Линейные методы классификации

Виктор Владимирович Китов
v.v.kitov@yandex.ru

МГУ им.Ломоносова, ф-т ВМиК, кафедра ММП.

I семестр 2015 г.

Регуляризация

- Удобный прием для контроля сложности модели:

$$Q^{regularized}(w) = Q(w) + \tau ||w||_2$$

$$Q^{regularized}(w) = Q(w) + \tau ||w||_1$$

$$||w||_1 = \sum_{d=1}^{D} |w^d|, \quad ||w||_2 = \sqrt{\sum_{d=1}^{D} (w^d)^2}$$

- Регрессия, оцкениваемая методом наименьших квадратов с регуляризацией:
  - $\tau ||w||_1$ - LASSO
  - $\tau ||w||_2$ - Ridge
  - $\alpha ||w||_1 + \beta ||w||_2$ - elastic net:

Оценка методом максимального правдоподобия

- $X = \{x_1, x_2, ...x_n\}$, $Y = \{y_1, y_2, ...y_n\}$ - обучающая выборка, $(x_i, y_i) \sim p(y|x, w)$
- Оценка максимального правдоподобия $\widehat{w} = \arg\max_w p(Y|X, w)$
- Используя предположение о независимости $y_i|x_i$ $i = 1, 2, ...N$:

$$\prod_{i=1}^{N} p(y_i|x_i, w) = \sum_{i=1}^{N} \ln p(y_i|x_i, w) \rightarrow \max_w$$

- Оптимизация цены:

$$\sum_{i=1}^{n} \mathcal{L}(g(x_i)y_i|w) \rightarrow \min_w$$

- Взаимосвязь двух методов:

$$\mathcal{L}(g(x_i)y_i|w) = -\ln p(y_i|x_i, w)$$

Максимальная апостреriорная вероятность

- $X = \{x_1, x_2, ...x_N\}$, $Y = \{y_1, y_2, ...y_N\}$ - обучающая выборка из н.о.р. $(x_i, y_i) \sim p(x, y|w)$
- w - не константа, а с.в. $w \sim p(w)$
- Поскольку

$$p(w|X,Y) = \frac{p(X,Y,w)}{p(X,Y)} = \frac{p(X,Y|w)p(w)}{p(X,Y)} \propto p(X,Y|w)p(w)$$

то справедлива оценка *максимизации апостериорной вероятности*:

$$w = \arg\max_w p(w|X,Y) = \arg\max_w p(X,Y|w)p(w)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \ln p(x_i, y_i|\theta) + \ln p(w) \to \max_w$$

$\ln p(w)$ соответствует регуляризации.

Варианты априорных вероятностей

- Нормальное распределение

$$\ln p(w, \sigma^2) = \ln \left(\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} e^{-\frac{||w||_2^2}{2\sigma^2}} \right) = -\frac{1}{2\sigma^2} ||w||_2^2 + \mathrm{const}$$

- Распределение Лапласа

$$\ln p(w, C) = \ln \left(\frac{1}{(2C)^n} e^{-\frac{||w||_1}{C}} \right) = -\frac{1}{C} ||w||_1 + \mathrm{const}$$

L_1 норма

- $||w||_1$ регуляризация производит отбор признаков.
- Рассмотрим

$$Q(w) = \sum_{i=1}^{N} \mathcal{L}_i(w) + \lambda \sum_{d=1}^{D} |w_d|$$

- При $\lambda > \sup_w \left| \frac{\partial \mathcal{L}(w)}{\partial w_i} \right|$ становится заведомо лучше положить $w_i = 0$
- Для более высоких λ больше коэффициентов зануляются.

Логистическая регрессия

- Пусть γ_1, γ_2 - цены неправильной классификации классов ω_1 и ω_2.
- Предположим

$$\ln\left(\frac{\gamma_1 p(\omega_1|x)}{\gamma_2 p(\omega_2|x)}\right) = \beta_0 + \boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{x}$$

- это эквивалентно

$$\begin{aligned} p(\omega_2|x) &= \frac{1}{1 + exp(\beta_0' + \boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{x})} \\ p(\omega_1|x) &= \frac{exp(\beta_0' + \boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{x})}{1 + exp(\beta_0' + \boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{x})} \end{aligned}$$

- где $\beta_0' = \beta_0 - \ln(\gamma_1/\gamma_2)$

Логистическая регрессия

Решающее правило (следуя Байесовскому правилу минимальной цены):

$$x = \begin{cases} \omega_1, & \beta_0' + \boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{x} > 0 \\ \omega_2, & \beta_0' + \boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{x} < 0 \end{cases}$$

Оценка $\beta_0', \boldsymbol{\beta}$ методом максимального правдоподобия:

$$\prod_{i=1}^{N} p(c_i | x_i) \to \max_{\beta_0', \boldsymbol{\beta}}$$

где c_i - класс объекта x_i.

Многоклассовая логистическая регрессия

- Предположение:

$$\ln\left(\frac{\gamma_s p(\omega_s|x)}{\gamma_C p(\omega_C|x)}\right) = \beta_{s0} + \boldsymbol{\beta}_s^T \boldsymbol{x}, \quad s = 1, 2, ...C-1$$

- Вероятности классов (дающие эквивалентное определение):

$$\begin{aligned} p(\omega_s|x) &= \frac{exp(\beta'_{s0} + \beta_s^T x)}{1 + \sum_{s=1}^{C-1} exp(\beta'_{s0} + \beta_s^T x)}, \quad s = 1, 2, ...C-1 \\ p(\omega_C|x) &= \frac{1}{1 + \sum_{s=1}^{C-1} exp(\beta'_{s0} + \beta_s^T x)} \end{aligned}$$

$$\beta'_{s0} = \beta_{s0} - \ln(\gamma_s/\gamma_C)$$

- Интерпретация ln и вероятностей (soft-max)

Многоклассовая логистическая регрессия

- Решающее правило (Байесовское правило минимальной ожидаемой цены):
- $c = \arg\max_c \beta_{c0} + \beta_c^T x$, если $\beta_{c0} + \beta_c^T x > 0$ иначе сопоставить x классу C.
- Оценивание методом максимального правдоподобия:

$$\prod_{i=1}^{N} p(c_i|x_i) \rightarrow \max_{\beta_0', \boldsymbol{\beta}}$$

Функция цены

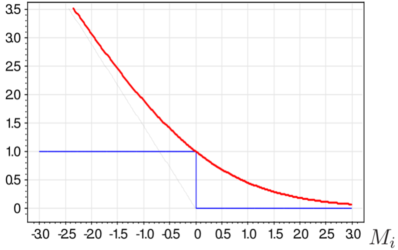
Для 2-х классов $p(y|x) = \sigma(\langle w, x\rangle y)$, где $\sigma = \frac{1}{1+e^{-z}}$,
$w = [\beta_0', \beta]$, $x = [1, x_1, x_2, \dots x_D]$.

Оценка методом максимального правдоподобия:

$$\prod_{i=1}^{N} \sigma(\langle w, x_i\rangle y_i) \to \max_w$$

эквивалентна

$$\sum_{i=1}^{N} \ln(1 + e^{-\langle w, x_i\rangle y_i}) \to \min_w$$



Следовательно, мажорирующая ф-ция для логистической регрессии $\mathcal{L}(M) = \ln(1 + e^{-M})$.

Метод стохастического градиента

Подставляя $\mathcal{L}(M) = \ln(1 + e^{-M})$ в метод стохастического градиентного спуска, получаем:

$$w \leftarrow w + \eta\sigma(-M_i)x_i y_i$$

Правило обновления персептрона Розенблатта:

$$w \leftarrow w + \eta\mathbb{I}[M_i < 0]x_i y_i$$

- Обновление логистической регрессии - сглаженный вариант обновления персептрона Розенблатта.
- Чем существеннее ошибка - тем сильнее обноление весов.