Прикладная статистика 2. Параметрическая проверка гипотез.

Рябенко Евгений
riabenko.e@gmail.com

17 февраля 2014 г.

О нормальном распределении

Благодаря центральной предельной теореме и удобству вывода критериев для нормально распределённых выборок методы, основанные на предположении о нормальности данных, наиболее широко распространены.

- Если принять предположение о нормальности, то можно применять более мощные критерии. Зачастую они также чувствительны к небольшим отклонениям от нормальности.
- Перед использованием методов, предполагающих нормальность, стоит проверить нормальность.
- Если гипотеза нормальности отвергается, следует использовать непараметрические методы.

Критерий Жарка-Бера

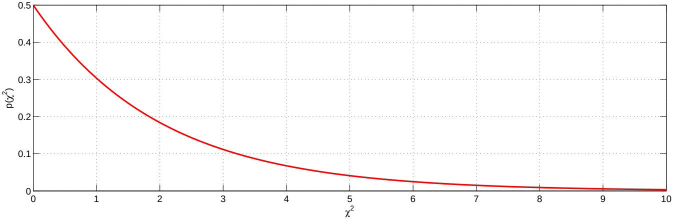
выборка: $X^n = (X_1, \dots, X_n)$;

нулевая гипотеза: $H_0\colon X_i \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$;

альтернатива: $H_1\colon H_0$ неверна;

статистика: $\chi^2\left(X^n\right) = \frac{n}{6}\left(g_1^2 + \frac{1}{4}g_2^2\right)$;

$\chi^2\left(X^n\right) \sim \chi_2^2$ при H_0;



достигаемый уровень значимости:

$$p\left(\chi^2\right) = 1 - chi2cdf\left(\chi^2, 2\right).$$

Критерий Шапиро-Уилка

выборка: $X^n = (X_1, \dots, X_n)$;

нулевая гипотеза: $H_0\colon X_i \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$;

альтернатива: $H_1\colon H_0$ неверна;

статистика: $W\left(X^n\right) = \dfrac{\left(\sum\limits_{i=1}^n a_i X_{(i)}\right)^2}{\sum\limits_{i=1}^n \left(X_i - \bar{X}\right)^2}$,

$(a_1, \dots, a_n) = \dfrac{m^T V^{-1}}{\left(m^T V^{-1} V^{-1} m\right)}$,

$m = (m_1, \dots, m_n)^T$ — матожидания порядковых статистик $N(0,1)$, V — их ковариационная матрица;

$W\left(X^n\right)$ при H_0 имеет табличное распределение.

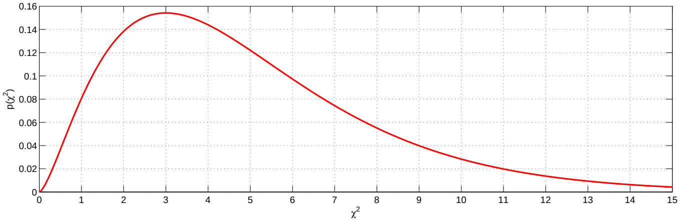
Значения a_i также табулированы.

Критерий согласия Пирсона (хи-квадрат)

$$
\begin{aligned}
\text{выборка:}\quad & X^n = (X_1, \ldots, X_n);\\
\text{нулевая гипотеза:}\quad & H_0\colon X_i \sim N\left(\mu, \sigma^2\right);\\
\text{альтернатива:}\quad & H_1\colon H_0 \text{ неверна};\\
\text{статистика:}\quad & \chi^2\left(X^n\right) = \sum_{i=1}^{K} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i};\\
& \chi^2\left(X^n\right) \sim \begin{cases} \chi^2_{K-1}, & \text{если } \mu, \sigma \text{ заданы},\\ \chi^2_{K-3}, & \text{если } \mu, \sigma \text{ оцениваются по выборке} \end{cases}\\
& \quad\text{при } H_0;
\end{aligned}
$$

K — число карманов гистограммы,
$[a_i, a_{i+1}]$ — i-й интервал,
n_i — число элементов выборки в i-м интервале,
$p_i = \Phi\left(a_{i+1}\right) - \Phi\left(a_i\right)$ — теоретическая вероятность попадания наблюдения в i-й интервал.

Критерий согласия Пирсона (хи-квадрат)



достигаемый уровень значимости:

$$p\left(\chi^2\right) = \begin{cases} 1 - chi2cdf\left(\chi^2, K-1\right), & \text{если } \mu, \sigma \text{ заданы,} \\ 1 - chi2cdf\left(\chi^2, K-3\right), & \text{если } \mu, \sigma \text{ оцениваются по выборке.} \end{cases}$$

Недостатки:

- требует больших выборок;
- разбиение на интервалы неоднозначно.

Критерий согласия, основанные на функции распределения

Ряд критериев согласия основаны на различиях между $F(x)$ и $F_n(x)$:

- Джини:
$$\int |F_n(x) - F(x)|\, dx;$$
- Крамера-фон Мизеса:
$$\int (F_n(x) - F(x))^2\, dx;$$
- Колмогорова-Смирнова:
$$\sup_{-\infty<x<\infty} |F_n(x) - F(x)|\,;$$
- Смирнова-Крамера-фон Мизеса:
$$\int (F_n(x) - F(x))^2\, dF(x)\,;$$

Критерий согласия, основанные на функции распределения

- Андерсона-Дарлинга:

$$\int \frac{\left(F_n\left(x\right) - F\left(x\right)\right)^2}{F\left(x\right)\left(1 - F\left(x\right)\right)} dF\left(x\right);$$

- Купера:

$$\sup_{-\infty<x<\infty} \left(F_n\left(x\right) - F\left(x\right)\right) + \sup_{-\infty<x<\infty} \left(F\left(x\right) - F_n\left(x\right)\right);$$

- Ватсона:

$$\int \left(F_n\left(x\right) - F\left(x\right) - \int \left(F_n\left(x\right) - F\left(x\right)\right) dF\left(x\right)\right) dF\left(x\right);$$

- Фроцини:

$$\int \left|F_n\left(x\right) - F\left(x\right)\right| dF\left(x\right).$$

Предполагается, что $F\left(x\right)$ известна с точностью до параметров (если они оцениваются по выборке, нулевое распределение корректируется).

Критерий Колмогорова-Смирнова (Лиллиефорса)

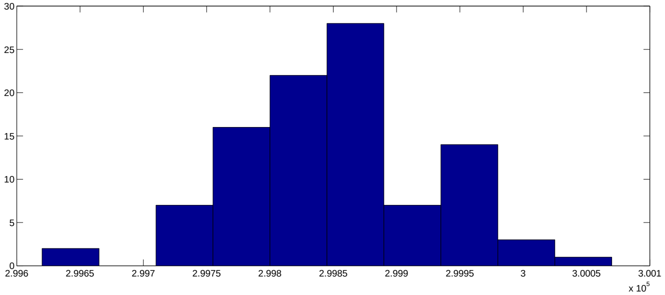
выборка: $X^n = (X_1, \dots, X_n)$;
нулевая гипотеза: $H_0 \colon X_i \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$;
альтернатива: $H_1 \colon H_0$ неверна;
статистика: $D\left(X^n\right) = \sup\limits_{-\infty<x<\infty} \left|F_n(x) - \Phi(x)\right|$;
$D\left(X^n\right)$ при H_0 имеет табличное распределение.

Недостатки:

- требует крайне больших выборок (для проверки с $\alpha = 0.01$ — $n \approx 2000$);
- не чувствителен к различиям на хвостах распределений.

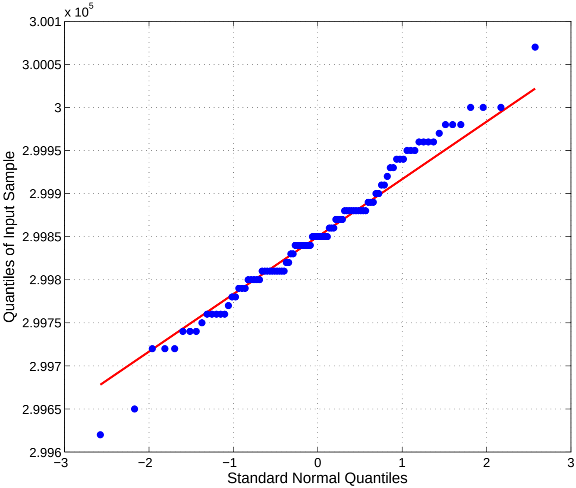
Измерения скорости света

Данные классического эксперимента Михельсона по измерению скорости света (1879), 100 наблюдений.



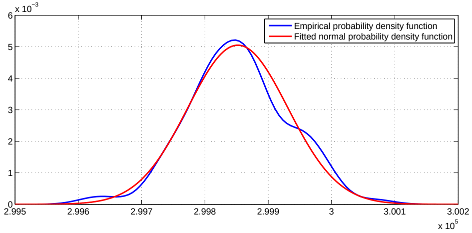
Подчиняются ли измерения нормальному распределению?

Измерения скорости света

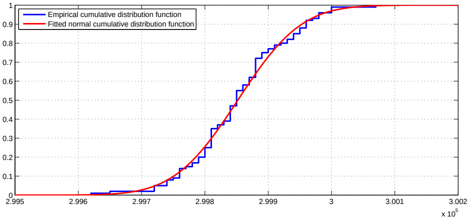


Q-Q plot (для нормального распределения называется также normal probability plot)

Измерения скорости света



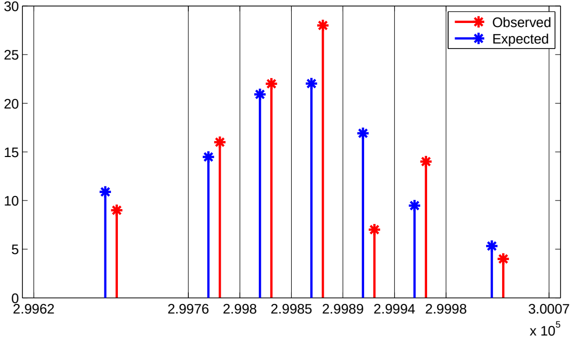
Оценки плотности вероятности



Оценки функции распределения

Измерения скорости света

Критерий хи-квадрат: $p = 0.0333$.



Чему равно число степеней свободы?

Критерий Колмогорова-Смирнова (Лиллиефорса): $p = 0.0860$.
Критерий Жарка-Бера: $p = 0.5$ / $p = 0.8533$.
Критерий Крамера-фон Мизеса: $p = 0.2227$.
Критерий Шапиро-Уилка: $p = 0.5138$.

Итого о проверке нормальности

- **очень маленькие выборки**: любой критерий может пропустить отклонения от нормальности, графические методы бесполезны;
- **очень большие выборки**: любой критерий может выявлять небольшие статистически, но не практически значимые отклонения от нормальности; значительная часть методов, предполагающих нормальность, демонстрируют устойчивость к отклонениям;
- **выбросы**: сильно влияют на выборочные коэффициенты асимметрии и эксцесса;
- **критерий Колмогорова-Смирнова (Лиллиефорса)**: представляет только исторический интерес (Agostino, Goodness-of-fit techniques);
- **критерий хи-квадрат**: слишком общий, не самый мощный, потеря информации из-за разбиения на интервалы.

Итого о проверке нормальности

Сравнение критериев проверки нормальности распределения случайных величин

Наименование критерия (раздел)	Характер альтернативного распределения					Ранг
	асимметричное		симметричное		≈ нормальное	
	$\alpha_4 < 3$	$\alpha_4 > 3$	$\alpha_4 < 3$	$\alpha_4 > 3$	$\alpha_4 \approx 3$	
Критерий Шапиро–Уилка (3.2.2.1)	1	1	3	2	2	1
Критерий K^2 (3.2.2.16)	7	8	10	6	4	2
Критерий Дарбина (3.1.2.7)	11	7	7	15	1	3
Критерий Д'Агостино (3.2.2.14)	12	9	4	5	12	4
Критерий α_4 (3.2.2.16)	14	5	2	4	18	5
Критерий Васичека (3.2.2.2)	2	14	8	10	10	6
Критерий Дэвида–Хартли–Пирсона (3.2.2.10)	21	2	1	9	1	7
Критерий χ^2 (3.1.1.1)	9	20	9	8	3	8
Критерий Андерсона–Дарлинга (3.1.2.4)	18	3	5	18	7	9
Критерий Филлибена (3.2.2.5)	3	12	18	1	9	10
Критерий Колмогорова–Смирнова (3.1.2.1)	16	10	6	16	5	11
Критерий Мартинеса–Иглевича (3.2.2.14)	10	16	13	3	15	12
Критерий Лина–Мудхолкара (3.2.2.13)	4	15	12	12	16	13
Критерий α_3 (3.2.2.16)	8	6	21	7	19	14
Критерий Шпигельхальтера (3.2.2.11)	19	13	11	11	8	15
Критерий Саркади (3.2.2.12)	5	18	15	14	13	16
Критерий Смирнова–Крамера–фон Мизеса (3.1.2.2)	17	11	20	17	6	17
Критерий Локка–Спурье (3.2.2.7)	13	4	19	21	17	18
Критерий Оя (3.2.2.8)	20	17	14	13	14	19
Критерий Хегази–Грина (3.2.2.3)	6	19	16	19	21	20
Критерий Муроты–Такеучи (3.2.2.17)	15	21	17	20	20	21

Кобзарь, Прикладная математическая статистика, 2006.

Виды задач: одновыборочные

- $X^n \sim N(\mu, \sigma^2)$
  - $H_0\colon \mu = \mu_0$
    - σ известна 1
    - σ неизвестна 3
  - $H_0\colon \sigma = \sigma_0$ 2

Виды задач: двухвыборочные

- $X_1^{n_1} \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), \quad X_2^{n_2} \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$
  - $H_0\colon \mu_1 = \mu_2$
    - X_1, X_2 независимые
      - $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$
        - σ известна 4
        - σ неизвестна 5
      - $\sigma_1 \neq \sigma_2$
        - σ_1, σ_2 известны 6
        - σ_1, σ_2 неизвестны 7
    - X_1, X_2 связанные 8
  - $H_0\colon \sigma_1 = \sigma_2$ 9

1 Z-критерий

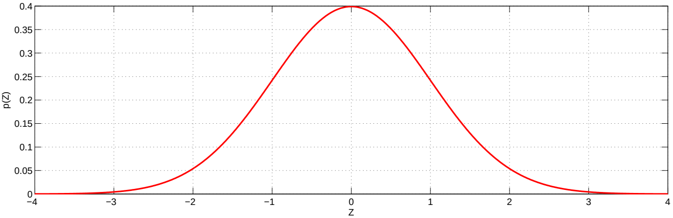
выборка: $X^n = (X_1, \dots, X_n), X_i \sim N(\mu, \sigma^2), \sigma$ известна;

нулевая гипотеза: $H_0\colon \mu = \mu_0$;

альтернатива: $H_1\colon \mu <\neq> \mu_0$;

статистика: $Z(X^n) = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$;

$Z(X^n) \sim N(0,1)$ при H_0;



достигаемый уровень значимости:

$$p(z) = \begin{cases} 1 - ncdf(z, 0, 1), & H_1\colon \mu > \mu_0, \\ ncdf(z, 0, 1), & H_1\colon \mu < \mu_0, \\ 2\left(1 - ncdf(|z|, 0, 1)\right), & H_1\colon \mu \neq \mu_0. \end{cases}$$

Z-критерий

Пример: линия по производству пудры должна обеспечивать средний вес пудры в упаковке 4 грамма, заявленное стандартное отклонение 1 грамм. В ходе инспекции выбрано 9 упаковок, средний вес продукта в них составляет 4.6 грамма.

H_0: средний вес пудры в упаковке соответствует норме.
H_1: средний вес пудры в упаковке не соответствует норме $\Rightarrow p = 0.0719$.
H_1: средний вес пудры в упаковке превышает норму $\Rightarrow p = 0.0359$.

2 Критерий хи-квадрат

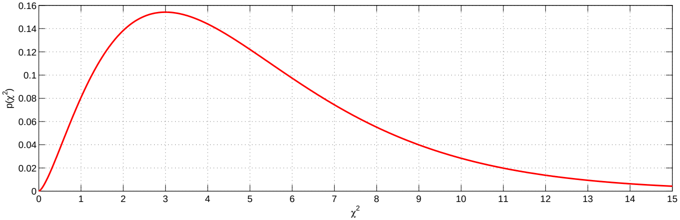
выборка: $X^n = (X_1, \dots, X_n)\,, X_i \sim N\left(\mu, \sigma^2\right);$

нулевая гипотеза: $H_0\colon \sigma = \sigma_0;$

альтернатива: $H_1\colon \sigma <\neq> \sigma_0;$

статистика: $\chi^2\left(X^n\right) = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2};$

$\chi^2\left(X^n\right) \sim \chi^2_{n-1}$ при $H_0;$



достигаемый уровень значимости:

$$p\left(\chi^2\right) = \begin{cases} 1 - chi2cdf(\chi^2, n-1), & H_1\colon \sigma > \sigma_0, \\ chi2cdf(\chi^2, n-1), & H_1\colon \sigma < \sigma_0, \\ 2\min\left(1 - chi2cdf(\chi^2, n-1), chi2cdf(\chi^2, n-1)\right), & H_1\colon \sigma \neq \sigma_0. \end{cases}$$

2 Критерий хи-квадрат

Пример: при производстве микрогидравлической системы делается инъекция жидкости. Дисперсия объёма жидкости критически важный параметр, установленный стандартом на уровне 9 кв.мл. В выборке из 25 микрогидравлических систем дисперсия объёма жидкости составляет 12 кв.мл.

$H_0:$ дисперсия объёма жидкости в выборке соответствует стандарту.
$H_1:$ дисперсия объёма жидкости в выборке не соответствует стандарту $\Rightarrow p = 0.254$.
$H_1:$ дисперсия объёма жидкости в выборке превышает допустимое значение $\Rightarrow p = 0.127$.

3 t-критерий Стьюдента

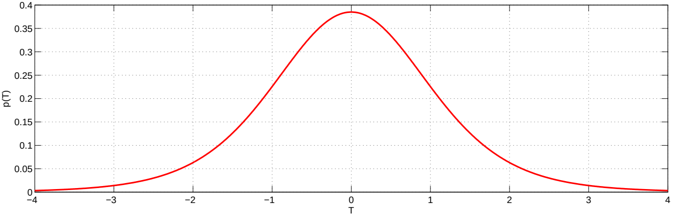
выборка: $X^n = (X_1, \dots, X_n)\,, X_i \sim N\left(\mu, \sigma^2\right), \sigma$ неизвестна;

нулевая гипотеза: $H_0\colon \mu = \mu_0;$

альтернатива: $H_1\colon \mu <\neq> \mu_0;$

статистика: $T\left(X^n\right) = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}};$

$T\left(X^n\right) \sim St(n-1)$ при $H_0;$



достигаемый уровень значимости:

$$p\left(t\right) = \begin{cases} 1 - tcdf(t, n-1), & H_1\colon \mu > \mu_0, \\ tcdf(t, n-1), & H_1\colon \mu < \mu_0, \\ 2\left(1 - tcdf(|t|, n-1)\right), & H_1\colon \mu \neq \mu_0. \end{cases}$$

3 t-критерий Стьюдента

Пример: в выборке из 9 пластиковых гаек средний диаметр составляет 3.1 см, стандартное отклонение — 1 см. Предполагается, что стандартный диаметр для таких гаек — 4 см.

$H_0:$ средний диаметр гаек в выборке соответствует стандарту.
$H_1:$ средний диаметр гаек в выборке не соответствует стандарту
$\Rightarrow p = 0.0271.$

Z-критерий

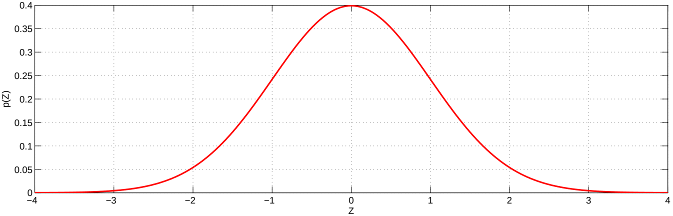
выборки: $X_1^{n_1} = (X_{11}, \dots, X_{1n_1})\,, X_{1i} \sim N\left(\mu_1, \sigma^2\right),$
$X_2^{n_2} = (X_{21}, \dots, X_{2n_2})\,, X_{2i} \sim N\left(\mu_2, \sigma^2\right), \sigma$ известна;

нулевая гипотеза: $H_0\colon \mu_1 = \mu_2;$

альтернатива: $H_1\colon \mu_1 <\neq> \mu_2;$

статистика: $Z\left(X_1^{n_1}, X_2^{n_2}\right) = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}};$

$Z\left(X_1^{n_1}, X_2^{n_2}\right) \sim N(0,1)$ при H_0;



достигаемый уровень значимости:

$$p(z) = \begin{cases} 1 - ncdf(z,0,1), & H_1\colon \mu_1 > \mu_2, \\ ncdf(z,0,1), & H_1\colon \mu_1 < \mu_2, \\ 2\left(1 - ncdf(|z|,0,1)\right), & H_1\colon \mu_1 \neq \mu_2. \end{cases}$$

4 Z-критерий

Пример: два отдела сбыта сравниваются по коэффициенту результативности при выполнении схожих операций. В первом отделе на 9 операциях среднее значение коэффициента результативности составило 1.2, во втором на 16 операциях — 1.7. Дисперсии коэффициента результативности в обоих отделах равны 2.075.

H_0: средняя результативность в обоих отделах одинакова.
H_1: средняя результативность в двух отделах различается $\Rightarrow p = 0.405$.
H_1: средняя результативность второго отдела выше $\Rightarrow p = 0.202$.

5 t-критерий Стьюдента

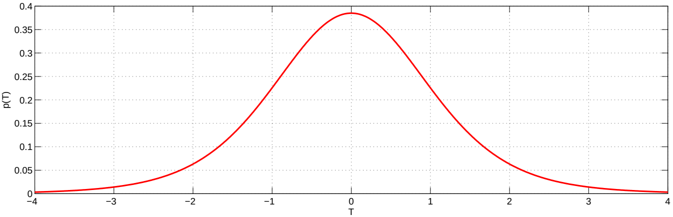
выборки: $X_1^{n_1} = (X_{11}, \ldots, X_{1n_1}), X_{1i} \sim N(\mu_1, \sigma^2),$
$X_2^{n_2} = (X_{21}, \ldots, X_{2n_2}), X_{2i} \sim N(\mu_2, \sigma^2), \sigma$ неизвестна;

нулевая гипотеза: $H_0: \mu_1 = \mu_2;$

альтернатива: $H_1: \mu_1 <\neq> \mu_2;$

статистика: $T(X_1^{n_1}, X_2^{n_2}) = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{S\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}, \quad S = \sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}};$

$T(X_1^{n_1}, X_2^{n_2}) \sim St(n_1 + n_2 - 2)$ при $H_0;$



достигаемый уровень значимости:

$$p(t) = \begin{cases} 1 - tcdf(t, n_1 + n_2 - 2), & H_1: \mu_1 > \mu_2, \\ tcdf(t, n_1 + n_2 - 2), & H_1: \mu_1 < \mu_2, \\ 2\left(1 - tcdf(|t|, n_1 + n_2 - 2)\right), & H_1: \mu_1 \neq \mu_2. \end{cases}$$

5 t-критерий Стьюдента

Пример: чипсы продаются в тридцатиграммовых пакетах двух разновидностей. В выборке из 12 пачек каждого вида средние веса равны 31.75 г и 28.67 г, дисперсии – 112.25 г^2 и 66.64 г^2.

H_0: количество чипсов в упаковках двух разновидностей совпадает.
H_1: количество чипсов в упаковках двух разновидностей различается
$\Rightarrow p = 0.433$.

6 Z-критерий

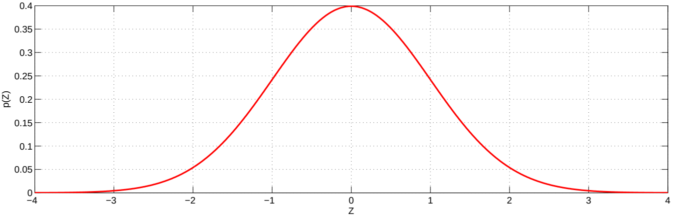
выборки: $X_1^{n_1} = (X_{11}, \dots, X_{1n_1}), X_{1i} \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), \sigma_1$ известна,
$X_2^{n_2} = (X_{21}, \dots, X_{2n_2}), X_{2i} \sim N(\mu_2, \sigma_2^2), \sigma_2$ известна;

нулевая гипотеза: $H_0\colon \mu_1 = \mu_2$;

альтернатива: $H_1\colon \mu_1 <\neq> \mu_2$;

статистика: $Z(X_1^{n_1}, X_2^{n_2}) = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$;

$Z(X_1^{n_1}, X_2^{n_2}) \sim N(0,1)$ при H_0;



достигаемый уровень значимости:

$$p(z) = \begin{cases} 1 - ncdf(z, 0, 1), & H_1\colon \mu_1 > \mu_2, \\ ncdf(z, 0, 1), & H_1\colon \mu_1 < \mu_2, \\ 2\left(1 - ncdf(|z|, 0, 1)\right), & H_1\colon \mu_1 \neq \mu_2. \end{cases}$$

6 Z-критерий

Пример: известно, что одна из линий по расфасовке чипсов даёт упаковки с более вариабельным весом продукта, чем вторая. Дисперсии равны 0.000576 г^2 и 0.001089 г^2 соответственно, средние значения веса в выборках из 13 и 8 элементов — 80.02 г и 79.98 г.

H_0: средний вес продукта в упаковках, произведённых на двух линиях, совпадает.
H_1: средние веса продукта в упаковках, произведённых на двух линиях, различаются $\Rightarrow p = 0.001.$

7 t-критерий Стьюдента / Аспина-Уэлша (проблема Беренца-Фишера)

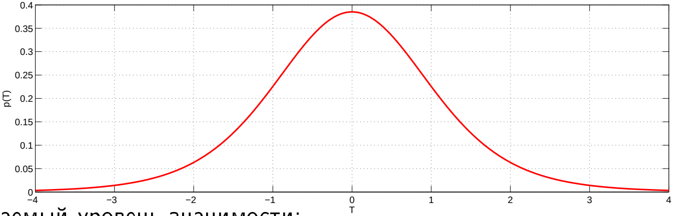
выборки: $X_1^{n_1} = (X_{11}, \ldots, X_{1n_1}), X_{1i} \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), \sigma_1$ неизвестна,
$X_2^{n_2} = (X_{21}, \ldots, X_{2n_2}), X_{2i} \sim N(\mu_2, \sigma_2^2), \sigma_2$ неизвестна;

нулевая гипотеза: $H_0\colon \mu_1 = \mu_2$;

альтернатива: $H_1\colon \mu_1 <\neq> \mu_2$;

статистика: $T(X_1^{n_1}, X_2^{n_2}) = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}, \quad \nu = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{S_1^4}{n_1^2(n_1-1)} + \frac{S_2^4}{n_2^2(n_2-1)}}$;

$T(X_1^{n_1}, X_2^{n_2}) \approx\sim St(\nu)$ при H_0;



достигаемый уровень значимости:

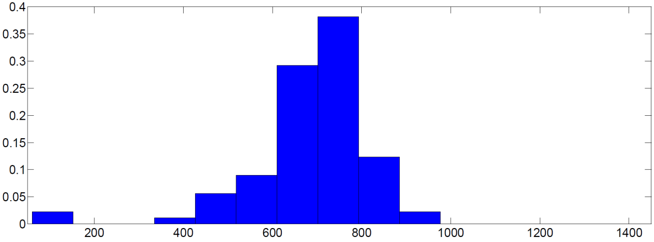
$$p(t) = \begin{cases} 1 - tcdf(t, \nu), & H_1\colon \mu_1 > \mu_2, \\ tcdf(t, \nu), & H_1\colon \mu_1 < \mu_2, \\ 2\left(1 - tcdf(|t|, \nu)\right), & H_1\colon \mu_1 \neq \mu_2. \end{cases}$$

7 t-критерий Стьюдента / Аспина-Уэлша (проблема Беренца-Фишера)

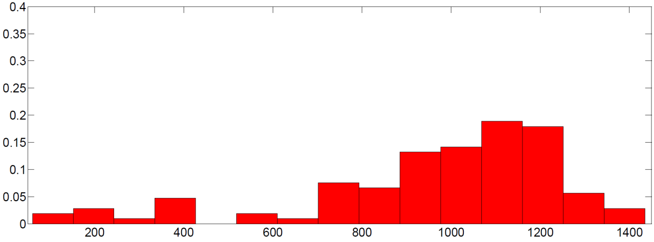
Пример: (Walford and Weindruch, 1988, The Retardation of Aging and Disease by Dietary Restriction) в исследовании принимало участие 194 крысы. 105 из них держали на строгой диете, оставшиеся 89 — на диете ad libitum.
Имеющиеся данные: продолжительность жизни крыс в каждой из групп.

Вопрос: влияет ли диета на продолжительность жизни?

7 t-критерий Стьюдента / Аспина-Уэлша (проблема Беренца-Фишера)

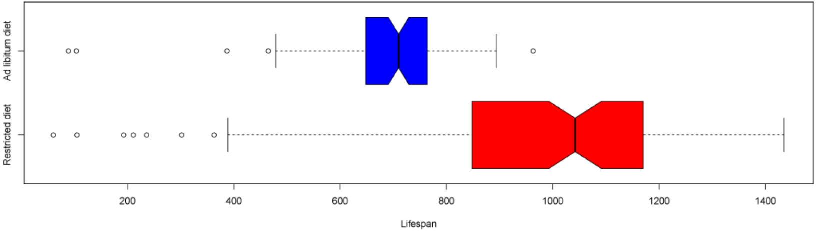


Продолжительность жизни крыс на диете ad libitum $(n = 89)$



Продолжительность жизни крыс на строгой диете $(n = 105)$

7 t-критерий Стьюдента / Аспина-Уэлша (проблема Беренца-Фишера)



Ящик с усами (boxplot)

От центра к краям:

- медиана;
- 95% доверительный интервал для медианы;
- квартили;
- точки данных, ближайшие (изнутри) к концу отрезка длиной $1.5 \times IQR$ (Tukey boxplot);
- точки, не попадающие в этот интервал.

7 t-критерий Стьюдента / Аспина-Уэлша (проблема Беренца-Фишера)

H_0: продолжительность жизни крыс не меняется при ограничении диеты.

H_1: крысы на строгой диете живут дольше.
Применяем критерий Стьюдента для двух выборок с неизвестными неравными дисперсиями: $p = 2 \times 10^{-15}$; нижний 95% доверительный предел для увеличения продолжительности жизни — $C_L = 227$.

H_1: средняя продолжительность жизни крыс меняется при ограничении диеты.
Применяем критерий Стьюдента для двух выборок с неизвестными неравными дисперсиями: $p = 4 \times 10^{-15}$; 95% доверительный интервал для изменения продолжительности жизни — $[C_L, C_U] = [217, 344]$.

7 t-критерий Стьюдента / Аспина-Уэлша (проблема Беренца-Фишера)

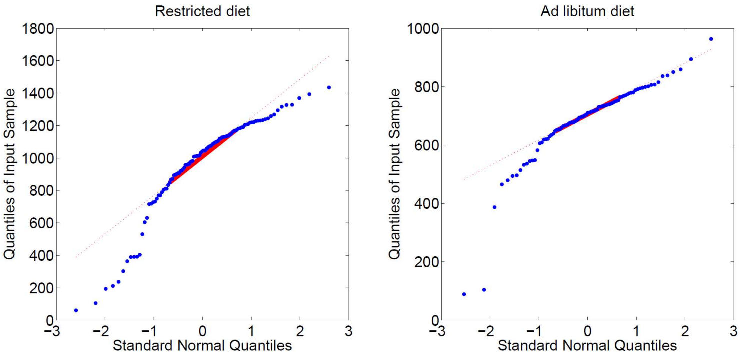
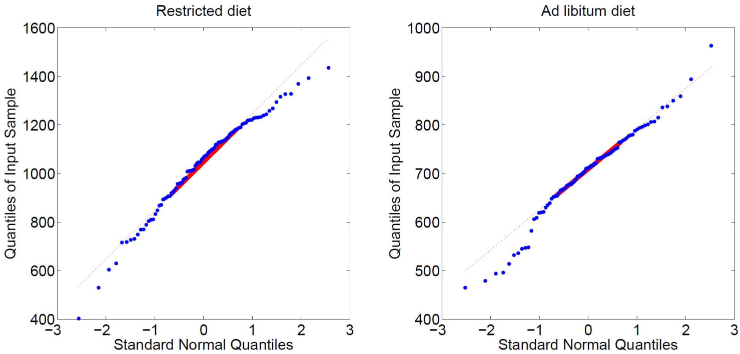


График Q-Q (квантиль-квантиль)

Критерий Шапиро-Уилка отклоняет гипотезу нормальности:
$p_1 = 1.7 \times 10^{-6}$, $p_2 = 1.5 \times 10^{-7}$.

7 t-критерий Стьюдента / Аспина-Уэлша (проблема Беренца-Фишера)

Возьмём усечённую выборку:



$n_1 = 96, \quad n_2 = 86.$

Критерий Шапиро-Уилка: $p_1 = 0.0443, p_2 = 0.0960.$
Критерий Стьюдента:

- для односторонней альтернативы $p = 4 \times 10^{-32}, \quad C_L = 298;$
- для двусторонней альтернативы $p = 9 \times 10^{-32}, \quad [C_L, C_U] = [290, 382]\,.$

8 t-критерий Стьюдента для связанных выборок

выборки: $X_1^n = (X_{11}, \dots, X_{1n}), X_{1i} \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$,
$X_2^n = (X_{21}, \dots, X_{2n}), X_{2i} \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, выборки связанные

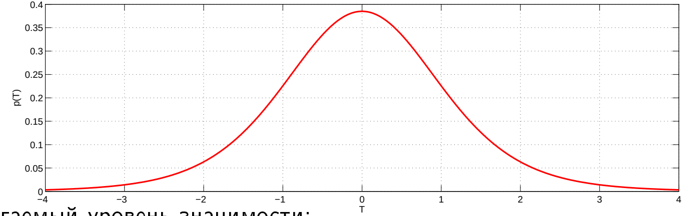
нулевая гипотеза: $H_0\colon \mu_1 = \mu_2$;

альтернатива: $H_1\colon \mu_1 <\neq> \mu_2$;

статистика: $T(X_1^n, X_2^n) = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{S/\sqrt{n}}, \quad S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(D_i - \bar{D}\right)^2}$,

$D_i = X_{1i} - X_{2i}$;

$T(X_1^n, X_2^n) \sim St(n-1)$ при H_0;



достигаемый уровень значимости:

$$p(t) = \begin{cases} 1 - tcdf(t, n-1), & H_1\colon \mu_1 > \mu_2, \\ tcdf(t, n-1), & H_1\colon \mu_1 < \mu_2, \\ 2\left(1 - tcdf(|t|, n-1)\right), & H_1\colon \mu_1 \neq \mu_2. \end{cases}$$

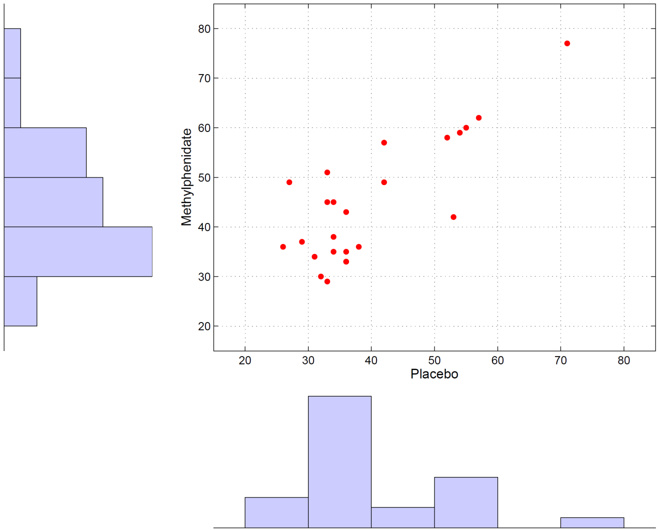
8 t-критерий Стьюдента для связанных выборок

Пример: (Pearson et al, 2003, Treatment effects of methylphenidate on behavioral adjustment in children with mental retardation and ADHD) исследовалось влияние метилфенидата на способность к подавлению импульсивных поведенческих реакций умственно отсталых детей с синдромом дефицита внимания и гиперактивности. Каждый испытуемый в течение недели принимал либо препарат, либо плацебо, а в конце недели проходил тест. На втором этапе плацебо и препарат менялись, после недельного курса каждый испытуемый проходил второй тест.

Для 24 испытуемых известны результаты в норме и после недельного курса препарата.

Эффективен ли препарат? Каков его эффект?

t-критерий Стьюдента для связанных выборок



8 t-критерий Стьюдента для связанных выборок

H_0: терапия неэффективна, способность к подавлению импульсивных поведенческих реакций не меняется.

H_1: в результате терапии способность к подавлению импульсивных поведенческих реакций увеличивается.
Применяем парный критерий Стьюдента: $p = 0.0019$; верхний 95% доверительный предел для увеличения — $C_U = -2.3212$.

H_1: в результате терапии способность к подавлению импульсивных поведенческих реакций меняется.
Применяем парный критерий Стьюдента: $p = 0.0038$; 95% доверительный интервал для изменения — $[C_L, C_U] = [-8.1414, -1.7752]$.

Игнорируем связь между выборками и применим обычный двухвыборочный критерий Стьюдента:

- для односторонней альтернативы $p = 0.0766, \quad C_U = 0.7734$;
- для двусторонней альтернативы $p = 0.1532, \quad [C_L, C_U] = [-11.8313, 1.9146]$.

9 F-критерий Фишера

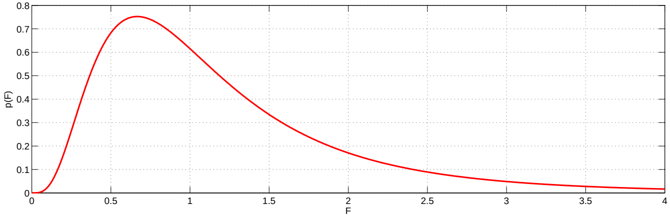
выборки: $X_1^{n_1} = (X_{11}, \dots, X_{1n_1}), X_{1i} \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$,
$X_2^{n_2} = (X_{21}, \dots, X_{2n_2}), X_{2i} \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$;

нулевая гипотеза: $H_0\colon \sigma_1 = \sigma_2$;

альтернатива: $H_1\colon \sigma_1 <\neq> \sigma_2$;

статистика: $F(X_1^{n_1}, X_2^{n_2}) = \frac{S_1^2}{S_2^2}$;

$F(X_1^{n_1}, X_2^{n_2}) \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$ при H_0;

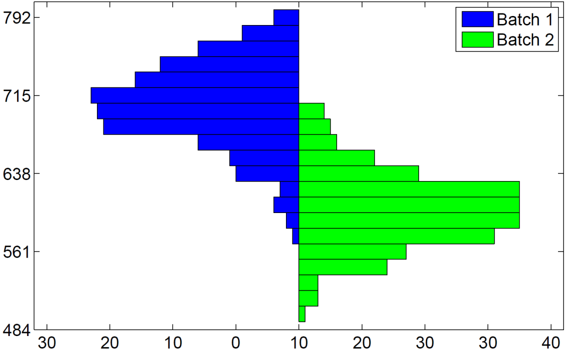


достигаемый уровень значимости:

$$p(f) = \begin{cases} fcdf(1/f, n_2 - 1, n_1 - 1), & H_1\colon \sigma_1 > \sigma_2, \\ fcdf(f, n_1 - 1, n_2 - 1), & H_1\colon \sigma_1 < \sigma_2, \\ 2\min\left(fcdf(1/f, n_2 - 1, n_1 - 1), fcdf(f, n_1 - 1, n_2 - 1)\right), & H_1\colon \sigma_1 \neq \sigma_2. \end{cases}$$

F-критерий Фишера

Пример: (NIST industry ceramics consortium for strength optimization of ceramic strength, 1996) собраны данные о прочности материала 440 керамических изделий из двух партий по 220 в каждой. Цель — проверить, одинакова ли дисперсия прочности в разных партиях.



Гипотезы нормальности не отклоняются критерием Шапиро-Уилка ($p_1 = 0.2062, p_2 = 0.7028$).
Критерий Фишера: $p = 0.1721, \quad [C_L, C_U] = [0.9225, 1.5690]$.

Z-критерий для доли

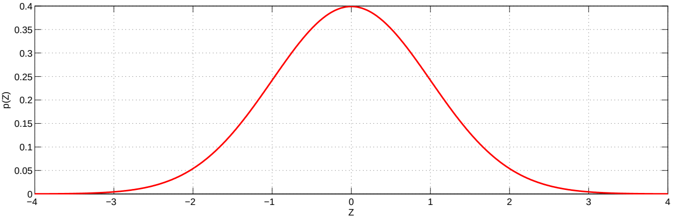
выборка: $X^n = (X_1, \dots, X_n), X_i \sim Ber(p);$

нулевая гипотеза: $H_0 \colon p = p_0;$

альтернатива: $H_1 \colon p <\neq> p_0;$

статистика: $Z(X^n) = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}, \quad \hat{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i;$

$Z(X^n) \sim N(0,1)$ при $H_0;$



достигаемый уровень значимости:

$$p(z) = \begin{cases} 1 - ncdf(z, 0, 1), & H_1 \colon p > p_0, \\ ncdf(z, 0, 1), & H_1 \colon p < p_0, \\ 2\left(1 - ncdf(|z|, 0, 1)\right), & H_1 \colon p \neq p_0. \end{cases}$$

Z-критерий для доли

Пример 1: (Королёв, 2008, Теория вероятностей и математическая статистика, задача 7.2.2) Бенджамин Спок, знаменитый педиатр и автор большого количества книг по воспитанию детей, был арестован за участие в антивоенной демонстрации в Бостоне. Его дело должен был рассматривать суд присяжных. Присяжные отбираются с помощью многоступенчатой процедуры, на очередном этапе которой было отобрано 300 человек. Однако среди них оказалось только 90 женщин. Адвокаты доктора Спока подали протест на предвзятость отбора.

$H_0:$ процедура отбора была беспристрастной, женщины попадали в выборку с вероятностью $1/2$.
$H_1:$ кандидаты специально отбирались так, чтобы уменьшить число женщин среди присяжных $\Rightarrow p = 2.3 \times 10^{-12}$.

Z-критерий для доли

Пример 2: (Кобзарь, 2006, Прикладная математическая статистика, задача 227) нормируемый уровень дефектных изделий в партии $p_0 = 0.05$. Из партии извлечена выборка $n = 20$ изделий, в которой обнаружены при проверке $t = 2$ дефектных.

H_0: доля дефектных изделий в партии не превосходит нормируемого значения.
H_1: доля дефектных изделий в партии превышает нормируемое значение $\Rightarrow p = 0.15$.

Точный критерий для доли

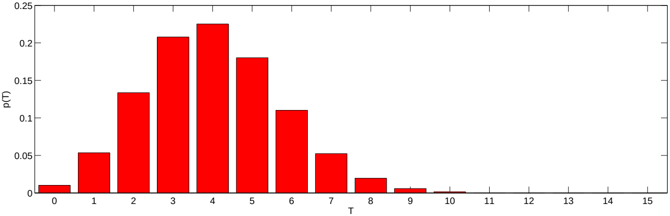
выборка: $X^n = (X_1, \dots, X_n)\,, X_i \sim Ber\,(p)\,;$

нулевая гипотеза: $H_0\colon p = p_0;$

альтернатива: $H_1\colon p <\neq> p_0;$

статистика: $T\,(X^n) = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i;$

$T\,(X^n) \sim Bin(n, p_0)$ при $H_0;$

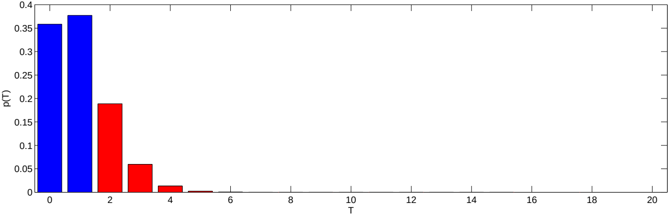


достигаемый уровень значимости:

$$p\,(t) = \begin{cases} 1 - binocdf\,(t, n, p_0), & H_1\colon p > p_0, \\ binocdf\,(t-1, n, p_0), & H_1\colon p < p_0, \\ \dots, & H_1\colon p \neq p_0. \end{cases}$$

Точный критерий для доли

Пример 2:



$H_0:$ доля дефектных изделий в партии не превосходит нормируемого значения.
$H_1:$ доля дефектных изделий в партии превышает нормируемое значение $\Rightarrow p = 0.26$.

Доверительные интервалы для доли

$$\frac{t-np}{\sqrt{np(1-p)}} \sim\approx N(0,1).$$

$$P\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{t-np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) \approx 1-\alpha,$$

$$P\left(\frac{t}{n} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leq p \leq \frac{t}{n} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) \approx 1-\alpha;$$

подставим вместо p оценку $\hat{p} = \frac{t}{n}$, получим

$$\hat{p} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

— $100(1-\alpha)\%$ доверительный интервал Вальда.

В примере 1 95% доверительный интервал Вальда — $[0.2481, 0.3519]$.
В примере 2 — $[-0.0315, 0.2315]$.

Доверительные интервалы для доли

Недостатки доверительного интервала Вальда:

- доверительные пределы могут выходить за границы $[0, 1]$ (вообще, при $\hat{p} \in (0, 1)$ нежелательно даже $C_L = 0$ и $C_U = 1$);
- при $\hat{p} = 0$ и $\hat{p} = 1$ вырождается в точку;
- антиконсервативен — накрывает p реже, чем в $100\,(1-\alpha)\%$ случаев.

Доверительные интервалы для доли

Более точный доверительный интервал Уилсона (score confidence interval):

$$\frac{\hat{p} + \frac{1}{2n} z_{1-\frac{\alpha}{2}}^2 \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n} + \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}^2}{4n^2}}}{1 + \frac{1}{n} z_{1-\frac{\alpha}{2}}^2}.$$

В примере 1 95% доверительный интервал Уилсона — $[0.2509, 0.3541]$.
В примере 2 — $[0.0279, 0.3010]$.

В R:

```
> library("PropCIs")
> scoreci(2,20,0.95)
95 percent confidence interval:
 0.0279 0.3010
```

Минимальный уровень доверия α, при котором интервал не содержит 0.05 — 0.305.

Z-критерий для разности двух долей, независимые выборки

выборки: $X_1^{n_1} = (X_{11}, \dots, X_{1n_1}), X_{1i} \sim Ber(p_1);$
$X_2^{n_2} = (X_{21}, \dots, X_{2n_2}), X_{2i} \sim Ber(p_2)$, выборки независимы;

Исход \ Выборка	$X_1^{n_1}$	$X_2^{n_2}$
1	a	b
0	c	d
$\sum$	n_1	n_2

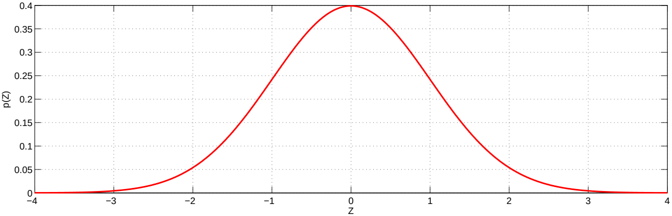
$$p_1 = \frac{\mathbb{E}A}{n_1}, \quad \hat{p}_1 = \frac{a}{n_1}, \quad p_2 = \frac{\mathbb{E}B}{n_2}, \quad \hat{p}_2 = \frac{b}{n_2};$$

нулевая гипотеза: $H_0\colon p_1 = p_2;$

альтернатива: $H_1\colon p_1 <\neq> p_2;$

статистика: $Z\left(X_1^{n_1}, X_2^{n_2}\right) = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{P(1-P)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}, \quad P = \frac{\hat{p}_1 n_1 + \hat{p}_2 n_2}{n_1 + n_2};$

$Z\left(X_1^{n_1}, X_2^{n_2}\right) \sim N(0,1)$ при H_0;



Z-критерий для разности двух долей, независимые выборки

достигаемый уровень значимости:

$$p\left(z\right) = \begin{cases} 1 - ncdf(z, 0, 1), & H_1\colon p_1 > p_2, \\ ncdf(z, 0, 1), & H_1\colon p_1 < p_2, \\ 2\left(1 - ncdf(|z|, 0, 1)\right), & H_1\colon p_1 \neq p_2. \end{cases}$$

Z-критерий для разности двух долей, независимые выборки

Пример: (Кобзарь, 2006, Прикладная математическая статистика, задача 226) в двух партиях объёмами $n_1 = 100$ шт. и $n_2 = 200$ шт. обнаружено соответственно $t_1 = 3$ и $t_2 = 5$ дефектных приборов. Необходимо проверить гипотезу о равенстве долей дефектных приборов в партиях.

Наличие дефекта \ Номер партии	1	2
Есть	$a = 3$	$b = 5$
Нет	$c = 97$	$d = 195$
Всего	$n_1 = 100$	$n_2 = 200$

$H_0:$ доли дефектных изделий в партиях равны.
$H_1:$ доли дефектных изделий в партиях различаются $\Rightarrow p = 0.8$.
$H_1:$ доля дефектных изделий в первой партии выше $\Rightarrow p = 0.4$.
$H_1:$ доля дефектных изделий в первой партии ниже $\Rightarrow p = 0.6$.

Доверительный интервал для разности двух долей

Доверительный интервал Уилсона:

$$[C_L, C_U] = \left[\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - \delta, \hat{p}_1 - \hat{p}_2 + \varepsilon\right],$$

$$\delta = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{l_1\left(1-l_1\right)}{n_1} + \frac{u_2\left(1-u_2\right)}{n_2}},$$

$$\varepsilon = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{u_1\left(1-u_1\right)}{n_1} + \frac{l_2\left(1-l_2\right)}{n_2}},$$

l_1, u_1 — корни уравнения $\left|x-\hat{p}_1\right| = z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{x(1-x)}{n_1}}$,

l_2, u_2 — корни уравнения $\left|x-\hat{p}_2\right| = z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{x(1-x)}{n_2}}$.

В R:

```
> library("PropCIs")
> diffscoreci(3, 100, 5, 200, 0.95)
95 percent confidence interval:
 -0.03313566 0.06158107
```

Минимальный уровень доверия α, при котором интервал не содержит нуля — 0.8003.

Z-критерий для разности двух долей, связанные выборки

выборки: $X_1^n = (X_{11}, \dots, X_{1n}), X_{1i} \sim Ber(p_1);$
$X_2^n = (X_{21}, \dots, X_{2n}), X_{2i} \sim Ber(p_2)$, выборки связанные;

$X_1^n \backslash X_2^n$	1	0	$\sum$
1	e	g	$e+g$
0	f	h	$f+h$
$\sum$	$e+f$	$g+h$	n

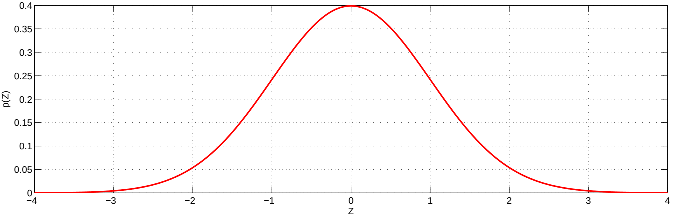
$$p_1 = \frac{\mathbb{E}(E+F)}{n}, \quad \hat{p}_1 = \frac{e+f}{n}, \quad p_2 = \frac{\mathbb{E}(E+G)}{n}, \quad \hat{p}_2 = \frac{e+g}{n};$$

нулевая гипотеза: $H_0 \colon p_1 = p_2;$

альтернатива: $H_1 \colon p_1 <\neq> p_2;$

статистика: $Z\left(X_1^n, X_2^n\right) = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\frac{f+g-(f-g)^2}{n^3}}} = \frac{f-g}{\sqrt{f+g-\frac{(f-g)^2}{n}}};$

$Z\left(X_1^n, X_2^n\right) \sim N(0,1)$ при H_0;



Z-критерий для разности двух долей, связанные выборки

достигаемый уровень значимости:

$$p(z) = \begin{cases} 1 - ncdf(z, 0, 1), & H_1: p_1 > p_2, \\ ncdf(z, 0, 1), & H_1: p_1 < p_2, \\ 2\left(1 - ncdf(|z|, 0, 1)\right), & H_1: p_1 \neq p_2. \end{cases}$$

Z-критерий для разности двух долей, связанные выборки

Пример: (Agresti, Categorical Data Analysis, 2002, таблица 10.1) из опрошенных 1600 граждан Великобритании, имеющих право голоса, 944 высказали одобрение деятельности премьер-министра. Через 6 месяцев эти же люди были опрошены снова, на этот раз одобрение высказали только 880 опрошенных.

I \ II	+	-	$\sum$
+	$e = 794$	$g = 150$	944
-	$f = 86$	$h = 570$	656
$\sum$	880	720	1600

H_0: рейтинг премьер-министра не изменился.
H_1: рейтинг премьер-министра изменился $\Rightarrow p = 2.8 \times 10^{-5}$.
H_1: рейтинг премьер-министра снизился $\Rightarrow p = 1.4 \times 10^{-5}$.
H_1: рейтинг премьер-министра повысился $\Rightarrow p = 0.999986$.

Z-критерий для разности двух долей, связанные выборки

Без учёта информации о связи между выборками:

Результат \ Опрос	I	II
+	$a = 994$	$b = 880$
-	$c = 606$	$d = 720$
$\sum$	$n_1 = 1600$	$n_2 = 1600$

H_0: рейтинг премьер-министра не изменился.

H_1: рейтинг премьер-министра изменился $\Rightarrow p = 4.3 \times 10^{-5}$.

H_1: рейтинг премьер-министра снизился $\Rightarrow p = 2.1 \times 10^{-5}$.

H_1: рейтинг премьер-министра повысился $\Rightarrow p = 0.999979$.

Доверительный интервал для разности двух долей

Доверительный интервал Уилсона:

$$
\begin{aligned}
[C_L, C_U] &= \left[\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - \delta, \hat{p}_1 - \hat{p}_2 + \varepsilon\right], \\
\delta &= \sqrt{dl_1^2 - 2\hat{\phi} dl_1 du_2 + du_2^2}, \\
\varepsilon &= \sqrt{du_1^2 - 2\hat{\phi} du_1 dl_2 + dl_2^2}, \\
\hat{\phi} &= \begin{cases} \frac{eh - fg}{(e+f)(g+h)(e+h)(f+h)}, & \text{если знаменатель не равен нулю,} \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases} \\
dl_1 &= \hat{p}_1 - l_1, \\
du_1 &= u_1 - \hat{p}_1, \\
dl_2 &= \hat{p}_2 - l_2, \\
du_2 &= u_2 - \hat{p}_2,
\end{aligned}
$$

l_1, u_1 — корни уравнения $|x - \hat{p}_1| = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}$,

l_2, u_2 — корни уравнения $|x - \hat{p}_2| = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}$.

Доверительный интервал для разности двух долей

В R:

```
> library("PropCIs")
> scoreci.mp(86, 150, 1600, 0.95)
95 percent confidence interval:
 0.02136157 0.05899805
```

Минимальный уровень доверия α, при котором интервал не содержит нуля — 3.1×10^{-5}.

Литература

Критерии нормальности:

- Жарка-Бера (Jarque–Bera) — Кобзарь, 3.2.2.16;
- Шапиро-Уилка (Shapiro-Wilk) — Кобзарь, 3.2.2.1;
- хи-квадрат (chi-square) — Кобзарь, 3.1.1.1, 3.2.1.1;
- согласия (goodness-of-fit), основанные на эмпирической функции распределения — Кобзарь, 3.1.2, 3.2.1.2.

Для нормальных распределений:

- Z-критерии (Z-tests) — Kanji, №№ 1, 2, 3;
- t-критерии Стьюдента (t-tests) — Kanji, №№ 7, 8, 9;
- критерий хи-квадрат (chi-square) — Kanji, №15;
- критерий Фишера (F-test) — Kanji, №16.

Литература

Для распределения Бернулли:

- Z-критерии (Z-tests) — Kanji, №№ 4, 5;
- точный критерий (exact binomial test) — McDonald, `http://udel.edu/~mcdonald/statexactbin.html`;
- доверительные интервалы Уилсона (score confidence intervals) — Newcombe, 1998a, 1998b, 1998c.

Кобзарь А.И. *Прикладная математическая статистика*. — М.: Физматлит, 2006.
Kanji G.K. *100 statistical tests*. — London: SAGE Publications, 2006.
McDonald J.H. *Handbook of Biological Statistics*. — Baltimore: Sparky House Publishing, 2008.
Newcombe R.G. (1998a). *Two-sided confidence intervals for the single proportion: comparison of seven methods*. Statistics in Medicine, 17(8), 857–72.
Newcombe R.G. (1998b). *Improved confidence intervals for the difference between binomial proportions based on paired data*. Statistics in Medicine, 17, 2635–2650.
Newcombe R.G. (1998c). *Interval estimation for the difference between independent proportions: comparison of eleven methods*. Statistics in Medicine, 17, 873–890.