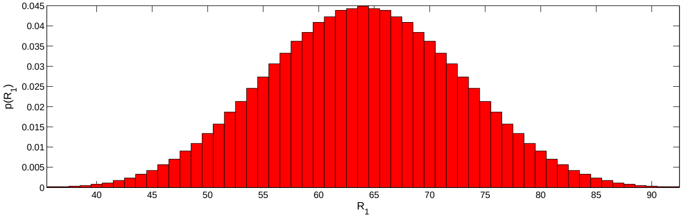
нулевая гипотеза: $H_0\colon \mathbb{D}X_1 = \mathbb{D}X_2$;

альтернатива: $H_1\colon \mathbb{D}X_1 <\neq> \mathbb{D}X_2$;

статистика: $X_{(1)} \leq \ldots \leq X_{(N)}$ — вариационный ряд объединённой выборки $X = X_1^{n_1} \bigcup X_2^{n_2}$, $N = n_1 + n_2$;

$$R_1 = \sum_{i=1}^{n_1} \tilde{r}(X_{1i});$$

$R_1(X_1^{n_1}, X_2^{n_2})$ имеет табличное распределение при H_0.



(6) Критерий Зигеля-Тьюки

Ранги присваиваются необычным образом:

$$\begin{array}{cccccccc} X_{(i)} & X_{(1)} \leq & X_{(2)} \leq & X_{(3)} \leq & \ldots \leq & X_{(N-2)} \leq & X_{(N-1)} \leq & X_{(N)} \\ \tilde{r}\left(X_i\right) & 1 & 4 & 5 & & 6 & 3 & 2 \end{array}$$

(6) Критерий Зигеля-Тьюки

Пример: менеджер по кейтерингу хочет проверить, одинакова ли дисперсия количества соуса в упаковке при расфасовке с помощью двух диспенсеров. Каждым из диспенсеров он наполнил 10 упаковок. Предполагается, что оба диспенсера хорошо откалиброваны, то есть дают одно и то же среднее количество соуса в упаковке.

H_0: дисперсия количества соуса в упаковке не отличается для двух диспенсеров.
H_1: дисперсия количества соуса в упаковке для двух диспенсеров отличается $\Rightarrow p = 0.02324$.

(7) WM-критерий

выборки: $X_1^{n_1} = (X_{11}, \ldots, X_{1n_1})$,
$X_2^{n_2} = (X_{21}, \ldots, X_{2n_2})$, $X_{1i} \neq X_{2j}$, выборки независимы;

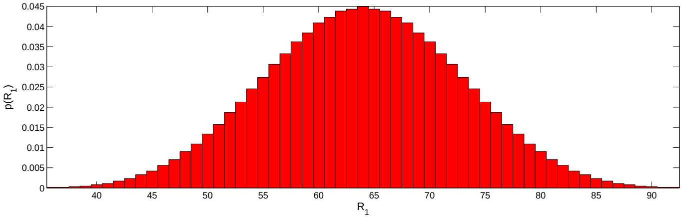
нулевая гипотеза: $H_0: \mathbb{D}X_1 = \mathbb{D}X_2$;

альтернатива: $H_1: \mathbb{D}X_1 <\neq> \mathbb{D}X_2$;

статистика: $D_1^{N_1} = (|X_{1i} - X_{1j}|)$, $N_1 = \lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor$,
$D_2^{N_2} = (|X_{2i} - X_{2j}|)$, $N_2 = \lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor$,
$D_{(1)} \leq \ldots \leq D_{(N)}$ — вариационный ряд объединённой выборки $D = D_1^{N_1} \bigcup D_2^{N_2}$, $N = N_1 + N_2$;

$$R_1 = \sum_{i=1}^{N_1} r(D_{1i});$$

$R_1(X_1^{n_1}, X_2^{n_2})$ имеет табличное распределение при H_0.



(7) WM-критерий

Пример: менеджер по кейтерингу хочет проверить, одинакова ли дисперсия при расфасовке соуса при помощи двух диспенсеров. Каждым из диспенсеров он наполнил 10 упаковок. Возможно, диспенсеры откалиброваны не одинаково точно.

H_0: дисперсия количества соуса в упаковке не отличается для двух диспенсеров.
H_1: дисперсия количества соуса в упаковке для двух диспенсеров отличается $p = 8.4671 \times 10^{-4}$.

Перестановочные критерии

Идея: найти такую группу G перестановок исходной выборки X^n, что распределение X^n при справедливости нулевой гипотезы не отличается от распределения $gX^n, g \in G$.

Например, если в одновыборочной задаче справедлива нулевая гипотеза $H_0\colon \mathbb{E}X = 0$, то с той же вероятностью, что и X^n, могла реализоваться выборка

$$gX^n = X^n \cdot (s_1, \dots, s_n), s_i \in \{-1, +1\}.$$

Если нулевая гипотеза заключается в том, что выборки в паре $(X_1^{n_1}, X_2^{n_2}) = (X_1, \dots, X_N)$ одинаково распределены, то с той же вероятностью могла реализоваться пара

$$g(X_1^{n_1}, X_2^{n_2}) = \left(X_{\pi_{11}}, \dots, X_{\pi_{1n_1}}, X_{\pi_{21}}, \dots, X_{\pi_{2n_2}}\right),$$

где $\pi_{11}, \dots, \pi_{1n_1}$ — сочетание из $N = n_1 + n_2$ по n_1, $\pi_{21}, \dots, \pi_{2n_2}$ — его дополнение до множества $\{1, \dots, N\}$.

(8) Одновыборочный перестановочный критерий, гипотеза о среднем

выборка: $X^n = (X_1, \ldots, X_n)\,, F(\mathbb{E}X - X) = 1 - F(\mathbb{E}X + X)$;

нулевая гипотеза: $H_0\colon \mathbb{E}X = \mu_0$;

альтернатива: $H_1\colon \mathbb{E}X <\neq> \mu_0$;

статистика: $T\left(X^n\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \left(X_i - \mu_0\right)$.

Распределение $T\left(X^n\right)$ при H_0 порождается группой перестановок

$$G = \{g = (s_1, \ldots, s_n)\}\,, s_i \in \{-1, +1\};$$

$$|G| = 2^n.$$

Достигаемый уровень значимости:

$$p(t) = \begin{cases} \dfrac{\sum\limits_{g\in G}[t(gx^n) \leq \geq t(x^n)]}{2^n}, & H_1\colon \mathbb{E}X <> \mu_0, \\ \dfrac{\sum\limits_{g\in G}[|t(gx^n)| \geq |t(x^n)|]}{2^n}, & H_1\colon \mathbb{E}X \neq \mu_0. \end{cases}$$

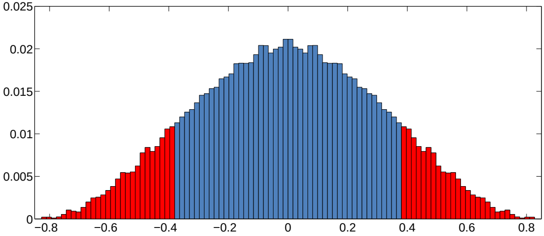
Зеркала в клетках мышей

Уточнённая постановка-3:

H_0: в клетке с зеркалом мыши проводят в среднем половину времени.

H_1: в клетке с зеркалом мыши проводят в среднем не половину времени.

Статистика: $T(X^n) = \sum\limits_{i=1}^{n} (X_i - 0.5)$; $t = T(x^n) = -0.3784.$



$$p = \frac{\sum\limits_{g\in G} [|t(gx^n)| \geq |t|]}{2^n} = 0.2292.$$

(9) Двухвыборочный перестановочный критерий, гипотеза о средних, связные выборки

выборки: $X_1^n = (X_{11}, \dots, X_{1n})$,
$X_2^n = (X_{21}, \dots, X_{2n})$, $X_{1i} \neq X_{2i}$, выборки связные;

нулевая гипотеза: $H_0\colon F_{X_1}(x) = F_{X_2}(x)$;

альтернатива: $H_1\colon F_{X_1}(x) <\neq> F_{X_2}(x)$;

статистика: $D_i = X_{1i} - X_{2i}$, $T(X_1^n, X_2^n) = T(D^n) = \sum\limits_{i=1}^n D_i$.

Распределение $T(X_1^n, X_2^n)$ при H_0 порождается группой перестановок

$$G = \{g = (s_1, \dots, s_n)\}, s_i \in \{-1, +1\};$$

$$|G| = 2^n.$$

Достигаемый уровень значимости:

$$p(t) = \begin{cases} \frac{\sum\limits_{g \in G} [t(gd^n) \leq \geq t(d^n)]}{2^n}, & H_1\colon F_{X_1}(x) <> F_{X_2}(x), \\ \frac{\sum\limits_{g \in G} [|t(gd^n)| \geq |t(d^n)|]}{2^n}, & H_1\colon F_{X_1}(x) \neq F_{X_2}(x). \end{cases}$$

(10) Двухвыборочный перестановочный критерий, гипотеза о средних, независимые выборки

выборки: $X_1^{n_1} = (X_{11}, \dots, X_{1n_1})$,
$X_2^{n_2} = (X_{21}, \dots, X_{2n_2})$, $X_{1i} \neq X_{2i}$, выборки независимые;

нулевая гипотеза: $H_0\colon F_{X_1}(x) = F_{X_2}(x)$;

альтернатива: $H_1\colon F_{X_1}(x - \Delta) = F_{X_2}(x), \Delta <\neq> 0$;

статистика: $T(X_1^{n_1}, X_2^{n_2}) = \frac{1}{n_1}\sum\limits_{i=1}^{n_1} X_{1i} - \frac{1}{n_2}\sum\limits_{i=1}^{n_2} X_{2i}$.

Распределение $T(X_1, X_2)$ при H_0 порождается группой перестановок

$$g(X_1^{n_1}, X_2^{n_2}) = \left(X_{\pi_{11}}, \dots, X_{\pi_{1n_1}}, X_{\pi_{21}}, \dots, X_{\pi_{2n_2}}\right),$$

где $\pi_{11}, \dots, \pi_{1n_1}$ — сочетание из $N = n_1 + n_2$ по n_1, $\pi_{21}, \dots, \pi_{2n_2}$ — его дополнение до множества $\{1, \dots, N\}$.

$$|G| = C_N^{n_1} = C_N^{n_2}.$$

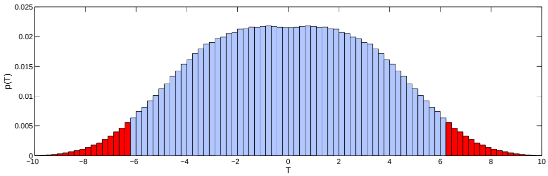
Достигаемый уровень значимости:

$$p(t) = \begin{cases} \dfrac{\sum\limits_{g \in G} [t(gx^n) \leq\geq t(x^n)]}{C_N^{n_1}}, & H_1\colon \Delta <> 0, \\ \dfrac{\sum\limits_{g \in G} [|t(gx^n)| \geq |t(x^n)|]}{C_N^{n_1}}, & H_1\colon \Delta \neq 0. \end{cases}$$

Кофеин и респираторный обмен

H_0: среднее значение показателя респираторного обмена не отличается в двух группах.
H_1: среднее значение показателя респираторного обмена отличается в двух группах.

Статистика: $T = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} X_{1i} - \frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2} X_{2i}; \quad t = 6.33.$



$$p = \frac{\sum\limits_{g\in G} [|t(gx^n)| \geq |t(x^n)|]}{C_N^{n_1}} = 0.0578.$$

(11) Двухвыборочный перестановочный критерий, гипотеза о дисперсиях

выборки: $X_1^{n_1} = (X_{11}, \dots, X_{1n_1})$,
$X_2^{n_2} = (X_{21}, \dots, X_{2n_2})$, $X_{1i} \neq X_{2i}$, выборки независимые;

нулевая гипотеза: $H_0 \colon \mathbb{D}X_1 = \mathbb{D}X_2$;

альтернатива: $H_1 \colon \mathbb{D}X_1 <\neq> \mathbb{D}X_2$;

статистика: $D_{1i} = X_{1i} - \operatorname{med} X_1, \quad D_{2i} = X_{2i} - \operatorname{med} X_2$,

$$T\left(X_1^{n_1}, X_2^{n_2}\right) = T\left(D_1^{n_1}, D_2^{n_2}\right) = \frac{\frac{1}{n_1}\sum\limits_{i=1}^{n_1}|D_{1i}|}{\frac{1}{n_2}\sum\limits_{i=1}^{n_2}|D_{2i}|}.$$

Распределение $T(X_1, X_2)$ при H_0 порождается группой перестановок

$$g\left(D_1^{n_1}, D_2^{n_2}\right) = \left(D_{\pi_{11}}, \dots, D_{\pi_{1n_1}}, D_{\pi_{21}}, \dots, D_{\pi_{2n_2}}\right),$$

где $\pi_{11}, \dots, \pi_{1n_1}$ — сочетание из $N = n_1 + n_2$ по n_1, $\pi_{21}, \dots, \pi_{2n_2}$ — его дополнение до множества $\{1, \dots, N\}$.

$$|G| = C_N^{n_1} = C_N^{n_2}.$$

Достигаемый уровень значимости:

$$p(t) = \begin{cases} \dfrac{\sum\limits_{g\in G}\left[t(gx^n) \leq\geq t(x^n)\right]}{C_N^{n_1}}, & H_1 \colon \mathbb{D}X_1 <> \mathbb{D}X_2, \\ \dfrac{\sum\limits_{g\in G}\left[t(gx^n) \geq \max\left(t(x^n), \frac{1}{t(x^n)}\right)\right] + \left[t(gx^n) \leq \min\left(t(x^n), \frac{1}{t(x^n)}\right)\right]}{C_N^{n_1}}, & H_1 \colon \mathbb{D}X_1 \neq \mathbb{D}X_2. \end{cases}$$

Особенности перестановочных критериев

- Статистику критерия можно выбрать разными способами.
  В некоторых случаях разные статистики приведут к одному и тому же достигаемому уровню значимости:
  $$X^n, \quad H_0\colon \mathbb{E}X = 0, H_0\colon \mathbb{E}X \neq 0,$$
  $$T_1\left(X^n\right) = \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad T_2\left(X^n\right) = \bar{X}.$$
  В других случаях достигаемый уровень значимости будет зависеть от выбора статистики:
  $$T_2\left(X^n\right) = \bar{X}, \quad T_3\left(X^n\right) = \frac{\bar{X}}{S/\sqrt{n}}.$$
- Если $|G|$ слишком велико, для оценки нулевого распределения T достаточно взять случайное подмножество $G' \in G$.

Прикладная статистика
3. Непараметрическая проверка гипотез.

Рябенко Евгений
riabenko.e@gmail.com