Методы коллаборативной фильтрации и тематического моделирования

К. В. Воронцов
vokov@forecsys.ru

Этот курс доступен на странице вики-ресурса
http://www.MachineLearning.ru/wiki
«Машинное обучение (курс лекций, К.В.Воронцов)»

ноябрь 2011

Содержание

Определения и обозначения

U — множество субъектов (клиентов, пользователей: users);
R — множество объектов (ресурсов, товаров, предметов: items);
Y — пространство описаний транзакций;
$D = (u_i, r_i, y_i)_{i=1}^m \in U \times R \times Y$ — транзакционные данные;

Агрегированные данные:

$F = \|f_{ur}\|$ — матрица кросс-табуляции размера $|U| \times |R|$,
где $f_{ur} = \text{aggr}\{(u_i, r_i, y_i) \in D \mid u_i = u,\ r_i = r\}$

Задачи:

- прогнозирование незаполненных ячеек f_{ur};
- оценивание сходства: $\rho(u, u')$, $\rho(r, r')$, $\rho(u, r)$;
- одновременная кластеризация множеств U и R;
- выявление латентных интересов $p(t|u)$, $q(t|r)$ относительно заданного либо неизвестного набора тем $t = 1, \ldots, T$.

Пример 1. Рекомендательная система по посещениям

U — пользователи Интернет;
R — ресурсы (сайты, страницы, документы, новости, и т.п.);
$f_{ur} = [\text{пользователь } u \text{ посетил ресурс } r]$;

Основная гипотеза Web Usage Mining:

- Действия (посещения) пользователя характеризуют его интересы, вкусы, привычки, возможности.

Задачи персонализации предложений:

- выдать оценку ресурса r для пользователя u;
- выдать пользователю u ранжированный список рекомендуемых ресурсов;
- построить список ресурсов, близких к ресурсу r.

Пример 2. Рекомендательная система по покупкам

U — клиенты интернет-магазина (amazon.com и др.);
R — товары (книги, видео, музыка, и т.п.);
$f_{ur} = [\text{клиент } u \text{ купил товар } r]$;

Задачи персонализации предложений:

- выдать оценку товара r для клиента u;
- выдать клиенту u список рекомендуемых товаров;
- предложить скидку на совместную покупку (cross-selling);
- информировать клиента о новом товаре (up-selling);
- сегментировать клиентскую базу;
  выделить интересы клиентов (найти целевые аудитории).

Пример 3. Рекомендательная система на основе рейтингов

U — клиенты интернет-магазина (netflix.com и др.);
R — товары (книги, видео, музыка, и т.п.);
f_{ur} = рейтинг, который клиент u выставил товару r;

Задачи персонализации предложений — те же.

Пример: конкурс Netflix [www.netflixprize.com]

- 2 октября 2006 — 21 сентября 2009; главный приз — $\$10^6$;
- $|U| = 0.48 \cdot 10^6$; $|R| = 17 \cdot 10^3$;
- 10^8 рейтингов $\{1, 2, 3, 4, 5\}$;
- точность прогнозов оценивается по тестовой выборке D':

$$\text{RMSE}^2 = \frac{1}{|D'|} \sum_{(u,r) \in D'} \left(f_{ur} - \hat{f}_{ur}\right)^2;$$

- задача: уменьшить RMSE с 0.9514 до 0.8563 (на 10%).

Пример 4. Анализ текстов

U — текстовые документы (статьи, новости, и т.п.);
R — ключевые слова или выражения;
f_{ur} = частота встречаемости слова r в тексте u.

Задачи тематического моделирования (topic modeling):

- по тексту r найти тексты близкой тематики;
- кластеризовать тексты по темам;
  определить число тем (кластеров) в коллекции;
- построить иерархический каталог тем;
  определить, на какие подтемы разбивается каждая тема;
- проследить динамику развития темы во времени;
- найти публикации, авторов, организации, журналы, конференции по теме.

Два основных подхода в коллаборативной фильтрации

1. **Корреляционные модели**
   (Memory-Based Collaborative Filtering)
   - хранение всей исходной матрицы данных F;
   - сходство клиентов — это корреляция строк матрицы F;
   - сходство объектов — это корреляция столбцов матрицы F.

2. **Латентные модели**
   (Latent Models for Collaborative Filtering)
   - оценивание профилей клиентов и объектов
     (*профиль — это вектор скрытых характеристик*);
   - хранение профилей вместо хранения F;
   - сходство клиентов и объектов — это сходство их профилей.

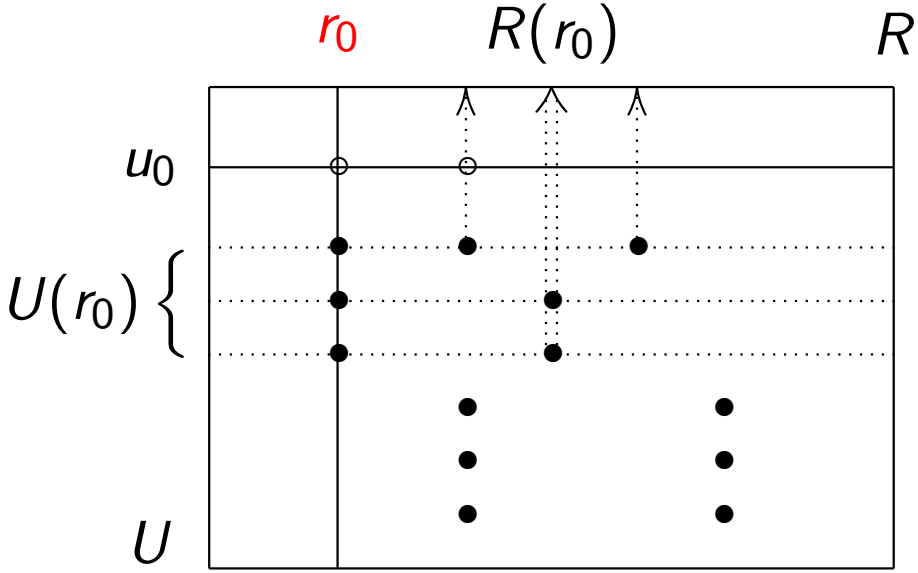
Подборки статей по коллаборативной фильтрации:

jamesthornton.com/cf

ict.ewi.tudelft.nl/∼jun/CollaborativeFiltering.html

Тривиальная рекомендательная система

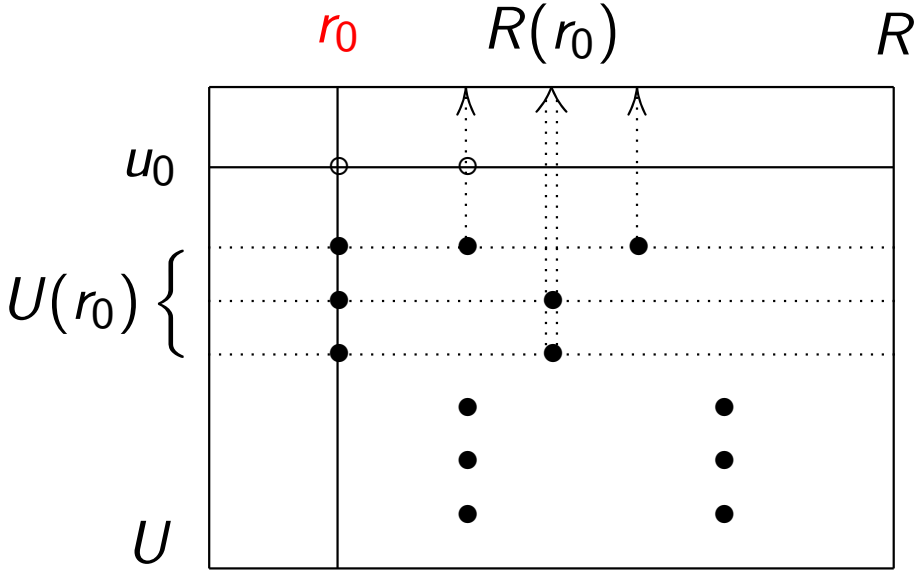
«клиенты, купившие r_0, также покупали $R(r_0)$» [Amazon.com]



1. $U(r_0) := \left\{ u \in U \;\middle|\; f_{ur_0} \neq \varnothing,\ u \neq u_0 \right\}$ — коллаборация;
2. $R(r_0) := \left\{ r \in R \;\middle|\; B(r) = \frac{|U(r_0) \cap U(r)|}{|U(r_0) \cup U(r)|} > 0 \right\}$,
   где $B(r)$ — одна из возможных мер близости r к r_0;
3. отсортировать $R(r_0)$ по убыванию $B(r)$, взять top N.

Тривиальная рекомендательная система

«клиенты, купившие r_0, также покупали $R(r_0)$» [Amazon.com]

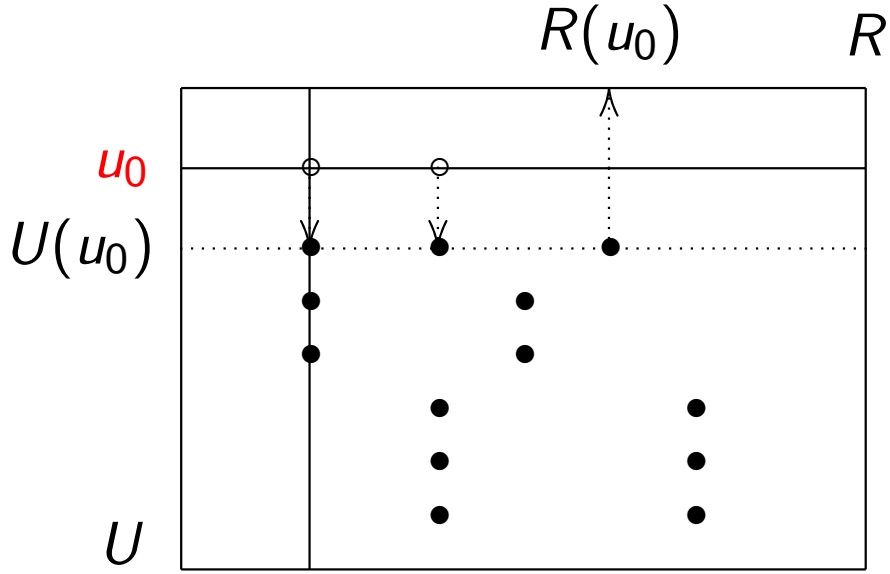


Недостатки:

- рекомендации тривиальны (предлагается всё наиболее популярное);
- не учитываются интересы конкретного пользователя u_0;
- проблема «холодного старта»; (новый товар никому не рекомендуется)
- надо хранить всю матрицу F.

От клиента (user-based CF)

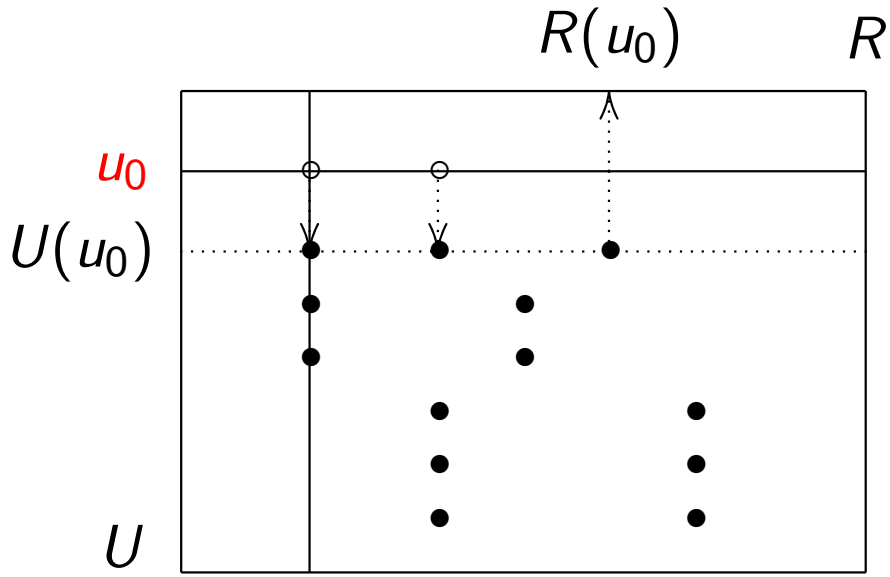
«клиенты, похожие на u_0, также покупали $R(u_0)$»



1. $U(u_0) := \{u \in U \mid \text{corr}(u_0, u) > \alpha\}$ — коллаборация;
   где $\text{corr}(u_0, u)$ — одна из возможных мер близости u к u_0;
2. $R(u_0) := \left\{r \in R \;\middle|\; B(r) = \frac{|U(u_0) \cap U(r)|}{|U(u_0) \cup U(r)|} > 0\right\}$;
   где $U(r) := \{u \in U \mid f_{ur} \neq \varnothing\}$;
3. отсортировать $r \in R(u_0)$ по убыванию $B(r)$, взять top N;

От клиента (user-based CF)

«клиенты, похожие на u_0, также покупали $R(u_0)$»

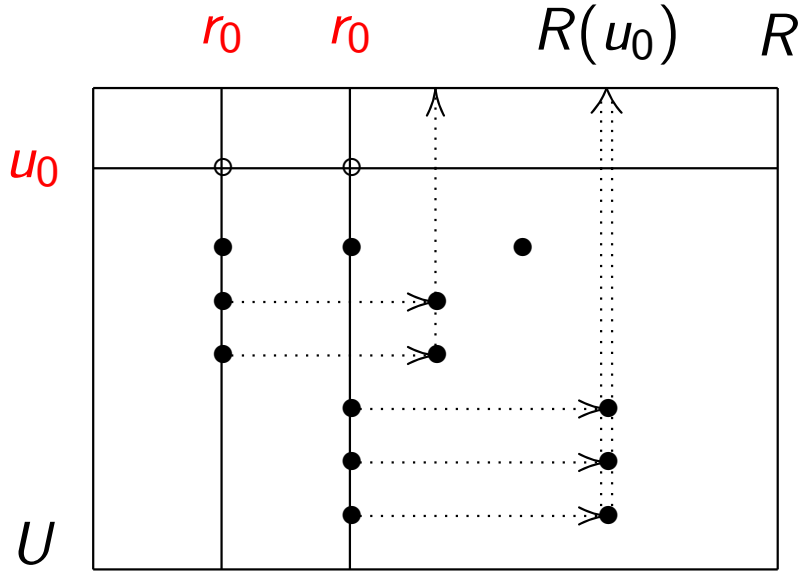


Недостатки:

- ~~рекомендации тривиальны~~;
- ~~не учитываются интересы конкретного пользователя u_0~~;
- проблема «холодного старта»;
- надо хранить всю матрицу F;
- нечего рекомендовать нетипичным/новым пользователям.

От объекта (item-based CF)

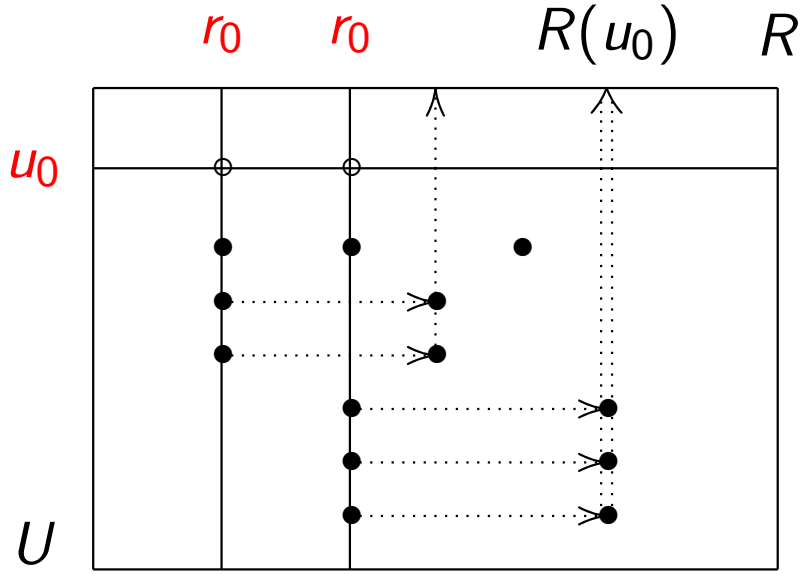
«вместе с объектами,
которые покупал u_0,
часто покупают $R(u_0)$»



1. $R(u_0) := \left\{ r \in R \;\middle|\; \exists r_0 \colon f_{u_0 r_0} \neq \varnothing \text{ и } B(r) = \mathrm{corr}(r, r_0) > \alpha \right\}$;
   где $\mathrm{corr}(r, r_0)$ — одна из возможных мер близости r к r_0;
2. сортировка $r \in R(u_0)$ по убыванию $B(r)$, взять top N;

От объекта (item-based CF)

«вместе с объектами,
которые покупал u_0,
часто покупают $R(u_0)$»



Недостатки:

- рекомендации часто тривиальны (нет коллаборативности);
- проблема «холодного старта»;
- надо хранить всю матрицу F;
- ~~нечего рекомендовать нетипичным пользователям~~.

Восстановление пропущенных значений (рейтингов)

Непараметрическая регрессия Надарайя–Ватсона:

$$\hat{f}_{ur} = \bar{f}_u + \frac{\sum\limits_{u' \in U_\alpha(u)} K(u,u')(f_{u'r} - \bar{f}_{u'})}{\sum\limits_{u' \in U_\alpha(u)} K(u,u')},$$

где $\bar{f}_u = \frac{1}{|R(u)|} \sum\limits_{r \in R(u)} f_{ur}$ — средний рейтинг клиента u,

$R(u)$ — множество объектов, которые клиент u оценил,

$K(u,u')$ — сглаживающее ядро, функция близости u и u',

$U_\alpha(u) = \{u' \mid K(u',u) > \alpha\}$ — коллаборация клиента u.

Недостатки:

- проблема «холодного старта»;
- надо хранить всю матрицу F;

Функции близости, используемые в корреляционных методах

- корреляция Пирсона:

$$K(u,u') = \frac{\sum\limits_{r \in R(u,u')} (f_{ur} - \bar{f}_u)(f_{u'r} - \bar{f}_{u'})}{\sqrt{\sum\limits_{r \in R(u,u')} (f_{ur} - \bar{f}_u)^2 \sum\limits_{r \in R(u,u')} (f_{u'r} - \bar{f}_{u'})^2}};$$

- косинусная мера близости:

$$K(u,u') = \frac{\sum\limits_{r \in R(u,u')} f_{ur} f_{u'r}}{\sqrt{\sum\limits_{r \in R(u,u')} f_{ur}^2 \sum\limits_{r \in R(u,u')} f_{u'r}^2}};$$

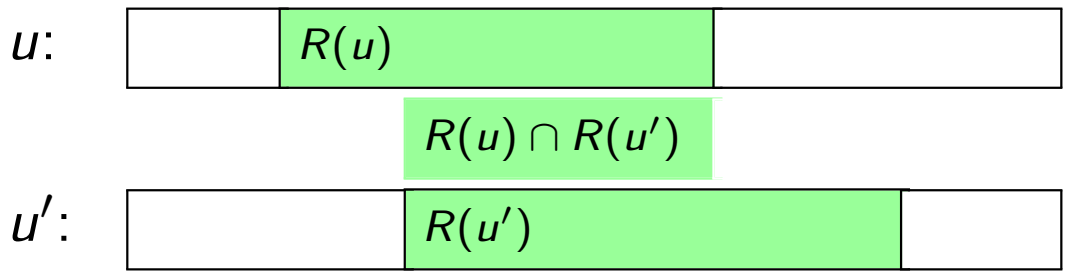
где $R(u,u') = \begin{cases} R(u) \cup R(u'), & \text{для бинарных данных,} \\ R(u) \cap R(u'), & \text{для рейтинговых данных.} \end{cases}$

- статистические критерии:
  χ^2, точный тест Фишера (для бинарных данных).

Функции близости на основе статистических критериев

Рассмотрим случай бинарных данных, $f_{ur} \in \{0, 1\}$.

Нулевая гипотеза:
клиенты u и u' совершают свой выбор независимо.



Вероятность случайной реализации r совместных выборов

$$p(r) = P\{|R(u) \cap R(u')| = r\} = \frac{C^{r}_{|R(u)|} C^{|R(u')|-r}_{|R|-|R(u)|}}{C^{|R(u')|}_{|R|}}.$$

Функция близости $R(u, u') = -\log p\big(|R(u) \cap R(u')|\big)$.

Резюме по Memory-Based методам

Преимущества для бизнес-приложений:

- Легко понять.
- Легко реализовать.

Недостатки:

- Не хватает теоретического обоснования:
  придумано много способов оценить сходство...
  придумано много гибридных (item-user-based) методов...
  ...и не ясно, что лучше;
- Все методы требуют хранения огромной матрицы F.
- Проблема «холодного старта».

Далее:

- *Латентные модели* — лишены этих недостатков.

Понятие латентной модели

Латентная модель: по данным D оцениваются векторы:

$(p_{tu})_{t\in G}$ — профили клиентов $u \in U$, $\quad |G| \ll |R|$;

$(q_{tr})_{t\in H}$ — профили объектов $r \in R$, $\quad |H| \ll |U|$.

Типы латентных моделей (основные идеи):

1. Ко-кластеризация:

   — жёсткая: $\begin{cases} p_{tu} = \big[\text{клиент } u \text{ принадлежит кластеру } t \in G\big]; \\ q_{tr} = \big[\text{объект } r \text{ принадлежит кластеру } t \in H\big]; \end{cases}$

   — мягкая: p_{tu}, q_{tr} — степени принадлежности кластерам.

2. Матричные разложения: $G \equiv H$ — множество тем;
   по p_{tu}, q_{tr} должны восстанавливаться f_{ur}.

3. Вероятностные модели: $G \equiv H$ — множество тем;
   $p_{tu} = p(t|u)$, $q_{tr} = q(t|r)$.

Бикластеризация (ко-кластеризация)

Пусть f_{ur} — вещественные числа или рейтинги;

$g\colon U \to G$ — функции кластеризации клиентов ($|G| < \infty$);

$h\colon R \to H$ — функции кластеризации объектов ($|H| < \infty$);

Модель усреднения по блокам (Block Average):

$$\hat{f}_{ur}(g,h) = \bar{f}_{g(u),h(r)} + (\bar{f}_u - \bar{f}_{g(u)}) + (\bar{f}_r - \bar{f}_{h(r)});$$

$\bar{f}_{g(u),h(r)}$ — средние по *бикластерам*;

$\bar{f}_{g(u)}$ и $\bar{f}_{h(r)}$ — средние по кластерам;

$\bar{f}_u$ и $\bar{f}_r$ — средние по клиентам и по объектам;

Функционал качества бикластеризации:

$$\sum_{(u,r)\in D} \left(\hat{f}_{ur}(g,h) - f_{ur}\right)^2 \to \min_{g,h};$$

Алгоритм бикластеризации, похожий на k-means

Алгоритм BBAC (Bregman Block Average Co-clustering)

1: инициализировать случайные кластеризации $g(u)$, $h(r)$;
2: **пока** кластеризации изменяются
3: вычислить средние по бикластерам $\bar{f}_{gh}$ и кластерам $\bar{f}_g$, $\bar{f}_h$;
4: вычислить новые кластеризации для всех клиентов $u \in U$:

$$g(u) := \arg\min_g \sum_r \big(\hat{f}_{ur}(g, h(r)) - f_{ur}\big)^2;$$

5: вычислить новые кластеризации для всех объектов $r \in R$:

$$h(r) := \arg\min_h \sum_u \big(\hat{f}_{ur}(g(u), h) - f_{ur}\big)^2;$$

George T., Merugu S. A scalable collaborative filtering framework based on co-clustering // 5-th IEEE int. conf. on Data Mining, 2005, Pp. 27–30.

Banerjee A., et al. A generalized maximum entropy approach to Bregman co-clustering and matrix approximation // 10-th KDDM, 2004, Pp. 509–514.

Матричные разложения

T — множество тем (интересов): $|T| \ll |U|$, $|T| \ll |R|$;

p_{tu} — неизвестный *профиль клиента* u; $P = \left(p_{tu}\right)_{|T|\times|U|}$;

q_{tr} — неизвестный *профиль объекта* r; $Q = \left(q_{tr}\right)_{|T|\times|R|}$;

Задача: найти разложение $f_{ur} = \sum\limits_{t\in T} \pi_t p_{tu} q_{tr}$;

Матричная запись: $F = P^{\mathrm{T}} \Delta Q$, $\Delta = \operatorname{diag}\left(\pi_1, \ldots, \pi_{|T|}\right)$;

Вероятностный смысл: $\underbrace{p(u,r)}_{f_{ur}?} = \sum\limits_{t\in T} \underbrace{p(t)}_{\pi_t} \cdot \underbrace{p(u|t)}_{p_{tu}} \cdot \underbrace{q(r|t)}_{q_{tr}}$;

Методы решения:

SVD — сингулярное разложение (плохо интерпретируется);

NNMF — неотрицательное матричное разложение: $p_{tu} \geqslant 0$, $q_{tr} \geqslant 0$;

PLSA — вероятностный латентный семантический анализ.

Разреженный SVD (Singular Value Decomposition)

Обычный не разреженный SVD: $\|F - P^{\mathsf{T}}Q\|^2 \to \min\limits_{P,Q}$

Разреженный SVD: $\sum\limits_{(u,r)\in D} \Bigg(\underbrace{f_{ur} - \sum\limits_{t\in T} p_{tu}q_{tr}}_{\varepsilon_{ur}} \Bigg)^2 \to \min\limits_{P,Q}$

Метод стохастического градиента:
перебираем все $(u, r) \in D$ многократно в случайном порядке
и делаем каждый раз градиентный шаг для задачи $\varepsilon_{ur}^2 \to \min\limits_{p_u,q_r}$:

$$p_{tu} := p_{tu} + \eta\varepsilon_{ur}q_{tr}, \quad t \in T;$$
$$q_{tr} := q_{tr} + \eta\varepsilon_{ur}p_{tr}, \quad t \in T;$$

Tacáks G., Pilászy I., Németh B., Tikk D. Scalable collaborative filtering approaches for large recommendation systems // JMLR, 2009, No. 10, Pp. 623–656.

Разреженный SVD

Преимущества метода стохастического градиента:

- легко вводится регуляризация:
$$\varepsilon_{ur}^2 + \lambda\|p_u\|^2 + \mu\|q_r\|^2 \to \min_{p_u, q_r};$$
- легко вводятся ограничения неотрицательности:
$$p_{tu} \geqslant 0, \quad q_{tr} \geqslant 0 \text{ (метод проекции градиента)};$$
- легко вводятся обобщение для ранговых данных:
$$\sum_{(u,r)\in D} \left(\beta(f_{ur}) - \sum_{t\in T} p_{tu} q_{tr} \right)^2 \to \min_{P,Q,\{\beta_f\}}.$$
- легко реализуются все виды инкрементности: добавление
  – ещё одного клиента u,
  – ещё одного объекта r,
  – ещё одного значения f_{ur}.
- высокая численная эффективность на больших данных;

Вероятностный латентный семантический анализ (PLSA)

Пусть T — множество тем (интересов);

Вероятностная модель посещений [Hofmann, 1999]:

$$p(u,r) = \sum_{t \in T} p(t)\, p(u|t)\, q(r|t).$$

Задача максимизации правдоподобия по $p(t)$, $p(u|t)$, $q(r|t)$:

$$L(\Delta, P, Q) = \sum_{u,r} f_{ur} \ln p(u,r) \to \max.$$

при ограничениях нормировки:

$$\sum_{t \in T} p(t) = 1; \quad \sum_{u \in U} p(u|t) = 1; \quad \sum_{r \in R} q(r|t) = 1.$$

Тематические профили вычисляются по формуле Байеса:

$$p(t|u) = \frac{p(u|t)\, p(t)}{\sum_{s \in T} p(u|s)\, p(s)}; \qquad q(t|r) = \frac{q(r|t)\, p(t)}{\sum_{s \in T} q(r|s)\, p(s)}.$$

Максимизация правдоподобия: EM-алгоритм

Сформировать начальные приближения $p(t)$, $p(u|t)$, $q(r|t)$;
Повторять итерации до сходимости:

- **E-шаг:** скрытые переменные H по формуле Байеса:

$$H(t|u,r) = \frac{p(t)p(u|t)q(r|t)}{p(u,r)};$$

- **M-шаг:** аналитическое решение задачи $L(\Delta, P, Q) \to \max$:

$$p(t) = \frac{S(t)}{S}; \quad S(t) = \sum_{u,r} f_{ur} H(t|u,r); \quad S = \sum_{u,r} f_{ur};$$

$$p(u|t) = \frac{1}{S(t)} \sum_{r} f_{ur} H(t|u,r);$$

$$q(r|t) = \frac{1}{S(t)} \sum_{u} f_{ur} H(t|u,r).$$

Вывод формул M-шага

Распишем Лагранжиан:

$$\mathscr{L} = \sum_{u,r} f_{ur} \ln p(u,r) - \nu\left(\sum_{t\in T} p(t) - 1\right) -$$
$$- \sum_{t\in T} \lambda_t \left(\sum_{u\in U} p(u|t) - 1\right) - \sum_{t\in T} \mu_t \left(\sum_{r\in R} q(r|t) - 1\right).$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial p(t)} = \sum_{u,r} f_{ur} \frac{p(u|t)q(r|t)}{p(u,r)} - \nu = 0;$$

$$\sum_{u,r} f_{ur} \frac{p(u|t)q(r|t)p(t)}{p(u,r)} = \nu p(t) \;\Rightarrow\; \nu = \sum_{u,r} f_{ur} = S;$$

$$p(t) = \frac{1}{S} \sum_{u,r} f_{ur} H(t|u,r) = \frac{S(t)}{S};$$

Вывод формул M-шага (продолжение)

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial p(u|t)} = \sum_r f_{ur} \frac{p(t)q(r|t)}{p(u,r)} - \lambda_t = 0;$$

$$\sum_r f_{ur} \frac{p(t)q(r|t)p(u|t)}{p(u,r)} = \lambda_t p(u|t) \;\Rightarrow\; \lambda_t = \sum_{u,r} f_{ur} H(t|u,r);$$

$$p(u|t) = \sum_r f_{ur} H(t|u,r) \Big/ \sum_{u,r} f_{ur} H(t|u,r).$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q(r|t)} = \sum_u f_{ur} \frac{p(t)p(u|t)}{p(u,r)} - \mu_t = 0;$$

$$\sum_u f_{ur} \frac{p(t)p(u|t)q(r|t)}{p(u,r)} = \mu_t q(r|t) \;\Rightarrow\; \mu_t = \sum_{u,r} f_{ur} H(t|u,r);$$

$$q(r|t) = \sum_u f_{ur} H(t|u,r) \Big/ \sum_{u,r} f_{ur} H(t|u,r).$$

Обобщения, модификации, применения

- Если $f_{ur} \in Z = \{1, 2, \ldots, z_{\max}\}$ — рейтинги,
  то вместо $p(u, r) = \mathrm{P}(f_{ur} \neq \varnothing)$ надо оценивать
  $(z_{\max} - 1)$ вероятностей $p_z(u, r) = \mathrm{P}(f_{ur} \leqslant z)$, $z \in Z$;
- Иерархические профили: темы разбиваются на подтемы;
- Инкрементные алгоритмы: обработка потока данных D;
- Учёт априорной информации через
  начальное приближение профилей:
  - тематический каталог объектов;
  - соц-дем (анкеты) клиентов;
- Унифицированный профиль объектов и клиентов;
- Долгосрочный и краткосрочный профили;
- Оценивание сходства по частям профиля.

Данные Яндекс (Интернет-математика 2005)

Исходные данные:

7 дней работы поисковой машины Яндекс; объём лога 3.6 Гб;
14 606 пользователей;
207 312 запросов;
1 972 636 документов было выдано;
129 600 документов были выбраны пользователями.

Фрагмент лога:

```
1098353321109615996 (номер пользователя)
    французская кухня (запрос) 1110473322 (время запроса) 113906 0
        http://www.naturel.ru/ (сайт или документ)
        http://www.kuking.net/c7.htm 1110473328 (время клика)
        http://www.cooking-book.ru/national/french/
        ...
    жаренное мясо в вине 1110473174 1349 0
    ...
...
```

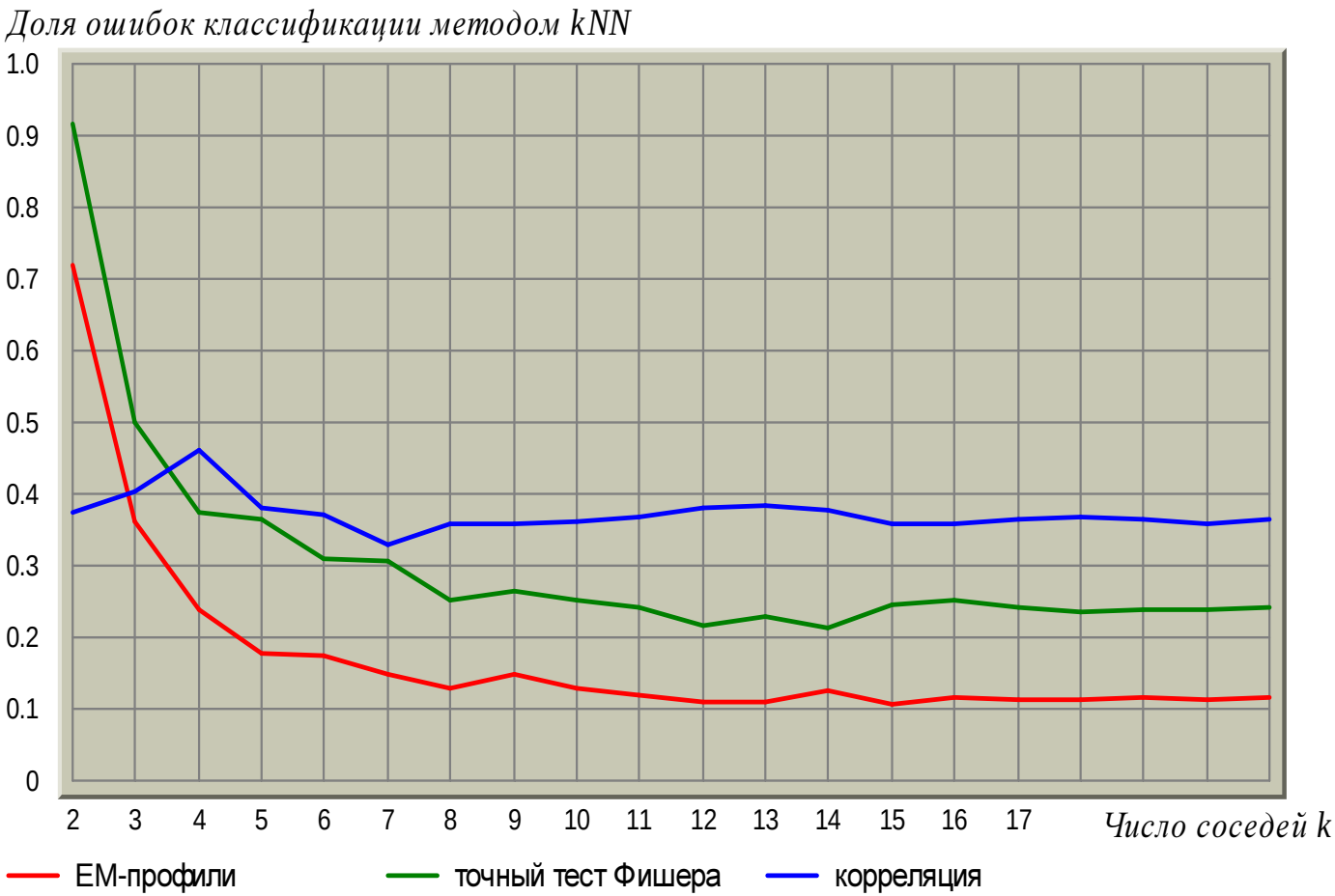
Данные Яндекс (Интернет-математика 2005)

Схема эксперимента:

- Отбор наиболее посещаемых сайтов, $|R| = 1024$.
- Отбор наиболее активных пользователей, $|U| = 7300$.
- Введение критериев качества профилей:
  - 400 сайтов заранее классифицированы на $|T| = 12$ тематических классов;
  - Q_1 = доля неправильно восстановленных профилей;
  - Q_2 = число ошибок классификации методом kNN;
- Оптимизация параметров по критерию качества.
- Построение профилей и оценок сходства сайтов.
- Визуализация: глобальные и локальные карты сходства.

Результаты: подбор меры сходства

оценки сходства по точному тесту Фишера (FET) лучше корреляций, а по профилям — ещё лучше!



Задача многомерного шкалирования (multidimensional scaling)

Дано: попарные расстояния R_{ij} между n объектами.
Найти: координаты этих объектов на плоскости $(x_i, y_i)_{i=1}^n$:

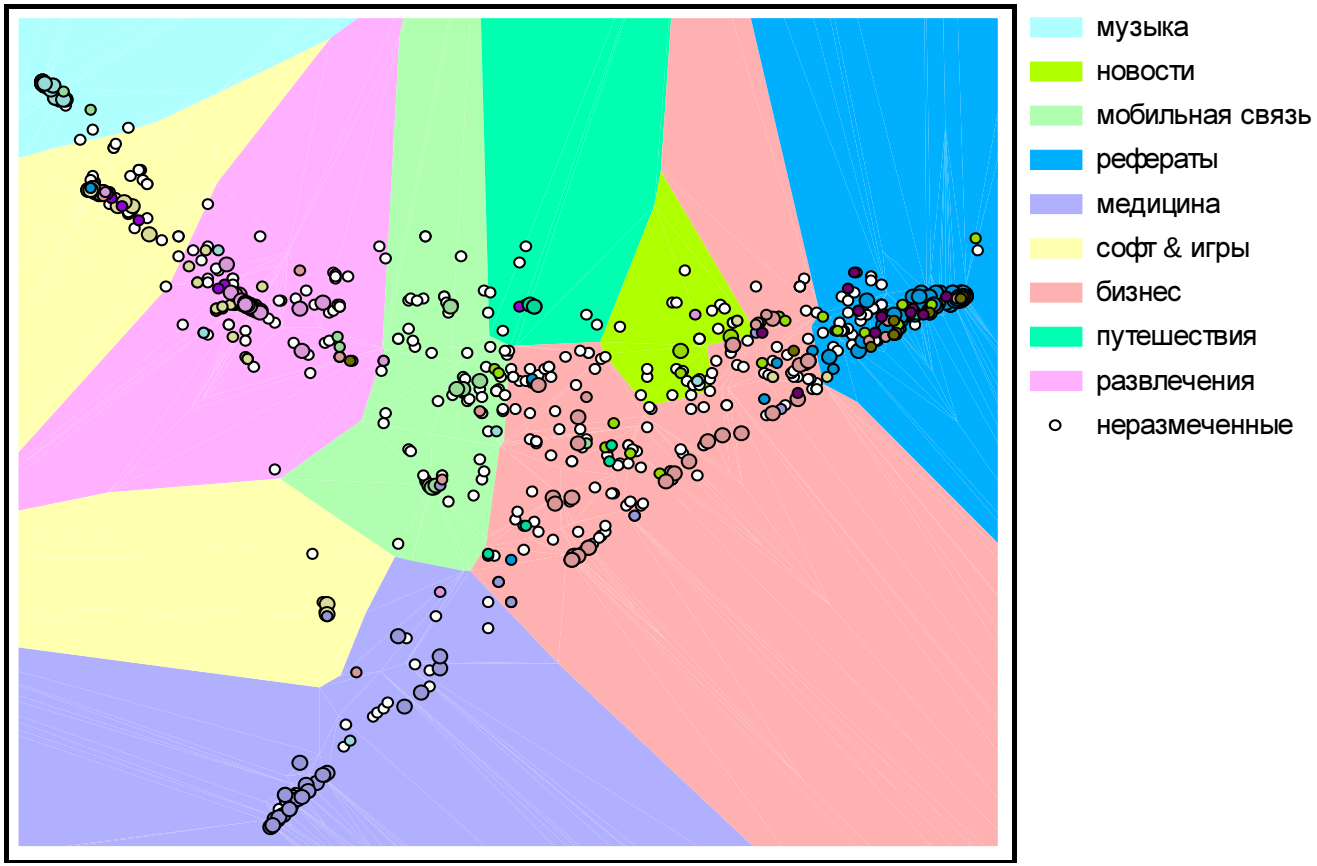
$$S = \sum_{i<j} \left(\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} - R_{ij} \right)^2 \to \min_{(x_i, y_i)_{i=1}^n}$$

Карта сходства (Similarity Map) — это средство разведочного анализа многомерных данных:

- точечный график $(x_i, y_i)_{i=1}^n$;
- близким объектам соответствуют близкие точки;
- оси графика не имеют интерпретации;
- возможны искажения.

Карта поисковых интересов пользователей Рунета

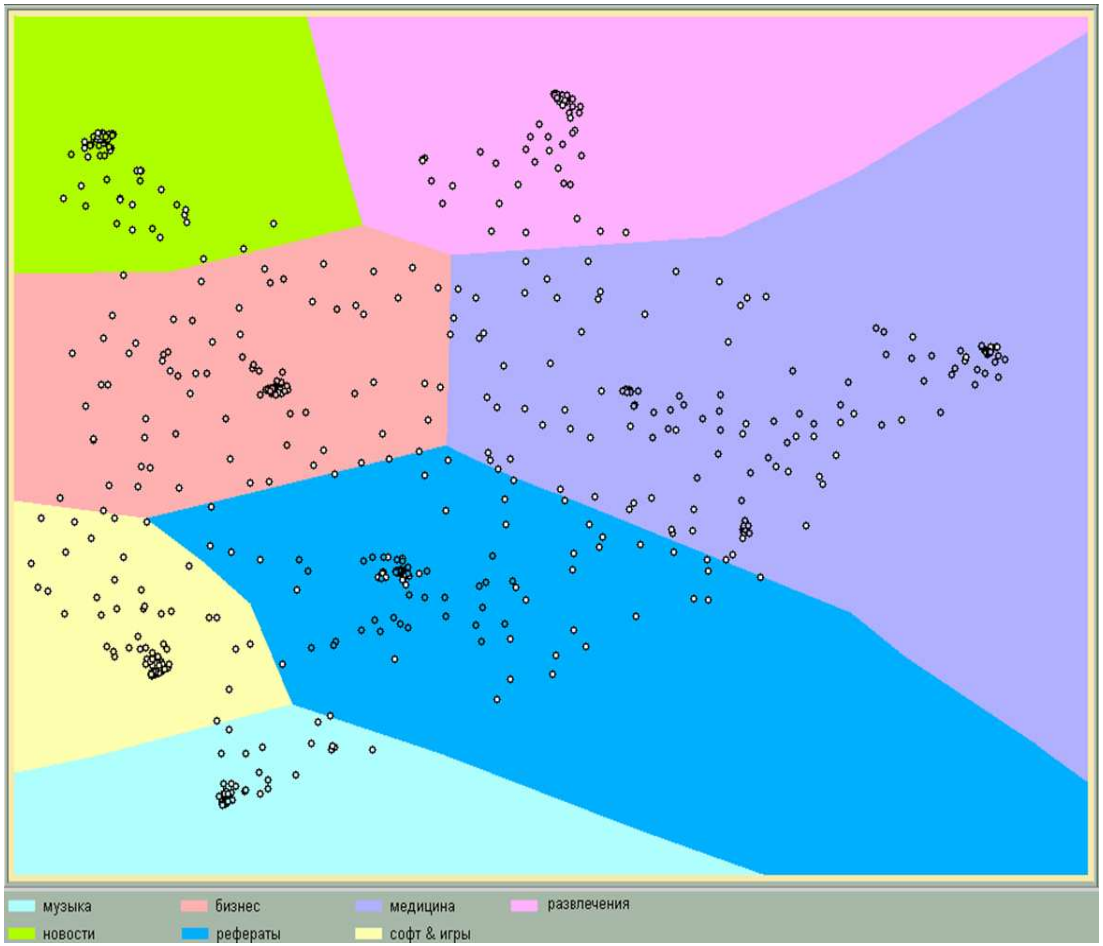
Многомерное шкалирование по FET-оценкам сходства, $|T| = 9$



Результат: темы удаётся проинтерпретировать :)

Карта поисковых интересов пользователей Рунета

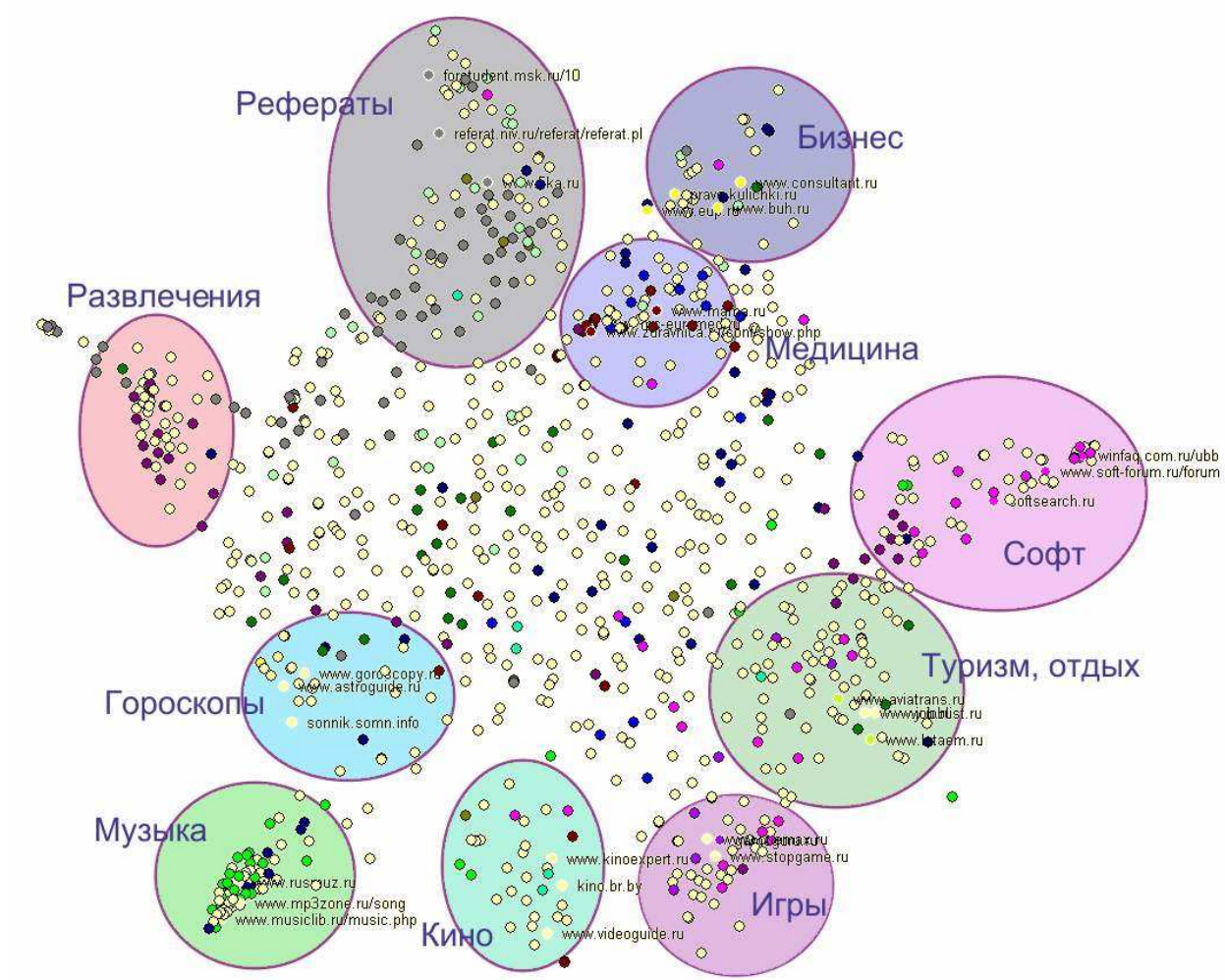
Многомерное шкалирование по профилям, $|T| = 7$



Результат кажется более содержательным :)

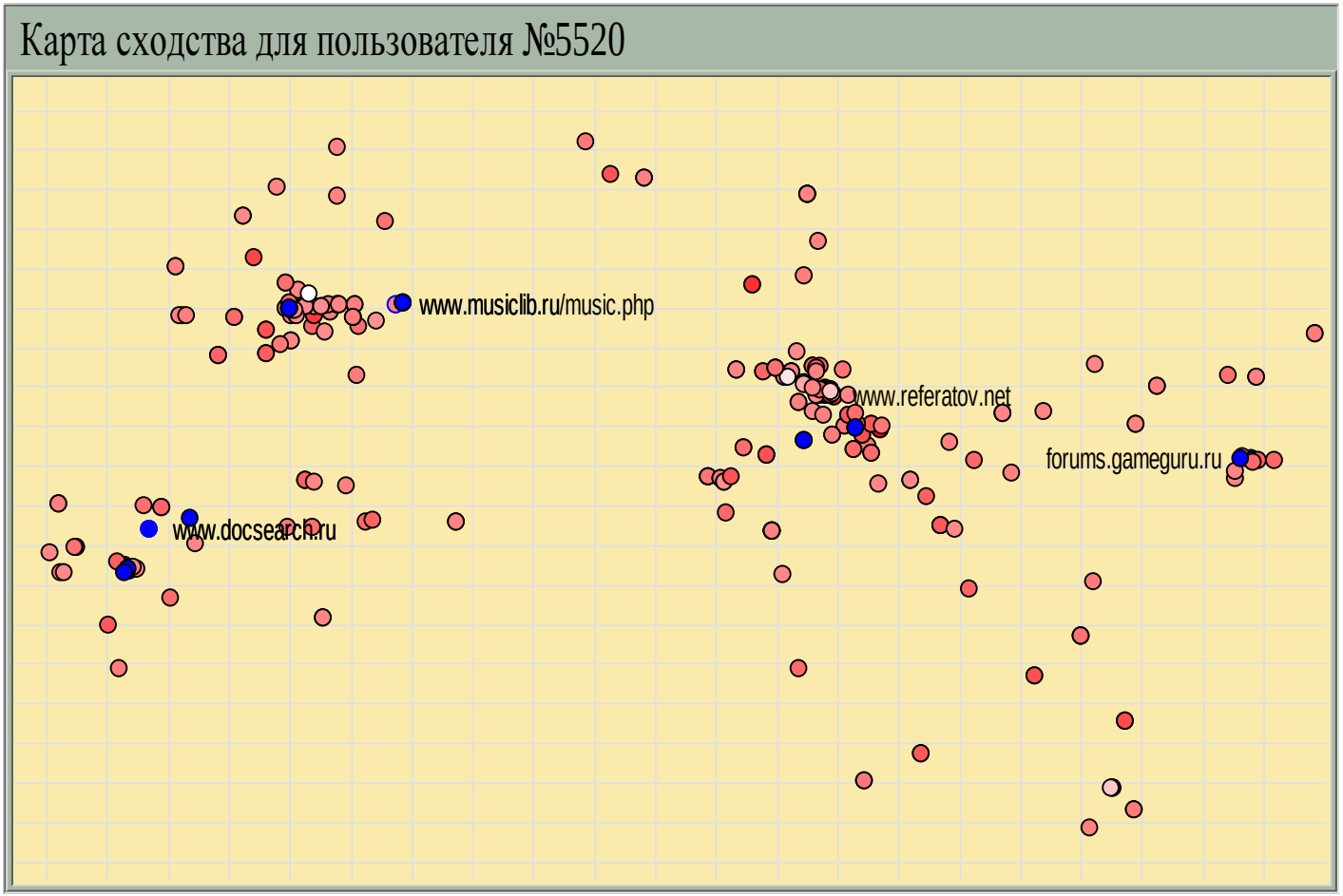
Карта поисковых интересов пользователей Рунета

Многомерное шкалирование по профилям, $|T| = 12$



Ещё одна визуализация: локальная карта пользователя

Визуальное представление персональных рекомендаций:



Резюме

Коллаборативная фильтрация (Collaborative Filtering) — это набор методов для построения рекомендательных систем (Recommender Systems).

Тематическое моделирование (Topic Modeling) — это набор методов для выявления латентных интересов клиентов или для выявления латентных тем в корпусе текстов.

Латентные модели обладают рядом преимуществ:

- тематические профили содержательно интерпретируемы, могут оцениваться по внешним данным,
- что позволяет решать проблему «холодного старта»
- и строить тематическую кластеризацию (таксономию);
- оценки сходства клиентов и объектов более адекватны;
- резко сокращается объём хранимых данных.