Часть V

Линейные рекуррентные последовательности

Разделы

Линейные рекуррентные последовательности

Определение

Числовая последовательность $\overline{a} = \{a_i\}_{i \geqslant 0} = (a_0, a_1, \ldots)$, *для которой при* $n \geqslant k$ *выполняется линейное рекуррентное соотношение порядка* k

$$C_0 a_n + C_1 a_{n-1} + C_2 a_{n-2} + \ldots + C_k a_{n-k} = C, \qquad (*)$$

где $C_0 = 1, C_1, \ldots, C_{k-1}, C_k \neq 0, C$ *— некоторые константы, называется линейной рекуррентной последовательностью порядка* k, *причём в случае* $C = 0$ *говорят об однородных соотношении и последовательности.*

Линейная рекуррентная последовательность порядка k однозначно задаётся своим рекуррентным соотношением и совокупностью из k её последовательных элементов, которые называют *начальными условиями*; обычно это элементы $a_0, \ldots, a_{k-1}$.

Характеристический многочлен

Поставим в соответствие однородному линейному рекуррентному соотношению $(*)$ *характеристический многочлен*

$$P(x) = x^k + C_1 x^{k-1} + \ldots + C_{k-1}x + C_k. \qquad (**)$$

Пример

Последовательность Фибоначчи $1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$, у которой $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ при $n \geqslant 2$, является однородной линейной рекуррентной последовательностью 2-го порядка, задаваемую соотношением $f_n - f_{n-1} - f_{n-2} = 0$ и начальными условиями $f_0 = f_1 = 1$.

Характеристическим многочленом для последовательности Фибоначчи будет $P(x) = x^2 - x - 1$.

Линейное пространство л.р.п.

Рассмотрим множество $\mathcal{L} = \{\overline{a}\}$ всех линейных рекуррентных последовательностей (над полем $\mathbb{R}$) и введем на нём операции

1) поэлементного *суммирования* $\overline{a} + \overline{b}$;
2) *умножения* всех элементов на константу из $\mathbb{R}$: $const \cdot \overline{a}$.

Тогда $\mathcal{L}$ превращается в бесконечномерное линейное пространство над $\mathbb{R}$ относительно введенных операций.

Утверждение

Последовательности из $\mathcal{L}$, для которых выполняется некоторое линейное рекуррентное соотношение порядка k, образуют k-мерное подпространство L подпространства $\mathcal{L}$.

Доказательство

Если $\overline{a}, \overline{b} \in L \subset \mathcal{L}$ удовлетворяют л.р.с. порядка k, то ему удовлетворяет и $\alpha\overline{a} + \beta\overline{b} \in L$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Равенство $\dim L = k$ устанавливается элементарно.

Линейное пространство л.р.п...

Теорема

Последовательности $\overline{a}^1, \ldots, \overline{a}^k$ *образуют базис* k*-мерного подпространства* L *линейного пространства* $\mathcal{L}$, *если и только если*

$$\begin{vmatrix} a_0^1 & a_0^2 & \ldots & a_0^k \\ a_1^1 & a_0^2 & \ldots & a_1^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k-1}^1 & a_{k-1}^2 & \ldots & a_{k-1}^k \end{vmatrix} \neq 0.$$

Сокращения: линейное рекуррентное соотношение — л.р.с., линейная рекуррентная последовательность — л.р.п.

Разделы

Разделы

Решение л.р.с.: основное утверждение

Утверждение

Если заданы л.р.с.

$$a_n + C_1 a_{n-1} + C_2 a_{n-2} + \ldots + C_k a_{n-k} = C,$$

и начальные условия $a_0, \ldots, a_{k-1}$, *то единственная удовлетворяющая им л.р.п. имеет вид*

$$\overline{a} = \beta_1 \overline{a}^1 + \ldots + \beta_k \overline{a}^k,$$

где $\overline{a}^1, \ldots, \overline{a}^k$ *— некоторый базис линейного пространства* L, *а коэффициенты* $\beta_1, \ldots, \beta_k$ *однозначно находят из СЛАУ*

$$\begin{cases} a_0^1\beta_1 + a_0^2\beta_2 + \ldots + & a_0^k\beta_k = a_0, \\ a_1^1\beta_1 + a_1^2\beta_2 + \ldots + & a_1^k\beta_k = a_1, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots & \ldots \quad \ldots \\ a_{k-1}^1\beta_1 + a_{k-1}^2\beta_2 + \ldots + & a_{k-1}^k\beta_k = a_{k-1}. \end{cases}$$

Свойство корней характеристического многочлена

Т.о. задача нахождения л.р.п. сводится к нахождению базиса линейного пространства L, образованного множеством всех последовательностей, удовлетворяющих данному л.р.с.

Базисные последовательности строят с помощью корней характеристического многочлена $P(x)$.

Лемма (о корнях характеристического многочлена)
Пусть задано л.р.с. порядка k

$$a_n + C_1 a_{n-1} + C_2 a_{n-2} + \ldots + C_k a_{n-k} = C. \qquad (*)$$

Тогда если λ *— корень его характеристического многочлена*
$$P(x) = C_0 x^k + C_1 x^{k-1} + \ldots + C_{k-1} x + C_k,\ C_0 = 1,\ C_k \neq 0,$$
то последовательность $\widehat{\lambda} = (1, \lambda, \lambda^2, \ldots) = \{\lambda^n\}_{n \geqslant 0}$ *удовлетворяет соотношению* $(*)$.

Случай простых корней

Доказательство

Подставим члены последовательности $\widehat{\lambda}$ *в* $(*)$*: поскольку* $C_k \neq 0$ *влечёт* $\lambda \neq 0$*, получим*

$$C_0\lambda^n + \ldots + C_k\lambda^{n-k} \; = \; \lambda^{n-k}\left(C_0\lambda^k + \ldots + C_k\right) \; = \; 0.$$

Будем искать базис пространства L в виде набора последовательностей, образованных степенями корней характеристического многочлена $P(x)$.

Теорема

Пусть характеристический многочлен $P(x)$ *линейного однородного рекуррентного соотношения* $(*)$ *порядка* k *имеет* k *различных корней* $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ *(т.е. не имеет кратных корней). Тогда последовательности* $\widehat{\lambda}_1$*, ...,* $\widehat{\lambda}_k$ *образуют базис пространства* L*.*

Случай простых корней...

Доказательство

По лемме о корнях характеристического многочлена, все последовательности $\widehat{\lambda}_i = \{\lambda_i^n\}_{n \geqslant 0}$, $i = \overline{1, k}$ *удовлетворяют соотношению* $(*)$, *т.е. лежат в пространстве* L.

Определитель, имеющий столбцами первые k *элементов последовательностей* $\widehat{\lambda}_1$, ..., $\widehat{\lambda}_k$, *является определителем Вандермонда*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \dots & \lambda_k^{k-1} \end{vmatrix} = \prod_{i<j} (\lambda_j - \lambda_i)$$

Поскольку все корни $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ *различны, то* $\prod_{i<j}(\lambda_j - \lambda_i) \neq 0$, *откуда следует утверждение теоремы.*

Случай простых и кратных корней

Доказательство (продолжение)
Поэтому общее решение линейного однородного рекуррентного соотношения $(*)$ выглядит следующим образом:

$$\overline{a} = \beta_1 \widehat{\lambda}_1 + \ldots + \beta_k \widehat{\lambda}_k.$$

Утверждение
Если некоторый корень λ многочлена $P(x)$ имеет кратность m, ему будут соответствовать следующие базисные последовательности

$$\widehat{\lambda},\ n\widehat{\lambda},\ \ldots,\ n^{m-1}\widehat{\lambda},$$

или последовательность $\left(1 + n + \ldots + n^{m-1}\right)\widehat{\lambda}$.

Уравнение $P(x) = 0$ назовём *характеристическим* для данного характеристического многочлена $P(x)$ соответствующего л.р.с.

Решение линейных рекуррентных соотношений: пример 1

Пример (1)

Найти л.р.п., удовлетворяющую линейному рекуррентному соотношению

$$a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0.$$

Решение Характеристическое уравнение данного соотношения есть

$$P(x) = x^2 - 4x + 3 = 0.$$

Оно имеет два вещественных корня кратности 1: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ и решение данного л.о.р.с. в общем виде есть

$$a_n = \beta_1 + \beta_2 \cdot 3^n.$$

Решение линейных рекуррентных соотношений: пример 2

Пример (2)

Найти л.р.п., удовлетворяющую л.р.с.

$$a_{n+3} + 3a_{n+2} + 3a_{n+1} + a_n \;=\; 0.$$

Решение Характеристическое уравнение данного соотношения:

$$P(x) \;=\; x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \;=\; 0 \quad \text{или} \quad (x+1)^3 \;=\; 0.$$

Т.о. данное характеристическое уравнение имеет один вещественный корень $\lambda = -1$ кратности 3, и решение данного л.о.р.с. в общем виде есть

$$a_n \;=\; (-1)^n \left(\beta_1 + \beta_2 n + \beta_3 n^2\right).$$

Решение линейных рекуррентных соотношений: пример 2

Проверим справедливость решения, для простоты — для случая $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 1$, подставляя значение $a_n = (-1)^n \left(1 + n + n^2\right)$ в исходное л.р.с.:

$$-\left((n+3)^2 + (n+3) + 1\right) + 3\left((n+2)^2 + (n+2) + 1\right) -$$
$$-3\left((n+1)^2 + (n+1) + 1\right) - \left(n^2 + n + 1\right) =$$
$$= -\left((n^2 + 6n + 9) + n + 3 + 1\right) + \left(3n^2 + 12n + 12 + 3n + 6 + 3\right) -$$
$$-\left(3n^2 + 6n + 3 + 3n + 3 + 3\right) + \left(n^2 + n + 1\right) =$$
$$= (-1+3-3+1)n^2 + (-7+15-9+1)n + (-13+21-9+1) = 0.$$

Нахождение линейных рекуррентных последовательностей

Из доказанного ранее следует, что если заданы начальные условия $a_0, \ldots, a_{k-1}$ л.р.с. порядка k

$$a_n + C_1 a_{n-1} + C_2 a_{n-2} + \ldots + C_k a_{n-k} \ = \ C,$$

то коэффициенты $\beta_1, \ldots, \beta$ в общем решении

$$\overline{a} \ = \ \beta_1 \widehat{\lambda}_1 + \ldots + \beta_k \widehat{\lambda}_k$$

находят из СЛАУ k-го порядка

$$\begin{cases} \beta_1 & + & \ldots + & \beta_k & = \ a_0 \\ \beta_1 \lambda_1 & + & \ldots + & \beta_k \lambda_k & = \ a_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \beta_1 \lambda_1^{k-1} & + & \ldots + & \beta_k \lambda_k^{k-1} & = \ a_{k-1} \end{cases}$$

Нахождение линейных рекуррентных последовательностей

Пример (1, продолжение)

Ранее было найдено, что л.р.п. $a_n = \beta_1 + \beta_2 \cdot 3^n$ при любых β_1, β_2 удовлетворяет л.р.с.

$$a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0.$$

Найти конкретную такую л.р.п., если $a_1 = 10, a_2 = 16$.

Решение. Для начала найдём a_0:

$$a_2 - 4a_1 + 3a_0 = 0 \Rightarrow a_0 = \frac{4a_1 - a_2}{3} = \frac{40 - 16}{3} = 8.$$

Далее:

$$\begin{cases} \beta_1 + \beta_2 & = 8 \\ \beta_1 + 3\beta_2 & = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta_1 = 7 \\ \beta_2 = 1 \end{cases}$$

т.е. искомая л.р.п. есть $a_n = 7 + 3^n$.

Нахождение линейных рекуррентных последовательностей

Пример (2, продолжение)

Ранее было найдено, что л.р.п. $a_n = (-1)^n \left(\beta_1 + \beta_2 n + \beta_3 n^2\right)$ при любых β_1, β_2, β_3 удовлетворяет л.р.с.

$$a_{n+3} + 3a_{n+2} + 3a_{n+1} + a_n = 0.$$

Найти конкретную такую л.р.п., если $a_0 = 0, a_1 = 2$, $a_2 = -10$.

Решение.

$$\left\{\begin{array}{llll} \beta_1 & & & = 0 \\ -\beta_1 & -\beta_2 & -\beta_3 & = 2 \\ \beta_1 & +2\beta_2 & +4\beta_3 & = -10 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \beta_1 = 0 \\ \beta_2 = -3 \\ \beta_3 = 1 \end{array}\right.$$

т.е. искомая л.р.п. есть $a_n = (-1)^n(n^2 - 3n)$.

Случай комплексных корней

Специально выделим случай, когда характеристический многочлен имеет комплексные корни, а все коэффициенты в л.р.с. $(*)$ являются действительными числами.

Пусть характеристический многочлен $P(x)$ имеет корень

$$\lambda_1 = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) \;=\; \rho e^{i\varphi}.$$

Тогда сопряженное число

$$\lambda_2 \;=\; \rho(\cos\varphi - i\sin\varphi) = \rho(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi) \;=\; \rho e^{-i\varphi}$$

также будет его корнем.

Соответствующая пара базисных комплексных последовательностей имеет вид

$$\widehat{\lambda}_1 \;=\; \left\{\, \rho^n e^{+in\varphi} \,\right\}_{n\geqslant 0} \;=\; \left\{\, \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \,\right\}_{n\geqslant 0},$$

$$\widehat{\lambda}_2 \;=\; \left\{\, \rho^n e^{-in\varphi} \,\right\}_{n\geqslant 0} \;=\; \left\{\, \rho^n(\cos n\varphi - i\sin n\varphi) \,\right\}_{n\geqslant 0}.$$

Случай комплексных корней

Если к системе базисных векторов линейного векторного пространства применить невырожденное линейное преобразование, то преобразованная система векторов также будет базисной.

После применения к пространству L некоторого преобразование поворота, вместо пары комплексных последовательностей $(\widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2)$ получим пару действительных последовательностей

$$\widehat{\lambda}'_1 = \{\, \rho^n \cos n\varphi \,\}_{n \geqslant 0}, \qquad \widehat{\lambda}'_2 = \{\, \rho^n \sin n\varphi \,\}_{n \geqslant 0}.$$

То же самое можно проделать и с последовательностями, соответствующими другим парам комплексно сопряженных корней.

Случай комплексных корней: пример

Пример (3)

Найти л.р.п., удовлетворяющую л.р.с.

$$a_{n+2} - 2\cos\alpha a_{n+1} + a_n = 0,\ a_1 = \cos\alpha,\ a_2 = \cos 2\alpha.$$

Решение. Для начала найдём a_0:

$$a_n - 2\cos\alpha a_1 + a_0 = 0 \Rightarrow a_0 = 2\cos\alpha a_1 - a_2 = 2\cos^2\alpha - \cos 2\alpha = 1.$$

Характеристическим уравнением для заданной последовательности является

$$x^2 - 2x\cos\alpha + 1 = 0,$$

которое имеет два комплексно сопряжённых корня

$$\lambda_1 = \cos\alpha - i\sin\alpha, \qquad \lambda_2 = \cos\alpha + i\sin\alpha.$$

Случай комплексных корней: пример

Переходя в действительную область, получим последовательности

$$\widehat{\lambda}_1' = \{\cos n\alpha\}_{n\geqslant 0}, \qquad \widehat{\lambda}_2' = \{\sin n\alpha\}_{n\geqslant 0},$$

т.е. общее решение данного л.о.р.с. записывается в виде

$$a_n = \beta_1 \cos n\alpha + \beta_2 \sin n\alpha.$$

Из начальных условий получаем

$$\begin{cases} \beta_1 & = 1, \\ \beta_1 \cos\alpha + \beta_2 \sin\alpha & = \cos\alpha, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta_1 = 1, \\ \beta_2 = 0, \end{cases}$$

т.е. искомая л.р.п. есть $a_n = \cos n\alpha$.

Разделы

Нелинейные р.с.: основная теорема

В случае $C \neq 0$ соотношение

$$a_n + C_1 a_{n-1} + C_2 a_{n-2} + \ldots + C_k a_{n-k} = C$$

задаёт линейную неоднородную р.п.

Теорема

Общее решение $\overline{a}$ неоднородного л.р.с. представляется в виде суммы некоторого его частного решения $\overline{a}'$ и общего решения $\overline{a}^0$ соответствующего однородного соотношения: $\overline{a} = \overline{a}^0 + \overline{a}'$.

Доказательство

Пусть $\overline{a}'$ и $\overline{a}''$ — два частных решения неоднородного соотношения. Очевидно последовательность $\overline{a}' - \overline{a}''$ удовлетворяет соответствующему однородному соотношению.

Доказательство того, что любая такая сумма является решением, проводится аналогично.

Нелинейные р.с.: частные решения

Частное решение неоднородного р.с. можно, например, искать в виде постоянной последовательности $\overline{a}' = (a,\, a,\, \ldots)$.

Поскольку в этом случае $C_0 a + C_1 a + \ldots + C_k a = C$, то
1) при условии $C_0 + C_1 + \ldots + C_k \neq 0$ —

$$a \;=\; \frac{C}{C_0 + C_1 + \ldots + C_k}.$$

2) Если $\sum_{i=0}^{k} C_i = 0$, но $\sum_{i=1}^{k} iC_i \neq 0$, то существует частное решение вида $\overline{a}' = \{na\}_{n \geqslant 0}$, где константа a находится из уравнения

$$C_0 \cdot a \cdot n + C_1 \cdot a \cdot (n-1) + \ldots + C_k \cdot a \cdot (n-k) \;=\; C \qquad (\star)$$

(результат подстановки $a_n = an$ в н.л.р.с.).

Нелинейные р.с.: частные решения...

Поскольку $\sum_{i=0}^{k} C_i = 0$, то $C_0 = -C_1 - C_2 - \ldots - C_k$.
Подставив это значение в $(\star)$, получим

$$\frac{C}{a} = C_0 \cdot n + C_1 \cdot (n-1) + \ldots + C_k \cdot (n-k) =$$

$$= -C_1 n - C_2 n - \ldots - C_k n + (C_1 n - C_1) + \ldots + (C_k n - C_k k) = -\sum_{i=1}^{k} iC_i.$$

Отсюда $a = -C/(\sum_{i=1}^{k} iC_i)$ и частное решение неоднородного линейного рекуррентного соотношения в этом случае имеет вид

$$a'_n = \left\{ -\frac{n \cdot C}{\sum\limits_{i=1}^{k} iC_i} \right\}.$$

Нелинейные р.с.: пример

Пример (4)

Решить рекуррентное соотношение

$$a_{n+3} - 7a_{n+1} + 6a_n = 20, \; a_0 = 2, \; a_1 = -6, \; a_2 = 3.$$

Решение Характеристическое уравнение данного неоднородного л.р.с. есть:

$$x^3 - 7x + 6 = 0. \qquad (*)$$

Для его решения переберём делители свободного члена 6: $D(6) = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6.$

1. Убеждаемся, что $x_1 = 1$ — корень $(*)$.
Далее имеем $x^3 - 7x + 6 = (x+1)(x^2 + x - 6).$
Сумма корней квадратного трёхчлена $(x^2 + x - 6)$ равна -1, произведение $= -6$: корни суть $x_2 = 2, \; x_3 = -3.$

Нелинейные р.с.: пример... $a_{n+3} - 7a_{n+1} + 6a_n = 20$

Следовательно, общее решение однородного л.р.с.

$$a_{n+3} - 7a_{n+1} + 6a_n = 0$$

есть $a_n^0 = \beta_1(1)^n + \beta_2 2^n + \beta_3(-3)^n$.

2. Найдём частное решение $\overline{a}'$ исходного неоднородного л.р.с. Имеем: сумма его коэффициентов $1 - 7 + 6 = 0$, однако

$$\sum_{i=1}^{k} iC_i = 2 \cdot (-7) + 3 \cdot 6 = -14 + 18 = 4 \neq 0,$$

и поэтому частное решение исходного неоднородного л.р.с. —

$$a_n' = -\frac{n \cdot C}{\sum\limits_{i=1}^{k} iC_i} = -\frac{20n}{4} = -5n\,.$$

Нелинейные р.с.: пример... $a_{n+3} - 7a_{n+1} + 6a_n = 20$

Необязательная проверка полученного частного решения:

$$-5(n+3)+7\cdot 5(n+1)-6\cdot 5n = -15n-15+35n+35-30n = 20,$$

и общее решение $a_n = \beta_1 + \beta_2 2^n + \beta_3(-3)^n - 5n.$

3. Определим по начальным условиям множители β_1, β_2, β_3:

$$\begin{cases} \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 & = a_0 = 2, \\ \beta_1 + 2\beta_2 - 3\beta_3 - 5 & = a_1 = -6, \\ \beta_1 + 4\beta_2 + 9\beta_3 - 10 & = a_2 = 3, \end{cases}$$

Вычитаем из 2-го уравнения 1-е: $\beta_2 - 4\beta_3 = -3$, т.е. $\beta_2 = 4\beta_3 - 3$, что влечёт

$$\begin{cases} \beta_1 + 8\beta_3 - 6 - 3\beta_3 & = -1, \\ \beta_1 + 16\beta_3 - 12 + 9\beta_3 & = 17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta_1 + 5\beta_3 & = 5, \\ \beta_1 + 25\beta_3 & = 25 \end{cases}$$

Вычитая из 2-го уравнения 1-е: $20\beta_3 = 20 \Rightarrow \beta_3 = 1$ и $\beta_1 = 0$.

Ответ: $a_n = 2^n + (-3)^n - 5n.$

Разделы

Задача РП-1

Найти решение о.л.р.с. $a_{n+2} + 3a_n = 0,\ a_0 = 1,\ a_1 = 2\sqrt{3}.$

Решение Характеристическое уравнение

$$x^2 + 3 = 0$$

имеет комплексно сопряжённые корни $\lambda_1 = -i\sqrt{3},\ \lambda_1 = i\sqrt{3}.$
Им соответствует общее решение

$$a_n = \beta_1 3^{\frac{n}{2}} \cos\frac{\pi n}{2} + \beta_2 3^{\frac{n}{2}} \sin\frac{\pi n}{2} = 3^{\frac{n}{2}} \left(\beta_1 \cos\frac{\pi n}{2} + \beta_2 \sin\frac{\pi n}{2}\right).$$

Найдём β_1, β_2:

$$\begin{cases} \beta_1 & = 1, \\ \sqrt{3}\beta_2 & = 2\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \beta_2 = 2.$$

Ответ: $a_n = 3^{\frac{n}{2}} \left(\cos\frac{\pi n}{2} + 2\sin\frac{\pi n}{2}\right)$

Задача РП-2

Найти общее решение о.л.р.с. $a_{n+2} + 3a_{n+1} + a_n = 0$.

<u>Решение</u> Характеристическое уравнение

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

один вещественный корень $\lambda = -1$ кратности 2.
Т.о. решение есть

$$a_n = (-1)^n (\beta_1 + \beta_2 n)$$

Задача РП-3

Найти общее решение о.л.р.с.

$$a_{n+3} + 10a_{n+2} + 32a_{n+1} + 32a_n \ = \ 0.$$

<u>Решение</u> Характеристическое уравнение есть

$$P(x) \ = \ x^3 + 10x^2 + 32x + 32 \ = \ 0.$$

Пробуем подобрать корень из делителей
$32 : \ \pm 1, \ \pm 2, \ \pm 4, \ \ldots, \ \pm 32.$

Имеем $P(\pm 1) = \pm 1 + 10 \pm 32 + 32 \neq 0,$
$P(\pm 2) = \pm 8 + 40 + \pm 64 + 32$ и $P(-2) = 0.$
Далее —
$x^3 + 10x^2 + 32x + 32 \ = \ (x+2)(x^2 + 8x + 16) \ = \ (x+2)(x+4)^2,$

т.е. $P(x)$ имеет корень -2 кратности 1 и -4 кратности $2.$

Поэтому решение есть

$a_n \ = \ \beta_1(-2)^n + (\beta_2 + \beta_3 n)(-4)^n \ = \ (-2)^n \left(\beta_1 + (\beta_2 + \beta_3 n)2^n\right).$

Задача РП-4

Найти общий член рекуррентной последовательности, удовлетворяющей соотношению

$$a_{n+2} = 6a_{n+2} - 8a_n + 6n + 1, \quad a_0 = 4,\ a_1 = 5.$$

Решение Представим соотношение в виде

$$a_{n+2} - 6a_{n+2} + 8a_n = 6n + 1.$$

Характеристическое уравнение есть

$$P(x) = x^2 - 6x + 8 = 0,$$

его корни суть $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 4$ и общее решение соответствующего о.л.р.с. есть

$$a_n^0 = \beta_1 2^n + \beta_2 4^n$$

Задача РП-4...

Поскольку характеристический полином — 2-го порядка, справа — полином 1-й степени, частное решение будем искать в виде $a'_n = \alpha_1 n + \alpha_0$.

Подставляя a'_n в исходное соотношение, получим

$$\begin{aligned}(\alpha_1(n+2)+\alpha_0) - 6\,(\alpha_1(n+1)+\alpha_0) + 8\,(\alpha_1 n+\alpha_0) &= \\ = \alpha_1 n + 2\alpha_1 + \alpha_0 - 6\alpha_1 n - 6\alpha_1 - 6\alpha_0 + 8\alpha_1 n + 8\alpha_0 &= \\ = 3\alpha_1 n + (2\alpha_1 + \alpha_0 - \alpha_1 - 6\alpha_0 + 8\alpha_0) &= 6n+1,\end{aligned}$$

Откуда $\alpha_1 = 2,\ -4\alpha_1 + 3\alpha_0 = -8 + 3\alpha_0 = 1 \Rightarrow \alpha_0 = 3$ и $a'_n = 2n+3$.

Получено общее решение $a_n = \beta_1 2^n + \beta_2 4^n + 2n + 3$.

Задача РП-4...

$$\underline{a_{n+2} = 6a_{n+2} - 8a_n + 6n + 1, \quad a_0 = 4, a_1 = 5}$$

$$a_n = \beta_1 2^n + \beta_2 4^n + 2n + 3$$

Найдём коэффициенты β_1, β_2:

$$\begin{cases} \beta_1 & +\beta_2 & +3 & = 4 \\ 2\beta_1 & +4\beta_2 & +5 & = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta_1 & +\beta_2 & = 1 \\ 2\beta_1 & +4\beta_2 & = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta_1 = 2 \\ \beta_2 = -1 \end{cases}$$

<u>Ответ</u>: $a_n = 2^{n+1} - 4^n + 2n + 3.$

Задача РП-5

Решить рекуррентное соотношение

$$a_{n+3} - 6a_{n+2} + 11a_{n+1} - 6a_n = 4n,\ a_0 = 1,\ a_1 = 3,\ a_2 = 4.$$

Решение Характеристическое уравнение есть

$$P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0.$$

Пробуем подобрать корень из делителей $6 : \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6.$
Находим, что $x_1 = 1$ — корень,

$$P(x) = (x-1)(x^2 - 5x + 6)$$

и $x_2 = 2$, также корни $x_3 = 3$ характеристического уравнения.
Т.о. общее решение однородного соотношения есть

$$a_n^0 = \beta_1 + \beta_2 2^n + \beta_3 3^n.$$

Задача РП-5...

Частное решение ищем в виде $a'_n = n(\alpha_1 n + \alpha_2)$.

Подставляя его в исходное соотношение

$$\alpha_1(n+3)^2 + \alpha_2(n+3) - 6\left[\alpha_1(n+2)^2 + \alpha_2(n+2)\right] + \\ + 11\left[\alpha_1(n+1)^2 + \alpha_2(n+1)\right] - 6[\alpha_1 n^2 + \alpha_2 n] = 4n$$

Приравниваем коэффициенты перед степенями n:

$$n^2 : \alpha_1(1 - 6 + 11 - 6) = 0;$$

$$n^1 : 6\alpha_1 + \alpha_2 - 24\alpha_1 - 6\alpha_2 + 22\alpha_1 + 11\alpha_2 - 6\alpha_2 = 4\alpha_1 = 4n,$$

откуда $\alpha_1 = 1$;

$$1 : 9\alpha_1 + 3\alpha_2 - 24\alpha_1 - 12\alpha_2 + 11\alpha_1 + 11\alpha_2 = -4\alpha_1 + 2\alpha_2,$$

откуда $\alpha_2 = 2$.

Т.е. $a'_n = n^2 + 2n$.

Задача РП-5...

Определяем теперь константы β_1 и β_2 исходя из Н.У:

$$\left\{\begin{array}{ll} \beta_1+\beta_2+\beta_3+0 & = 1, \\ \beta_1+2\beta_2+3\beta_3+3 & = 3, \\ \beta_1+4\beta_2+9\beta_3+8 & = 4, \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} \beta_1 & = 1, \\ \beta_2 & = 1, \\ \beta_3 & = -1. \end{array}\right.$$

Окончательно имеем $a_n = 1+2^n-3^n+n(n+2)$.

Задача РП-6

Решить рекуррентное соотношение

$$a_{n+1} - a_n = n, \qquad a_1 = 1.$$

Решение Легко видеть, что $a_0 = 1$.
Характеристическое уравнение для данного соотношения есть $x - 1 = 0$ и оно имеет корень $x = 1$, откуда общее решение однородного соотношения есть $a_n^0 = \beta$.
Частное решение ищем в виде $a_n' = n(\alpha_1 n + \alpha_2)$.
Подставляя его в исходное соотношение, имеем

$$\alpha_1(n+1)^2 + \alpha_2(n+1) - \alpha_1 n^2 - \alpha_2 n = n,$$

откуда $\alpha_1 = 1/2$ и $\alpha_1 = -1/2$, т.е. $a_n' = (n^2 - n)/2$ и $a_n = \beta + (n^2 - n)/2$.
Из начальных условий: $a_0 = \beta = 1$ и окончательно —

$$a_n = 1 + C_n^2.$$

Задача РП-7

Решить рекуррентное соотношение

$$a_{n+2} + 2a_{n+1} - 8a_n = 27 \cdot 5^n, \quad a_1 = -9, a_2 = 45.$$

Решение Определяем, что $a_2 + 2a_1 - 8a_0 = 27 \Rightarrow a_0 = 0$.

Характеристическое уравнение для данного соотношения есть $x^2 + 2x - 8 = 0$ и оно имеет корни $x_1 = -4$ и $x_2 = 2$, откуда общее решение однородного соотношения есть $a_n^0 = \beta_1(-4)^n + \beta_2 \cdot 2^n$.

Частное решение ищем в виде $a_n' = \alpha \cdot 5^n$.

Подставляя его в исходное соотношение, имеем

$$\alpha \cdot 25 \cdot 5^n + 2\alpha \cdot 5 \cdot 5^n - 8 \cdot 5^n = 27 \cdot 5^n,$$

откуда $\alpha(35 - 8) = 27$ и $\alpha = 1$, т.е.
$a_n = \beta_1(-4)^n + \beta_2 \cdot 2^n + 5^n$.

Из начальных условий находим, что $\beta_1 = 2$, $\beta_2 = -3$ и окончательно — $a_n = 2 \cdot (-4)^n - 3 \cdot 2^n + 5^n$.

Задача РП-8

Решить систему линейных рекуррентных соотношений

$$\begin{cases} a_{n+1} &= -b_n + n, \\ b_{n+1} &= a_n + 2b_n + 1, \\ & a_0 = 1,\ b_0 = -2. \end{cases}$$

Решение Сразу находим, что $b_1 = -2$.
Далее, выражая из второго уравнения $b_{n+2} = a_{n+1} + 2b_{n+1} + 1$ и подставляя туда $a_{n+1} = -b_n + n$, получаем л.р.с. относительно b_n:

$$b_{n+2} - 2b_{n+1} + b_n = n + 1.$$

Его характеристическое уравнение $x^2 - 2x + 1 = 0$ имеет корень $x = 1$ кратности 2, поэтому общее решение соотношения есть $b_n^0 = \beta_1 + \beta_2 n$, а частное можно искать в виде $b_n' = n^2(\alpha_1 n + \alpha_2) = \alpha_1 n^3 + \alpha_2 n^2$.

Задача РП-8...

Подставляя выражение для b_n в исходное соотношение, находим $\alpha_1 = 1/6$, $\alpha_2 = 0$, и т.о. $b_n = \beta_1 + \beta_2 + n^2/6$.

Используя Н.У. на b_n, получим $\beta_1 = -2$, $\beta_2 = -1/6$.

Итого решение —

$$b_n = -2 - \frac{n}{6} + \frac{n^3}{6},$$

$$a_n = 2 + \frac{7(n-1)}{6} - \frac{(n-6)^3}{6} = 1 + \frac{2}{3}n + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{6}n^3.$$

Задача РП-9

Дано $u_0 = 0,\ u_1 = 1,\ u_{k+2} - u_{k+1} - 2u_k + 4 = 0.$
Найти явное выражение для u_k.

<u>Решение</u>. Характеристическое уравнение: $x^2 - x - 2 = 0$
$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1 \Rightarrow u_n^0 = \beta_1 \cdot 2^n + \beta_2 \cdot (-1)^n.$
Ищем частное решение $u'_n = a = const$ —
$a = 3a - 4 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow u'_n = 2$
$u_n = \beta_1 \cdot 2^n + \beta_2 \cdot (-1)^n + 2$

$$\begin{cases} u_0 = \beta_1 + \beta_2 + 2 = 0 \\ u_1 = 2\beta_1 - \beta_2 + 2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta_1 + \beta_2 = -2 \\ 2\beta_1 - \beta_2 = -1 \end{cases}$$

$3\beta_1 = -3 \Rightarrow \beta_1 = -1 \Rightarrow \beta_2 = -1.$

<u>Решение</u>: $u_n = -2^n - (-1)^n + 2$