Тема II

Теория перечисления Пойа

Разделы I

Действие группы на множестве: два определения

Группа $\mathbf{G} = \langle G, \circ, e \rangle$, $|G| = n$. Множество T, $|T| = N$.

Определение (I)

$$\alpha \in \mathrm{Hom}\,(\,\mathbf{G},\, Symm(T)\,).$$

Действие α группы $\mathbf{G}$ на множестве T: $\mathbf{G} \underset{\alpha}{:} T$.

Определение (II)

$$\alpha = \langle\, G, T; \circ, *, e \,\rangle\,,$$

где

$G \times G \overset{\circ}{\to} G$ — групповая операция;
$G \times T \overset{*}{\to} T$ — новая операция.

Аксиомы для операций: $e * t = t$; $\quad (g \circ h) * t = h * (g * t)$.

Аксиомы: $e(t) = t$ и $(g \circ h)(t) = h(g(t))$.

Платоновы тела — правильные 3-мерные многогранники

Платоновы тела	Группа вращения	Порядок группы
тетраэдр	T (тетраэдра)	$4 \cdot 3 = 12$
куб и октаэдр	O (октаэдра)	$8 \cdot 3 = 24$
икосаэдр и додекаэдр	Y (икосаэдра)	$12 \cdot 5 = 60$

Октаэдр

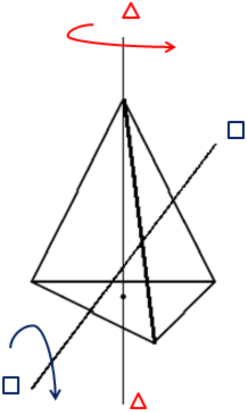
Икосаэдр

Додекаэдр

Рассматриваем группы вращений (самосовмещений) платоновых тел

T — группа вращения тетраэдра

$T = \langle t, f \rangle$, $t^3 = f^2 = e$, где:

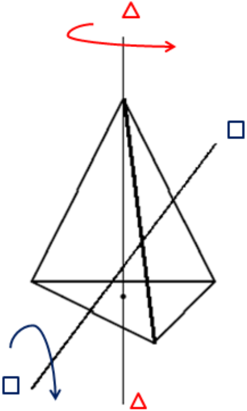


t — вращение на 120° вокруг оси, проходящей через вершину и центр тетраэдра (△—△); таких осей 4.

f — вращение на 180° вокруг оси, проходящей через центры двух противоположных рёбер (□—□); таких осей 3.

$$|T| = (3-1)\cdot 4 + (2-1)\cdot 3 + 1 = 12.$$

Действие T на грани (или вершины) тетраэдра: типы перестановок



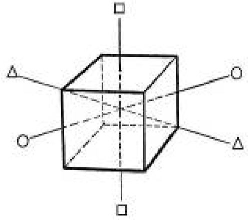
$\square$: $Type(t) = Type(t^2) = \langle 1, 0, 1, 0 \rangle$;

$\triangle$: $Type(f) = \langle 0, 2, 0, 0 \rangle$.

Тетраэдр двойственен самому себе $\Rightarrow$ действие на грани $=$ действие на вершины.

O — группа вращения куба

$O = \langle t, f, r \rangle , t^4 = f^2 = r^3 = e$, где



t — вращение на 90° вокруг оси, проходящей через середины двух противоположных граней (□—□),

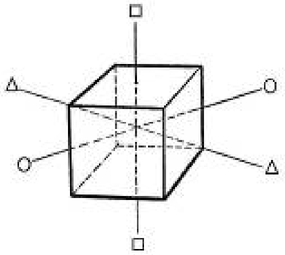
f — вращение на 180° вокруг оси, проходящей через середины двух противоположных рёбер (○—○),

r — вращение на 120° вокруг оси, проходящей через две противоположные вершины (△—△)

Сколько осей каждого типа? 3, 6 и 4 соответственно.

$$|O| = 3 \cdot 3 + 1 \cdot 6 + 2 \cdot 4 + 1 = 24.$$

Действие O на вершины куба: типы перестановок



$$\square : Type(t) = Type(t^3) = \\ = \langle 0, 0, 0, 2, 0, \ldots \rangle, \\ Type(t^2) = \langle 0, 4, 0, \ldots \rangle;$$

$$\circ : Type(f) = \langle 0, 4, 0, \ldots \rangle;$$

$$\triangle: Type(r) = Type(r^2) = \langle 2, 0, 2, 0, \ldots \rangle.$$

Напоминание: фиксатор, стабилизатор и лемма Бёрнсайда

$$\{\, t \in T \mid g(t) = t \,\} \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Fix}\,(g) \subseteq T$$

$$\{\, g \in G \mid g(t) = t \,\} \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Stab}\,(t) \leqslant G.$$

Первое равенство — *лемма Бёрнсайда* (или Коши-Фробениуса):

$$C(\mathbf{G}) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}\,(g)| = \frac{1}{|G|} \sum_{t \in T} |\mathrm{Stab}\,(t)|$$

Лемма.
Длина орбиты $\mathrm{Orb}\,(t)$ *равна индексу* $\mathrm{Stab}\,(t)$ *в группе* $\mathbf{G}$*, т.е.*

$$|\mathrm{Orb}\,(t)| = |G| : |\mathrm{Stab}\,(t)| = [G : \mathrm{Stab}\,(t)]$$

Следствие леммы: число элементов в группе вращения правильного многогранника есть $\left|V\right| \cdot \left|E_0\right|$, где $\left|V\right|$ — число вершин, а $\left|E_0\right|$ — число рёбер, выходящих из одной вершины.

Разделы I

Пример применения леммы Бёрнсайда

Задача про слова

Составляются слова длины $l \geqslant 2$ из алфавита $A = \{a_1, \ldots, a_q\}$. Слова считаются эквивалентными, если они получаются одно из другого перестановкой крайних букв.

Определить число S неэквивалентных слов.

Решение.
T — множество слов длины l в алфавите A, $|T| = N = q^l$.

Надо представить эквивалентности как орбиты некоторого действия подходящей группы G на T.

Очевидно, $f^2 = e$ и поэтому подходит $\mathbf{G} \cong Z_2 = \{\, e,\, g\,\}$.

Действие: f переставляет в слове крайние буквы.

Пример применения леммы Бёрнсайда...

Число S неэквивалентных слов есть число классов эквивалентности $C(\mathbf{G})$ действия $Z_2 \underset{\alpha}{:} T$ —

$$\left|\operatorname{Fix}(e)\right| = \left|T\right| = q^l, \qquad \left|\operatorname{Fix}(f)\right| = q^{l-2} \cdot q = q^{l-1}.$$

$$S = C(Z_2) = \frac{1}{2} \sum_{g \in G} \left|\operatorname{Fix}(g)\right| = \frac{q^l + q^{l-1}}{2} = \frac{q^{l-1}(q+1)}{2}.$$

Для $l = 3,\ q = 2 \Rightarrow S = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ (из всего 8)

Пусть $A = \{a, b\}$. Показаны слова и классы.

aaa	*baa*
aab	bab
aba	**bba**
abb	bbb

Цикловой индекс

Существует универсальный способ вычисления числа $C(\mathbf{G})$ — количества классов эквивалентности (= орбит).

Сопоставим каждой перестановке $g \in \mathbf{G}$ вес $w(g)$ по правилу:

$$Type(g) = \langle \nu_1, \ldots, \nu_N \rangle \Rightarrow w(g) = \underbrace{x_1^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot x_N^{\nu_N}}_{\text{моном}}.$$

Определение

Средний вес подстановок в группе называется *цикловым индексом* действия $\mathbf{G} \underset{\alpha}{:} T$:

$$P(\mathbf{G} \underset{\alpha}{:} T, x_1, \ldots, x_N) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} w(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} x_1^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot x_N^{\nu_N}.$$

(Это производящий полином многих переменных)

Цикловой индекс: обозначения и свойства

Другие обозначения: $P_{\mathbf{G}}(x_1, \ldots, x_N)$ и $P_{\mathbf{G}}$, $P(\mathbf{G})$.

$P_{\mathbf{G}} = P_{\mathbf{G}'} \overset{?}{\Rightarrow} \mathbf{G} \cong \mathbf{G}'$ — нет, есть контрпример.

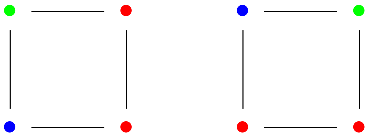
Как применять лемму «не-Бёрнсайда?»

Для применения универсального способа вычисления $C(\mathbf{G})$ надо представить эквивалентные элементы множества как классы эквивалентности действия некоторой группы $\mathbf{G}$ на этом множестве.

Число неэквивалентных раскрасок

Пусть задано действие $\mathbf{G} \underset{\alpha}{:} T$ группы $\mathbf{G}$ на множестве T.

- Припишем каждому элементу T одно из r значений (неформально: покрасим в один из r цветов). Всего, очевидно, имеется r^N раскрасок.
- Не будем различать раскраски, если при преобразовании $g : t \to t'$ t' раскрашен также как и t. Например, поворот на 90° —



не даёт нового раскрашивания вершин квадрата.

<u>**Вопрос**</u>: Сколько существует неэквивалентных раскрасок = классов эквивалентности $C(\mathbf{G})$?

Вычисление $C(\mathbf{G} \underset{\alpha}{:} T)$ через цикловой индекс

- Каждый класс эквивалентности это g-цикл; их $C(g) = \nu_1 + \ldots + \nu_N$ штук.
- Каждая перестановка $g \in \mathbf{G}$ с типом $\langle\, \nu_1, \, \ldots, \, \nu_N \,\rangle$ будет иметь $|\,\mathrm{Fix}\,(g)| = r^{C(g)}$ неподвижных точек: каждый класс эквивалентности это g-цикл, их $C(g)$ и
$$|\,\mathrm{Fix}\,(g)| = x_1^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot x_N^{\nu_N}\Big|_{x_1=\ldots=x_N=r} = r^{C(g)}.$$

Следовательно, по лемме Бёрсайда, число полученных классов эквивалентности, т.е. неэквивалентных раскрасок

Теорема

$$C(\mathbf{G} \underset{\alpha}{:} T) = P(\mathbf{G} \underset{\alpha}{:} T, x_1, \, \ldots, \, x_N)\Big|_{x_1=\ldots=x_N=r}.$$

Например, $P_{\mathbf{G}}(1, \, \ldots, \, 1) = 1$: если все элементы покрасить в один цвет, то таких раскрасок одна.

Задача про слова

Составляются слова длины $l \geqslant 2$ *из алфавита* $\{a_1, \ldots, a_m\}$*.*
Слова считаются эквивалентными, если они получаются одно из другого перестановкой крайних букв.
Определить число S *неэквивалентных слов.*

Было решение: $S = \dfrac{m^l + m^{l-1}}{2}$.

Другое решение: $\mathbf{G} = \{e, g\} \cong Z_2$; T: $\underbrace{\bigcirc \overbrace{\bigcirc \ldots \bigcirc}^{l-2} \bigcirc}_{l}$.

Элемент g группы $\mathbf{G}$	$Type(g)$	$w(g)$	# мономов
e	$\langle l, 0, \ldots, 0 \rangle$	x_1^l	1
g	$\langle l-2, 1, 0, \ldots, 0 \rangle$	$x_1^{l-2} x_2^1$	1

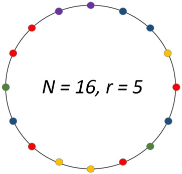
Цикловой индекс: $P(x_1, \ldots, x_l) = \dfrac{1}{2}\left[x_1^l + x_1^{l-2} x_2^1\right]$.
$S = P(m, \ldots, m)$.

Классическая комбинаторная задача об ожерельях

Ожерелье — окружность, на которой на равных расстояниях по дуге (в вершинах правильного многоугольника) располагаются «бусины».

Задача об ожерельях. *Сколько различных ожерелий можно составить из N бусин r цветов?*

Варианты. Ожерелья неразличимы, если одно получается из другого *самосовмещением*:



1. поворотом в плоскости (бусины плоские, окрашены с одной стороны) — самодействие циклической группы Z_N;
2. поворотом и переворотом в пространстве (бусины круглые) — самодействие группы диэдра (двойной пирамиды) D_N.

Задача об ожерельях: $N = 5,\, r = 3$

Сколько разных ожерелий можно составить из 5 *бусин* 3 *цветов?*

T — вершины правильного пятиугольника. $\#Col(3) = ?$

① Ожерелья одинаковы, если одно получается из другого поворотом.

Решение. $\mathbf{G} \cong Z_5 = \langle t \rangle,\, t^5 = e,\ n = 5$.

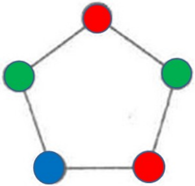
Элемент группы	$Type(g)$	$w(g)$	# мономов
e	$\langle\, 5, 0, 0, 0, 0 \,\rangle$	x_1^5	1
$t,\, t^2,\, t^3,\, t^4$	$\langle\, 0, 0, 0, 0, 1 \,\rangle$	x_5	4

Цикловой индекс: $P(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \frac{1}{5}\left[\, x_1^5 + 4x_5 \,\right]$.

$$\#Col(3) = P(3, \ldots, 3) = \frac{3^5 + 4 \cdot 3}{5} = \frac{3 \cdot 85}{5} = 3 \cdot 17 = 51.$$

Задача Олимпиады «Покори Воробьёвы горы – 2009»

Для 50 детей детского сада закуплены 50 одинаковых тарелок. По краю каждой тарелки равномерно расположено 5 белых кружочков. Воспитатели хотят перекрасить какие-либо из этих кружочков в другой цвет так, чтобы все тарелки стали различными.
Какое наименьшее число дополнительных цветов потребуется им для этого?



Как должны были решать школьники

Решение.

Пусть требуется r цветов.

Отбросим r вариантов раскраски в один цвет.

Число остальных вариантов —

без учёта возможности поворота тарелки: $r^5 - r$;

с учётом поворота: $\dfrac{r^5 - r}{5}$

(каждый вариант повторяется 5 раз).

Итого: $\#Col(r) = \dfrac{r^5 - r}{5} + r = \dfrac{r^5 + 4r}{5}$;

При 2 дополнительных цветах $\#Col(3) = 51$.

Задача об ожерельях: $N = 5, r = 3$, 2-й вариант

② Ожерелья одинаковы, если одно получается из другого поворотом и/или переворотом.

$\mathbf{G}$ — *группа диэдра* $D_5 = \langle t, f \rangle$, $t^5 = f^2 = e$, $n = |D_5| = 10$.

Элемент группы g	$Type(g)$	$w(g)$	# мономов
e	$\langle 5, 0, 0, 0, 0 \rangle$	x_1^5	1
t, t^2, t^3, t^4	$\langle 0, 0, 0, 0, 1 \rangle$	x_5	4
$f, tf, \ldots, t^4 f$	$\langle 1, 2, 0, 0, 0 \rangle$	$x_1 x_2^2$	5
Всего			10

Цикловой индекс: $P = \dfrac{1}{10}\left[x_1^5 + 4x_5 + 5x_1x_2^2 \right]$.

$$\#Col(3) = P(x_1, \ldots, x_5)\big|_{x_1 = \ldots = x_5 = 3} = \frac{3^5 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 3^3}{10} = \mathbf{39}.$$

Задача о раскраске сторон квадрата

Стороны квадрата раскрашивают в r цветов.
Сколько существует различно окрашенных квадратов?

Решение. Группа самосовмещения квадрата в простршстве — группа диэдра $D_4 = \langle t, f, s \rangle$, которая порождается тремя образующими:

- t : вращение на 90° вокруг центра симметрии (в выбранном направлении — по или против часовой стрелки);
- f : симметрия относительно оси, проходящей через середины противоположных сторон — 2 оси;
- s : симметрия относительно оси, проходящей через середины противоположных вершин — 2 оси.

$t^4 = f^2 = s^2 = e, \quad |D_4| = 8.$

Задача о раскраске сторон квадрата...

При самодействии группы D_4 $(N = 4)$ её элементы будут иметь следующие веса:

- e : единичная перестановка оставит все стороны на месте, т.е. имеются 4 цикла длины 1, вес x_1^4 $(1$ перестановка);
- t, t^3 : стороны циклически переходят друг в друга по и против часовой стрелке, длина цикла 4, вес x_4^1 $(2$ перестановки);
- t^2 : стороны переходят в противоположные, что даёт два цикла длины 2, вес — x_2^2 $(1$ перестановка);
- f : две противоположные стороны на месте, остальные две меняются местами, т.е. имеются два единичных цикла и один длины 2, вес — $x_1^2 x_2^1$ $(1$ перестановка, 2 оси);
- s : в двух парах смежных сторон элементы меняются местами, что даёт два цикла длины 2, вес — x_2^2 $(1$ перестановка, 2 оси).

Задача о раскраске сторон квадрата...

Цикловой индекс самодействия D_4:

$$P_{D_4}(x_1, \ldots, x_4) = \frac{1}{8}\left[\, x_1^4 + 2x_4 + 3x_2^2 + 2x_1^2 x_2 \,\right].$$

Число раскрасок квадрата в r цветов:

$$P_{D_4}(r, \ldots, r) = \frac{1}{8}\left[\, r^4 + 2r + 3r^2 + 2r^3 \,\right].$$

В частности, в два и три цвета:

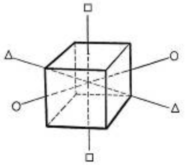
$$\#Col(2) = \frac{2^4 + 4 \cdot 2^2 + 2^4}{2^3} = 2 + 2 + 2 = 6,$$

$$\#Col(3) = \frac{3^4 + 2 \cdot 3 + 3^4}{8} = \frac{81 + 6 + 81}{8} = \frac{80 + 8 + 80}{8} = 21.$$

Задача о раскраске куба

Задача *(раскраска граней куба в два цвета).*
Грани куба раскрашивают в 2 и 3 цвета.
Сколько существует различно окрашенных кубов?

<u>Решение</u>. Напоминание: $\mathbf{G} = O = \langle\, t,\, f,\, r\,\rangle$, $|O| = 24$.



t — вращение на 90° вокруг оси, проходящей через середины двух противоположных граней ($\square$—$\square$, 3 оси);

f — вращение на 180° вокруг оси, проходящей через середины двух противоположных рёбер ($\circ$—$\circ$, 6 осей);

r — вращение на 120° вокруг оси, проходящей через две противоположные вершины ($\triangle$—$\triangle$, 4 оси).

Задача о раскраске куба: обозначения элементов

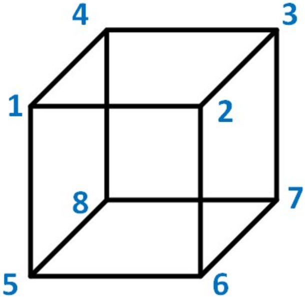
Обозначим через F множество граней куба; $|F| = N = 6$.
Выберем некоторую грань куба (квадрат) и обозначим её ①, а параллельную ей — ②.
Перенумеруем последовательно вершины грани ① числами $1, \ldots, 4$, а вершины грани ② — числами $5, \ldots, 8$ так, что вершина с номером i смежна с вершиной с номером $i + 4,\ i = 1, 2, 3, 4$.

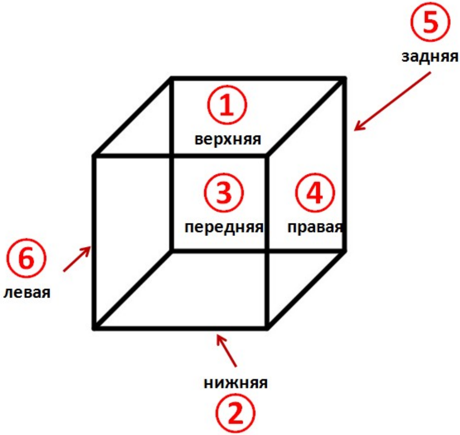
Перестановки далее указаны для случая, когда ось вращения

$\langle t \rangle$ проходит через середины граней ① и ②,
$\langle f \rangle$ проходит через середины рёбер (3-7) и (1-5),
$\langle s \rangle$ проходит через вершины (1) и (7),

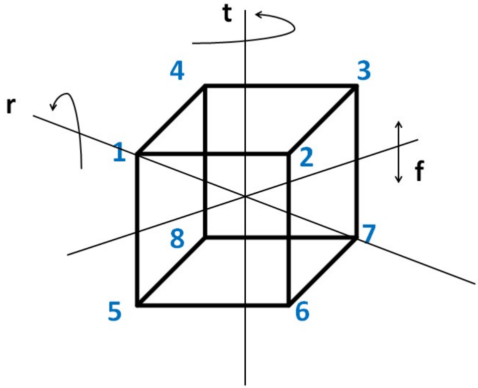
а грани обозначены:
$(1$-2-6-$5)$ через ③, параллельная ей грань — ⑤,
грань $(2$-3-7-$6)$ — через ④, параллельная ей грань — ⑥.

Задача о раскраске куба: обозначения вершин и граней





Задача о раскраске куба: обозначения осей



$$t^4 = f^2 = r^3 = e$$

Задача о раскраске куба: раскраска граней $|F| = N = 6$

$g \in O$	перестановка	$Type(g)$	$w(g)$	#
e	(①)…(⑥)	$\langle 6, 0, \ldots \rangle$	x_1^6	1
t, t^3	(①)(②)(③④⑤⑥)	$\langle 2, 0, 0, 1, 0, \rangle$	$x_1^2 x_4$	$3 \cdot 2 = 6$
t^2	(①)(②)(③⑤)(④⑥)	$\langle 2, 2, 0, \ldots \rangle$	$x_1^2 x_2^2$	3
f	(①②)(③⑥)(④⑤)	$\langle 0, 3, 0, \ldots \rangle$	x_2^3	6
r, r^2	(①③⑥)(②④⑤)	$\langle 0, 0, 2, 0, \ldots \rangle$	x_3^2	$4 \cdot 2 = 8$
Всего				24

$$P(x_1, \ldots, x_6) = \frac{1}{24}\left[x_1^6 + 6x_1^2x_4 + 3x_1^2x_2^2 + 6x_2^3 + 8x_3^2\right].$$

$$\#Col(2) = P(2, \ldots, 2) = \frac{1}{24}\left[2^6 + 12 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^4 + 8 \cdot 2^2\right] = 10,$$

$$\#Col(3) = P(3, \ldots, 3) = \frac{1}{24}\left[3^6 + 12 \cdot 3^3 + 3 \cdot 3^4 + 8 \cdot 3^2\right] = 48.$$

Цикловой индекс действия группы октаэдра —

— на множество R рёбер куба ($|R| = N = 12$):

$g \in O$	$Type(g)$	$w(g)$	$\#$
e	$\langle 12, 0, \ldots \rangle$	x_1^{12}	1
t, t^3	$\langle 0, 0, 0, 3, 0, 0 \rangle$	x_4^3	$3 \cdot 2 = 6$
t^2	$\langle 0, 6, 0, \ldots \rangle$	x_2^6	3
f	$\langle 2, 5, 0, \ldots \rangle$	$x_1^2 x_2^5$	6
r, r^2	$\langle 0, 0, 4, 0, \ldots \rangle$	x_3^4	$4 \cdot 2 = 8$
Всего			24

Цикловой индекс:

$$P(O \underset{\alpha}{:} R) = \frac{1}{24} \left[x_1^{12} + 6x_4^3 + 3x_2^6 + 6x_1^2 x_2^5 + 8x_3^4 \right].$$

Цикловой индекс действия группы октаэдра —

— на множество V вершин куба ($|V| = N = 8$):

$g \in O$	$Type(g)$	$w(g)$	$\#$
e	$\langle 8, 0, \ldots \rangle$	x_1^8	1
t, t^3	$\langle 0, 0, 0, 2, 0, 0 \rangle$	x_4^2	$3 \cdot 2 = 6$
t^2	$\langle 0, 4, 0, \ldots \rangle$	x_2^4	3
f	$\langle 0, 4, 0, \ldots \rangle$	x_2^4	6
r, r^2	$\langle 2, 0, 2, 0, \ldots \rangle$	$x_1^2 x_3^2$	$4 \cdot 2 = 8$
Всего			24

Цикловой индекс:

$$P(O \underset{\alpha}{:} V) = \frac{1}{24} \left[x_1^8 + 6x_4^2 + 9x_2^4 + 8x_1^2 x_3^2 \right].$$

Задача (перечисление графов).

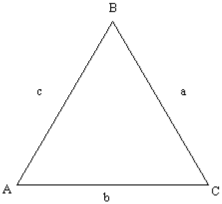
Сколько имеется неориентированных непомеченных графов (без петель и кратных рёбер) с тремя вершинами?

Решение. T — стороны треугольника, $N = 3$.

$\mathbf{G} \cong S_3$ — все перестановки сторон,

$$n = 3! = 6.$$

$\mathbf{G} \underset{\alpha}{:} T$ — самодействие группы S_3



Графы неориентированные —
$r = 2$ — пометки «есть ребро/нет ребра»

$$S_3 = \{ e, (abc), (acb), ((a)(bc)), ((b)(ac)), ((c)(ab)) \}$$

Перечисление графов...

$$S_3 = \{\, e,\, \underbrace{(abc)}_{t},\, \underbrace{(acb)}_{t^2},\, \underbrace{((a)(bc))}_{f},\, \underbrace{((b)(ac))}_{tf},\, \underbrace{((c)(ab))}_{t^2 f} \,\} = \langle\, t,\, f \,\rangle$$

$g \in S_3$	$Type(g)$	$w(g)$	#
$e = (a)(b)(c)$	$\langle\, 3,\, 0,\, 0 \,\rangle$	x_1^3	1
$t,\, t^2$	$\langle\, 0,\, 0,\, 1 \,\rangle$	x_3^1	2
$f,\, tf,\, t^2 f$	$\langle\, 1,\, 1,\, 0 \,\rangle$	$x_1^1 x_2^1$	3
Всего			6

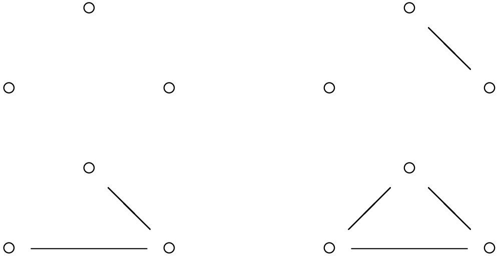
$$P(S_3) = \frac{1}{6}\left[\, x_1^3 + 2x_3^1 + 3x_1^1 x_2^1 \,\right],$$

— цикловой индекс самодействия группы S_3, или, что то же, группы симметрии треугольника.

$$P(2,2,2) = \mathbf{4}.$$

Перечисление графов...

Перечислим эти графы:



Цикловые индексы самодействия S_n, Z_n, D_n и действия O на элементы куба

$$P(S_n) = \sum_{\substack{(j_1,\ldots,j_n)\in\mathbb{N}_0^n \\ 1j_1+2j_2+\ldots+nj_n=n}} \frac{x_1^{j_1} x_2^{j_2} \ldots x_n^{j_n}}{(1^{j_1} j_1!)(2^{j_2} j_2!)\ldots(n^{j_n} j_n!)},$$

$$P(Z_n) = \frac{1}{n}\sum_{d|n} \varphi(d) x_d^{n/d}, \quad \varphi \text{ — функция Эйлера},$$

$$P(D_n) = \frac{1}{2}P(Z_n) + \begin{cases} \frac{1}{2}x_1 x_2^{(n-1)/2}, & \text{если } n \text{ нечётно}, \\ \frac{1}{4}\left[x_2^{n/2} + x_1^2 x_2^{n/2-1}\right], & \text{если } n \text{ чётно}, \end{cases}$$

$$P(O \underset{\alpha}{:} V) = \frac{1}{24}\left[\, x_1^8 + 9x_2^4 + 6x_4^2 + 8x_1^2 x_3^2 \,\right] \text{ (на вершины)},$$

$$P(O \underset{\alpha}{:} E) = \frac{1}{24}\left[\, x_1^{12} + 3x_2^6 + 8x_3^4 + 6x_4^2 + 8x_1^2 x_2^5 + 6x_4^3 \,\right] \text{ (на рёбра)},$$

$$P(O \underset{\alpha}{:} F) = \frac{1}{24}\left[\, x_1^6 + 3x_1^2 x_2^2 + 6x_1^2 x_4 + 6x_2^3 + 8x_3^2 \,\right] \text{ (на грани)}.$$

Разделы I

Теорема Пойа

К множеству T, $|T| = N$, группе $\mathbf{G}$, $|G| = n$ и действию $\mathbf{G} \underset{\alpha}{:} T$ добавим множество $R = \{c_1, \ldots, c_r\}$, меток («красок»), и совокупность функций $F = R^T$ — приписывания меток (*раскрашиваний*) элементам T.

$\mathbf{G}$, действуя на T, действует и на R^T — $\circ : R^T \times G \overset{\circ}{=} R^T$.

Придадим вес элементам R: $w(c_i) = y_i$, $i = \overline{1, r}$.

Теорема (Редфилда-Пойа; 1927, 1937)
Цикловой индекс действия группы $\mathbf{G}$ *на* R^T *есть*

$$P(\mathbf{G} \underset{\alpha}{:} R^T) = P(\mathbf{G} \underset{\alpha}{:} T, x_1, \ldots, x_N)\Big|_{x_k = y_1^k + \ldots + y_r^k,\, k = \overline{1,N}}$$

Теорема Пойа...

Следствие

Если все веса выбраны одинаковыми ($y_1 = \ldots y_r = 1$), то $x_1 = \ldots x_N = r$ и $W(F)$ — число классов эквивалентности

$$C(\mathbf{G} \underset{\alpha}{:} R^T) = C(\mathbf{G} \underset{\alpha}{:} T) = P(\mathbf{G} \underset{\alpha}{:} T, r, \ldots, r)\,.$$

— лемма Бёрнсайда.

Что можно определить (подсчитать) с помощью:

леммы Бёрнсайда — общее число неэквивалентных разметок (раскрасок);

теорема Редфилда-Пойа — число разметок данного типа, т.е. содержащих данное количество элементов конкретного цвета.

Д. Пойа

Дьёрдь Пойа (Pólya György, 1887–1985) — венгерскийматематик. После окончания Будапештского университета работал в Высшей технической школе в Цюрихе, а с 1940 г. — в Стэнфордском университете (США).

Внёс заметный вклад в теорию чисел, функциональный анализ, математическую статистику (*распределение Пойа*) и комбинаторику (*теорема Редфилда–Пойа*).
Пойа много работал со школьными учителями математики и внёс большой вклад в популяризацию науки.

Усложним задачу об ожерельях $N = 5, r = 3$

Задача об ожерельях *(5 бусин 3 цветов).*
Цвета — красный, синий, зелёный. Ожерелья одинаковы, если одно получается из другого поворотом и/или переворотом.
Сколько имеется ожерелий, имеющих ровно 2 красные бусины?

Решение. Было: $\mathbf{G} = D_5$,
цикловой индекс $P = \frac{1}{10}\left[x_1^5 + 4x_5 + 5x_1x_2^2\right]$,
всего ожерелий $P(3, \ldots, 3) = 39$ (только поворот — 51).

$$x_1 = y_1 + y_2 + y_3, \quad x_2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2, \quad \ldots, \quad x_5 = y_1^5 + y_2^5 + y_3^5.$$

$$\begin{cases} w(\text{красный}) & = y_1, \\ w(\text{синий}) & = y_2, \\ w(\text{зелёный}) & = y_3, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = y, \\ y_2 = y_3 = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 & = y + 2, \\ x_2 & = y^2 + 2, \\ \ldots & \\ x_5 & = y^5 + 2. \end{cases}$$

Задача об ожерельях: 5 бусин 3 цветов...

$$P(x_1,\ldots,x_5) = \frac{1}{10}\left[\,x_1^5 + 4x_5 + 5x_1x_2^2\,\right]$$

$$x_k \mapsto y^k + 2,\ k=\overline{1,5};\quad P(y) = \sum_{i=1}^{5} u_i y^i,\ \boxed{u_2 = ?}$$

$$P(y) = \frac{1}{10}\left[\,u_0 + u_1 y + u_2 y^2 + \ldots + u_5 y^5\,\right] =$$

$$= \frac{1}{10}\left[\,(y+2)^5 + 4(y^5+2) + 5(y+2)(y^2+2)^2\,\right] =$$

$$= \frac{1}{10}\left[\,\ldots + C_5^2 2^3 y^2 + \ldots + 5(y+2)(y^4+4y^2+4)\,\right] =$$

$$= \frac{1}{10}\left[\,\ldots + (10\cdot 8 + 5\cdot 2\cdot 4)y^2 + \ldots\right].$$

$$u_2 = \frac{80+40}{10} = 12.$$

Задача о раскраске куба

Вершины куба помечают красными и синим цветами.
Сколько существует

1) *разнопомеченных кубов ($\#Col(3)$);*
2) *кубов, у которых половина вершины красные ($\#Col(4,4)$);*
3) *кубов, у которых не более 2 красных вершин?*

Решение. Цикловой индекс действия O на вершины куба

$$P(O \underset{\alpha}{:} V;\, x_1, \ldots x_8) = \frac{1}{24}\left[\, x_1^8 + 6x_4^2 + 9x_2^4 + 8x_1^2x_3^2 \,\right].$$

1) $\#Col(2) = P|_{x_1=\ldots=x_8=2} = \dfrac{2^8 + 6\cdot 2^2 + 9\cdot 2^4 + 8\cdot 4\cdot 4}{3\cdot 2^3} =$

$$= \frac{32+3+18+16}{3} = \frac{69}{3} = 23.$$

Задача о раскраске куба... $\left(\frac{1}{24}\left[x_1^8 + 6x_4^2 + 9x_2^4 + 8x_1^2x_3^2 \right] \right)$

2) $w($красный$) = y$, $w($синий$) = 1$, $x_k = y^k + 1$, $k = \overline{1,8}$:

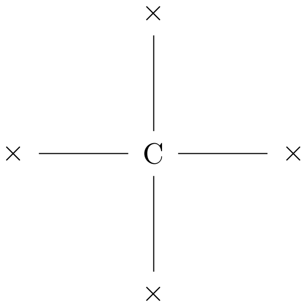
$$\#Col(4,4) = \frac{1}{24}\left[(y+1)^8 + 9\cdot(y^2+1)^4 + 6\cdot(y^4+1)^2 + \right.$$
$$\left. + 8\cdot(y+1)^2(y^3+1)^2 \right] =$$
$$= \frac{1}{24}\left[\ldots + 28y^2 + C_8^4 y^4 + \ldots + 9(\ldots 4y^2 + 6y^4 + \ldots) + \right.$$
$$\left. \ldots + 6\cdot 2y^4 \ldots + 8(\ldots + 2y + y^2 + \ldots)(\ldots + 2y^3 + \ldots) \right].$$
$$u_4 = \frac{1}{24}\left[70 + 9\cdot 6 + 6\cdot 2 + 8\cdot 2\cdot 2 \right] = \frac{168}{24} = 7.$$

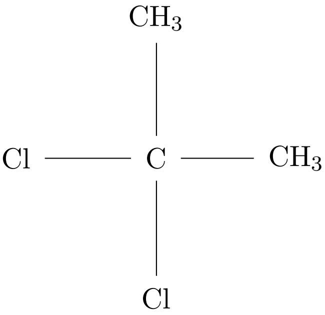
3) $\#Col(\leqslant 2, *) = u_0 + u_1 + u_2$, $u_0 = u_1 = 1$.

$$u_2 = \frac{1}{24}\left[\ldots + 28y^2 + \ldots + 9(\ldots + 4y^2 \ldots) + 8(\ldots + y^2 + \ldots) \right] =$$
$$= \frac{28+36+8}{24} = \frac{72}{24} = 3. \qquad \#Col(\leqslant 2, *) = 1+1+3 = 5.$$

Задача о числе молекул

Рассмотрим молекулы 4*-валентного углерода* C*:*





где на на месте $\times$ *могут находится* $\mathrm{CH_3}$ *(метил),* $\mathrm{C_2H_5}$ *(этил),* H *(водород) или* Cl *(хлор). Например — дихлорбутан.*

Задача о числе молекул...

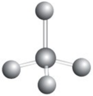
(продолжение)

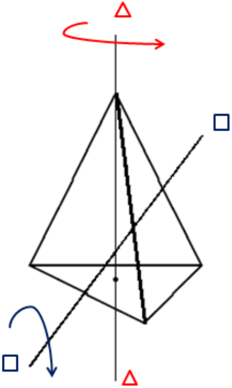
Найти

1) *общее число* M *всех молекул;*
2) *число молекул с* $H = 0, 1, 2, 3, 4$ *атомами водорода.*

Задача о числе молекул...

Решение. Какая группа действует и на каком множестве?
$T = \langle t, f \rangle, t^3 = f^2 = e$, где

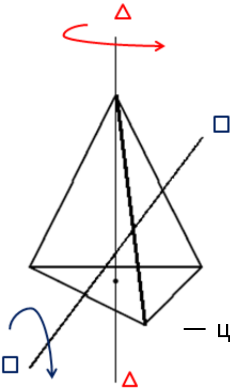




t — вращение на 120° вокруг оси, проходящей через вершину и центр тетраэдра (△—△);
f — вращение на 180° вокруг оси, проходящей через центры двух противоположных рёбер (□—□).

Задача о числе молекул... (группа вращения тетраэдра)

Цикловой индекс действия группы T на вершины тетраэдра —



$g \in T$	$Type(g)$	$w(g)$	$\#$
e	$\langle 4,0,0,0 \rangle$	x_1^4	1
$t,\ t^2$	$\langle 1,0,1,0 \rangle$	$x_1 x_3$	$4 \cdot 2 = 8$
f	$\langle 0,2,0,0 \rangle$	x_2^2	3

$$P(T \underset{\alpha}{:} V) = \frac{1}{12}\left[x_1^4 + 8x_1x_3 + 3x_2^2 \right]$$

— цикловой индекс действия группы вращения тетраэдра на его вершины (= грани).

Задача о числе молекул... (группа вращения тетраэдра)...

$1)$ Получено

$$P(x_1, \ldots, x_4) = \frac{1}{12}\left[\, x_1^4 + 8x_1x_3 + 3x_2^2 \,\right].$$

Всего молекул (4 радикала, $x_1 = \ldots = x_4 = 4$) —

$$M = P(x_1, \ldots, x_4) = \frac{4^4 + 8 \cdot 4 \cdot 4 + 3 \cdot 4^2}{3 \cdot 4} = \frac{64 + 32 + 12}{3} =$$

$$= \frac{96 + 12}{3} = 32 + 4 = 36.$$

$2)$ Веса: $y_1 = \mathrm{H}$, $y_2 = y_3 = y_4 = 1$.

Подстановка в P: $x_k = \mathrm{H}^k + 3$, $k = \overline{1, 4}$.

Задача о числе молекул... (группа вращения тетраэдра)...

$P(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{12}\left[\, x_1^4 + 8x_1x_3 + 3x_2^2 \,\right].$

Проводим подстаковку — $x_k \mapsto H^k + 3,\ k = 1, 2, 3.$

$$P(H) = \frac{1}{12} \left[(\mathrm{H}+3)^4 + 8\,(\mathrm{H}+3)\left(\mathrm{H}^3+3\right) + 3\left(\mathrm{H}^2+3\right)^2 \right] =$$

$$= \frac{1}{12} \left[\left(\mathrm{H}^4 + 4\cdot\mathrm{H}^3\cdot 3 + 6\cdot\mathrm{H}^2\cdot 9 + 4\cdot\mathrm{H}\cdot 27 + 81\right) + \right.$$

$$\left. +8\left(\mathrm{H}^4 + 3\mathrm{H}^3 + 3\mathrm{H} + 9\right) + 3\left(\mathrm{H}^4 + 6\mathrm{H}^2 + 9\right) \right] =$$

$$= 1\cdot\mathrm{H}^4 + 3\cdot\mathrm{H}^3 + 6\cdot\mathrm{H}^2 + 11\cdot\mathrm{H} + 15.$$

Итого имеется молекул с числом атома водорода:
с 4-мя — 1 шт., с 3-мя — 3 шт., с 2-мя — 6 шт.,
с 1-м — 11 шт., без атомов водорода — 15 шт.,
всего — $1 + 3 + 6 + 11 + 15 = 36.$

Разделы I

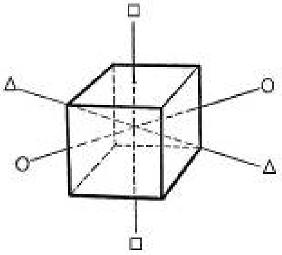
Задача ТП-0-1 I

Найдите порядок стабилизаторов произвольной

(а) вершины, (б) ребра, (в) грани

куба при действии группы октаэдра O на соответствующие элементы.
Какие перестановки в них содержатся?

Решение.



Задача ТП-0-1 II

(а) Пусть O действует на вершины куба и v — некоторая вершина.
Тогда $\mathrm{Stab}\,(v) = \{\, e, s, s^2 \,\} \leqslant O$ — группа вращений на 120° (в выбранном направлении) вокруг диагонали куба, проходящей через данную вершину, $\mathrm{Stab}\,(v) \cong Z_3$.

(б) Пусть O действует на рёбра куба и r — некоторое ребро.
Тогда $\mathrm{Stab}\,(r) = \{\, e, f \,\} \leqslant O$ — группа вращений на 180° вокруг оси, проходящей через середины рёбер (данного и ему противоположного) куба, $\mathrm{Stab}\,(r) \cong Z_2$.

(в) Пусть O действует на грани куба и f — некоторая грань.
Тогда $\mathrm{Stab}\,(f) = \{\, e, t, t^2, t^3 \,\} \leqslant O$ — группа вращений на 90° (в выбранном направлении) вокруг вокруг оси, проходящей через середины граней (данной и ей противоположной) куба, $\mathrm{Stab}\,(f) \cong Z_4$.

Задача ТП-0-2

Найти цикловой индекс для следующим образом определённого самодействия четверной группы Клейна $V_4 = \left\{ e, a, b, ab \mid a^2 = b^2 = (ab)^2 = e^2 = e, ab = ba \right\}$:

1)

$$e : \begin{pmatrix} e & a & b & ab \\ e & a & b & ab \end{pmatrix}, \qquad a : \begin{pmatrix} e & a & b & ab \\ a & e & ab & b \end{pmatrix},$$

$$b : \begin{pmatrix} e & a & b & ab \\ b & ab & e & a \end{pmatrix}, \qquad ab : \begin{pmatrix} e & a & b & ab \\ ab & b & a & e \end{pmatrix};$$

2)

$$e : \begin{pmatrix} e & a & b & ab \\ e & a & b & ab \end{pmatrix}, \qquad a : \begin{pmatrix} e & a & b & ab \\ a & e & b & ab \end{pmatrix},$$

$$b : \begin{pmatrix} e & a & b & ab \\ e & a & ab & b \end{pmatrix}, \qquad ab : \begin{pmatrix} e & a & b & ab \\ a & e & ab & b \end{pmatrix}.$$

Задача ТП-0-2...

Решение. Везде группа Клейна V_4 действует на свои же элементы.

1)

g	$Type(g)$	$w(g)$
e	$\langle \underline{4}, 0, 0, 0 \rangle$	x_1^4
a, b, ab	$\langle 0, 2, 0, 0 \rangle$	x_2^2

$$P_{V_4} = \frac{1}{4}\left[\, x_1^4 + 3x_2^2 \,\right]$$

2)

g	$Type(g)$	$w(g)$
e	$\langle \underline{4}, 0, 0, 0 \rangle$	x_1^4
a, b	$\langle \underline{2}, 1, 0, 0 \rangle$	$x_1^2 x_2$
ab	$\langle 0, 1, 0, 0 \rangle$	x_2

$$P'_{V_4} = \frac{1}{4}\left[\, x_1^4 + 2x_1^2 x_2 + x_2 \,\right]$$

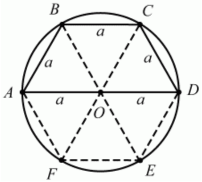
Первая группа перестановок есть нормальная подгруппа S_4, а вторая — нет.

Задача ТП-0-3

Найти цикловой индекс транзитивного самодействия группы Z_6.

Решение. Обозначим последовательно вершины правильного шестиугольника буквами $A, \dots, F$, $Z_6 = \langle t \rangle$, t — поворот на 60°.

$g \in Z_6$	$Type(g)$	$w(g)$
$e = (A)\dots(F)$	$\langle 6, 0, 0, 0, 0, 0 \rangle$	x_1^6
$g = (ABCDEF)$	$\langle 0, 0, 0, 0, 0, 1 \rangle$	x_6
$g^2 = (ACE)(BDF)$	$\langle 0, 0, 2, 0, 0, 0 \rangle$	x_3^2
$g^3 = (AD)(BE)(CF)$	$\langle 0, 3, 0, 0, 0, 0 \rangle$	x_2^3
$g^4 = (AEC)(BFD)$	$\langle 0, 0, 2, 0, 0, 0 \rangle$	x_3^2
$g^5 = (AFEDCB)$	$\langle 0, 0, 0, 0, 0, 1 \rangle$	x_6



$$P_{Z_6} = \frac{1}{6}\left[x_1^6 + x_2^3 + 2x_3^2 + 2x_6 \right] = \frac{1}{6}\sum_{d|6} \varphi(d) x_d^{6/d};$$

$$D(6) = \{1, 2, 3, 6\},\ \varphi(1) = \varphi(2) = 1,\ \varphi(3) = \varphi(6) = 2$$

Задача ТП-0-5

Найти цикловой индекс действия группы симметрии правильного n-угольника (группы диэдра) D_n на его вершины (стороны).

Решение. $|D_n| = 2n$, $n > 2$.

1. При нечётных n: $D_n = \langle\, t,\, f\,\rangle$, где

t — вращение на $360^\circ/n$ вокруг центра квадрата, $\langle t\rangle \cong Z_n$;
r — симметрия относительно прямой, проходящей через вершину и центр многоугольника, $\langle r\rangle \cong Z_2$, n осей.

$$P(D_n) = \frac{1}{2n}\left[\sum_{d|n} \varphi(d) x_d^{n/d} + n x_1 x_2^{(n-1)/2}\right].$$

Задача ТП-0-5...

2. При чётных n: $D_n = \langle t, f, s \rangle$, где

t — то же;
f — симметрия относительное прямой, проходящей через середины противоположных сторон, $\langle f \rangle \cong Z_2$, $n/2$ осей;
s — симметрия относительное прямой, проходящей через противоположные вершин, $\langle s \rangle \cong Z_2$, $n/2$ осей.

$$P(D_n) = \frac{1}{2n} \left[\sum_{d|n} \varphi(d) x_d^{n/d} + \frac{n}{2} x_2^{n/2} + \frac{n}{2} x_1^2 x_2^{n/2-1} \right].$$

Задача ТП-1-1

На стеклянных пластинах рисуют одинаковые прямоугольники (не квадраты) и раскрашивают их стороны в r цветов. Сколько можно нарисовать таких различных прямоугольников? Конкретно, при $r = 2$?

Решение. Найдём цикловой индекс $R \underset{\alpha}{:} S$ действия группы R самосовмещений прямоугольника в пространстве на его стороны. Группа $R = \langle t, f \rangle$ порождается образующими: t — вращение вокруг центра симметрии на 180°, f — отражение вокруг оси, проходящей через середины противоположных сторон, 2 оси.

$g \in R$	$Type(g)$	$w(g)$	#
e	$\langle 4, 0, 0, 0 \rangle$	x_1^4	1
t	$\langle 0, 2, 0, 0 \rangle$	x_2^2	1
f	$\langle 2, 1, 0, 0 \rangle$	$x_1^2 x_2$	2

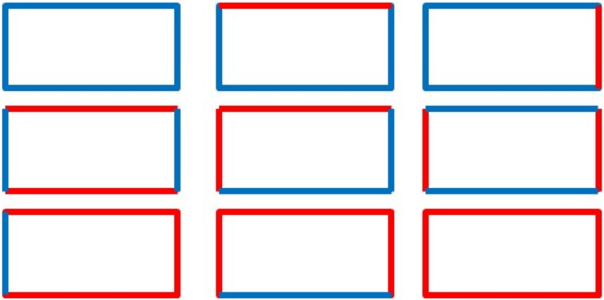
$$P(R \underset{\alpha}{:} S; x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{4} \left[x_1^4 + x_2^2 + 2x_1^2 x_2 \right].$$

Задача ТП-1-1...

$$P(R \underset{\alpha}{:} S; r, \dots r) = \frac{1}{4}\left[r^4 + r^2 + 2r^3\right].$$

Число 2-цветных прямоугольников —

$$\#Col(2) = P(R \underset{\alpha}{:} S; 2, \dots, 2) = \frac{16+4+16}{4} = \frac{36}{4} = 4{+}1{+}4 = 9:$$



Задача ТП-1-2

На стеклянных пластинах рисуют одинаковые прямоугольники (не квадраты) и раскрашивают их вершины в 3 цвета. Сколько можно нарисовать таких различных прямоугольников?

Решение. Найдём цикловой индекс $P(R \underset{\alpha}{:} V)$ действия группы R самосовмещений прямоугольника в пространстве на его вершины.

$g \in R$	$Type(g)$	$w(g)$	#
e	$\langle 4, 0, 0, 0 \rangle$	x_1^4	1
t	$\langle 0, 2, 0, 0 \rangle$	x_2^2	1
f	$\langle 0, 2, 0, 0 \rangle$	x_2^2	2

$$P(R \underset{\alpha}{:} V;\, x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{4}\left[x_1^4 + 3x_2^2 \right]$$

Число прямоугольников:

$$\#Col(3) = P(R \underset{\alpha}{:} V; 3, \ldots, 3) = \frac{81+27}{4} = \frac{108}{4} = 27$$

Задача ТП-1-3 I

Квадратная стеклянная пластина разделена на 9 равных квадратов, которые раскрашиваются в один из r цветов. Сколько существует разноокрашенных пластин? Конкретно, при $r = 2$?

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Решение. Группа $D_4 = \langle t, f, s \rangle$, $t^4 = f^2 = s^2 = e$, $|D_4| = 8$ действует на 9 элементов стеклянной пластики.

t — вращение на 90° вокруг центра квадрата;
f — симметрия относительное прямой, проходящей через середины противоположных сторон;

Задача ТП-1-3 II

s — симметрия относительное прямой, проходящей через противоположные вершин.

T — множество квадратов, составляющих пластину, $|T| = 9$.
Определяем цикловой индекс действия D_4 на T.

$g \in D_4$	перестановка	$Type(g)$	$w(g)$	#
e	$(1)\ldots(9)$	$\langle\, 9,\, 0,\, \ldots \rangle$	x_1^9	1
t, t^3	$(5)(1397)(2684)$	$\langle\, 1,\, 0,\, 0,\, 2,\, \ldots \rangle$	$x_1 x_4^2$	2
t^2	$(5)(19)(37)(28)(79)$	$\langle\, 1,\, 4,\, 0,\, \ldots \rangle$	$x_1 x_2^4$	1
$s, f, \ldots$	$(2)(5)(8)(13)(48)(79)$	$\langle\, 3,\, 3,\, 0,\, \ldots \rangle$	$x_1^3 x_2^3$	4
				8

Цикловой индекс: $P = \dfrac{1}{8}\left[\, x_1^9 + 2x_1x_4^2 + x_1x_2^4 + 4x_1^3x_2^3 \,\right].$

$$\#Col(2) = \frac{2^9 + 2\cdot 2^3 + 2^5 + 4\cdot 2^3\cdot 2^3}{2^3} = 64{+}2{+}4{+}32 = 102\,.$$

Задача ТП-1-4 (о компостере) I

Компостером назовём квадратную таблицу 4×4, в которой каждая клетка может быть либо пустой, либо содержать в центре символ $\bullet$.
Сколько существует различных компостеров, если не различать те, которые могут быть получены один из другого самосовмещениями в пространстве?

Решение.
Найдём цикловой индекс действия группы диэдра D_4 на 16 клеток компостера.
$D_4 = \langle\, t, f, s \,\rangle$, $t^4 = f^2 = s^2 = e$, $|D_4| = 8$,

Задача ТП-1-4 (о компостере) II

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

$g \in D_4$	перестановка	$Type(g)$	$w(g)$	#
e	$(1)\ldots(16)$	$\langle\, 16, 0, \ldots\,\rangle$	x_1^4	1
$t,\, t^3$	$(1,4,16,13)\ldots(6,7,11,10)$	$\langle\, 0,0,0,4,\ldots\,\rangle$	x_4^4	2
t^2	$(1,16)\ldots(6,11)$	$\langle\, 0,8,0\ldots\,\rangle$	x_2^8	1
f	$(1,4)\ldots(10,11)$	$\langle\, 0,8,0,\ldots\,\rangle$	x_2^8	2
s	$(1)\ldots(16)(2,5)\ldots(12,15)$	$\langle\, 4,6,0,\ldots\,\rangle$	$x_1^4 x_2^6$	2

Задача ТП-1-4 (о компостере) III

Цикловой индекс действия группы D_4 на элементы компостера есть

$$P(x_1, \ldots, x_4) = \frac{1}{8}\left[\, x_1^{16} + 2x_4^4 + 3x_2^8 + 2x_1^4 x_2^6 \,\right].$$

Наличие/отсутствие в клетке символа $\bullet$ описывается их отображением в двухэлементное множество (раскраске в два цвета), поэтому число C различных компостеров есть

$$C = P(2, 2, \ldots) = \frac{2^{16} + 2^5 + 3 \cdot 2^8 + 2^{11}}{2^3} =$$

$$= 8192 + 4 + 3 \cdot 32 + 256 = 8196 + 96 + 256 = 8548.$$

К аналогичной задаче сводится задача о числе фотошаблонов рисунков соединений для интегральных схем.

Задача ТП-1-5

Найти число различных вариантов раскраски граней куба в 2 *и* 3 *цвета.*

Решение. Цикловой индекс:

$$P(O \underset{\alpha}{:} F) = \frac{1}{24}\left[x_1^6 + \underline{6x_1^2x_4} + 3x_1^2x_2^2 + \underline{6x_2^3} + 8x_3^2\right].$$

$$\#Col(2) = \frac{2^6 + 12\cdot 2^3 + 3\cdot 2^4 + 2^5}{3\cdot 2^3} = \frac{8+12+6+4}{3} = 10.$$

$$\#Col(3) = \frac{3^6 + 12\cdot 3^3 + \cdot 3^5 + 8\cdot 3^2}{3\cdot 8} = \frac{3\cdot(81+36+27+8)}{8} =$$
$$= \frac{3\cdot(80+64+8)}{8} = 3\cdot(10+8+1) = 3\cdot 19 = 57.$$

Задача ТП-1-6

Определить число различных раскрасок всех граней правильной 4*-угольной пирамиды П в* 3 *цвета.*

<u>Решение</u>. Занумеруем последовательно боковые грани П числами $1, \ldots 4$, а основание — 5.
$\mathbf{G} \cong Z_4 = \langle\, t \,\rangle$, t — вращение на 90°.

$g \in Z_4$	$Type(g)$	$w(g)$	#
$e = (1)(2)(3)(4)(5)$	$\langle\, 5, 0, 0, 0, 0 \,\rangle$	x_1^5	1
$t, t^3 = (1234)(5)$	$\langle\, 1, 0, 0, 1, 0 \,\rangle$	$x_1 x_4$	2
$t^2 = (12)(34)(5)$	$\langle\, 1, 2, 0, 0, 0 \,\rangle$	$x_1 x_2^2$	1

$$P(x_1, \ldots, x_5) = \frac{1}{4}\left[\, x_1^5 + 2x_1x_4 + x_1x_2^2 \,\right],$$

$$P(3, \ldots, 3) = \frac{3^5 + 2\cdot 3^2 + 3^3}{4} = \frac{9\cdot(27+2+3)}{4} = \frac{9\cdot 32}{4} = 72.$$

Задача ТП-1-7

Найти число раскрасок всех граней усечённой правильной 4-угольной пирамиды в 3 цвета.

Решение. Пронумеруем грани П: боковые — с 1 по 4 по часовой стрелке, основания — 5 и 6. Группа, действующая на П — $Z_4 = \langle\, t\,\rangle$, t — поворот на 90° по часовой стрелке.

$g \in Z_4$	перестановка	$Type(g)$	$w(g)$	$\#$
e	$(1)\ldots(6)$	$\langle\, 6,\, 0, \ldots\,\rangle$	x_1^6	1
t, t^3	$(1234)(5)(6)$	$\langle\, 2,\, 0,\, 0,\, 1,\, 0,\, 0\,\rangle$	$x_1^2 x_4$	2
t^2	$(12)(34)(5)(6)$	$\langle\, 2,\, 2,\, 0,\, \ldots\,\rangle$	$x_1^2 x_2^2$	1

Цикловой индекс $P = \frac{1}{4}\left[\, x_1^6 + 2x_1^2x_4 + x_1^2x_2^2\,\right]$.

$$\#Col(3) = \frac{3^6 + 2\cdot 3^2 + 3^4}{4} = \frac{3^3(27+2+3)}{4} = 27{\cdot}8 = 216.$$

Задача ТП-1-8

Найти число различных вариантов раскраски граней тетраэдра в 2 и 3 цвета.

Решение. Цикловой индекс:

$$P(T \underset{\alpha}{:} F, x_1, \ldots, x_4) \;=\; \frac{1}{12}\left[\,x_1^4 + 8x_1x_3 + 3x_2^2\,\right].$$

$$\#Col(2) \;=\; \frac{2^4 + 11\cdot 2^2}{3\cdot 2^2} \;=\; \frac{4+11}{3} \;=\; 5\,.$$

$$\#Col(3) \;=\; \frac{3^4 + 11\cdot 3^2}{3\cdot 4} \;=\; \frac{27+33}{4} \;=\; \frac{60}{4} \;=\; 15.$$

Задача ТП-1-9 I

Найти число различных вариантов раскраски рёбер тетраэдра в 2 *и* 3 *цвета.*

Решение. Группа $T = \langle t, f \rangle$, $t^3 = f^2 = e$, $|T| = 12$, где

t — вращение на 120° вокруг оси, проходящей через вершину и центр симметрии, 4 оси;
f — вращение на 180° вокруг оси, проходящей через середины противоположных рёбер, 3 оси.

Обозначим через E множество рёбер тетраэдра — $|E| = 6$ — и обозначим их цифрами от 1 до 6, считая, что рёбра 1, 2 и 3 иницидентны одной вершине, а ось вращения, задаваемого элементом f, проходит через середины рёбер 1 и 6.
Найдём цикловой индекс.

Задача ТП-1-9 II

$g \in T$	$Type(g)$	$w(g)$	#
$e = (1)\ldots(6)$	$\langle\, 6,\, 0,\, \ldots \rangle$	x_1^6	1
$t, t^2 = (123)(456)$	$\langle\, 0,\, 0,\, 2,\, 0,\, \ldots \rangle$	x_3^2	8
$f = (1)(23)(45)(6)$	$\langle\, 2,\, 2,\, 0,\, \ldots \rangle$	$x_1^2 x_2^2$	3
			12

$$P(T \underset{\alpha}{:} E, x_1, \ldots, x_6) \;=\; \frac{1}{12}\left[\, x_1^6 + 8x_3^2 + 3x_1^2 x_2^2 \,\right].$$

$$\#Col(2) \;=\; \frac{2^6 + 8 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^4}{3 \cdot 2^2} \;=\; \frac{15 + 9 + 12}{3} \;=\; 5{+}3{+}4 \;=\; 12,$$

$$\#Col(3) \;=\; \frac{3^6 + 8 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3^4}{3 \cdot 4} \;=\; \frac{3 \cdot (81 + 8 + 27)}{4} \;=$$

$$=\; \frac{3 \cdot (80 + 8 + 28)}{4} \;=\; 3 \cdot (20 + 2 + 7) \;=\; 3 \cdot 29 \;=\; 87.$$

Задача ТП-1-10

Найти число различных вариантов раскраски <u>рёбер</u> куба в 2 цвета.

<u>Решение</u>. Цикловой индекс:

$$P(O \underset{\alpha}{:} R) = \frac{1}{24}\left[\, x_1^{12} + 6x_4^3 + 3x_2^6 + 6x_1^2x_2^5 + 8x_3^4 \,\right]$$

$$\#Col(2) = \frac{2^{12} + 6\cdot 2^3 + 3\cdot 2^6 + 7\cdot 2^7}{3\cdot 2^3} =$$

$$= \frac{2\cdot(2^8+3+12+7\cdot 8)}{3} = \frac{2\cdot(256+3+12+56)}{3} =$$

$$= \frac{2\cdot(252+3+12+60)}{3} = 2\cdot(84+11+4+20) = 2\cdot 109 = 218.$$

Задача ТП-1-11

Найти число различных вариантов раскраски вершин куба в 2 *и* 3 *цвета.*

Решение. Цикловой индекс:

$$P(O \underset{\alpha}{:} V) = \frac{1}{24}\left[x_1^8 + 6x_4^2 + 9x_2^4 + 8x_1^2x_3^2\right]$$

$$\#Col(2) = \frac{2^8 + 6\cdot 2^2 + 9\cdot 2^4 + 2^7}{3\cdot 2^3} = \frac{32+3+18+16}{3} =$$

$$= \frac{30+3+18+18}{3} = 10+1+12 = 23.$$

$$\#Col(3) = \frac{3^8 + 6\cdot 3^2 + 9\cdot 3^4 + 8\cdot 3^4}{3\cdot 8} = \frac{9\cdot(3^5+2+27+24)}{8} =$$

$$= \frac{9\cdot 296}{8} = 9\cdot 37 = 333.$$

Задача ТП-2-1

Сколькими геометрически различными способами три абсолютно одинаковые мухи могут усесться в вершинах правильного семиугольника, нарисованного на листе бумаги?

Решение. Множество T — вершины семиугольника, на которые действует группа $Z_7 = \langle t \rangle$, $t^7 = e$.

$g \in Z_7$	$Type(g)$	$w(g)$	кол-во
e	$\langle 7, 0, \ldots \rangle$	x_1^7	1
$t, t^2, \ldots, t^6$	$\langle 0, \ldots, 0, 1 \rangle$	x_7	6
Всего			7

Задача ТП-2-1...

Цикловой индекс самодействия Z_7:

$$P_{Z_7}(x_1, \ldots, x_7) = \frac{1}{7}\left[\, x_1^7 + 6x_7 \,\right] = \frac{1}{7}\sum_{d|7}\varphi(d)x_d^{7/d}.$$

Число различных раскрасок в 2 цвета (муха есть/нет), при условии окраски ровно 3 вершин из 7 есть коэффициент u_3 при y^3 после подстановки $x_1 \mapsto y+1$, $x_7 \mapsto y^7+1$ в P_{Z_7}:

$$P(y) = \frac{1}{7}\left[\,(y+1)^7 + 6(y+1)\,\right] = \frac{1}{7}\left[\,\ldots + C_7^3 y^3 + \ldots\,\right].$$

$$u_3 = \frac{7!}{7\cdot 3!\cdot 4!} = \frac{5\cdot 6}{2\cdot 3} = 5.$$

Задача ТП-2-2

Боковые грани правильной 6-угольной пирамиды окрашиваются в красный, синий и зелёный цвета. Определить

(а) *число различных 2- и 3-цветных пирамид;*

(б) *число пирамид с одной красной гранью;*

(в) *число пирамид, у которых не менее трёх красных граней.*

Решение. Имеем транзитивное самодействие Z_6.

(а) Общее число пирамид.

$$P(Z_6) = \frac{1}{6}\sum_{d|6}\varphi(d)\,x_d^{6/d} = \frac{1}{6}\left[\,x_1^6 + x_2^3 + 2x_3^2 + 2x_6\,\right].$$

Задача ТП-2-2...

$$P(Z_6) = \frac{1}{6}\left[\, x_1^6 + x_2^3 + 2x_3^2 + 2x_6 \,\right].$$

$$\#Col(2) = \frac{2^6 + 2^3 + 2\cdot 2^2 + 2\cdot 2}{2\cdot 3} = \frac{2\cdot(16+2+2+1)}{3} = 14.$$

$$\#Col(3) = \frac{3^6 + 3^3 + 2\cdot 3^2 + 2\cdot 3}{2\cdot 3} = \frac{243+9+6+2}{2} =$$

$$= \frac{242+10+6+2}{2} = 121+5+3+1 = 130.$$

Задача ТП-2-2...

(б, в) Число пирамид с 1 и $3 \leqslant$ красными гранями.

Полагаем $y_1 = y,\ y_2 = y_3 = 1$ (следим только за красными гранями), $x_1 = y + 2,\ x_2 = y^2 + 2,\ x_3 = y^3 + 2.$

$$P(y) = \frac{1}{6}\left[\,(y+2)^6 + (y^2+2)^3 + 2(y^3+2)^2 + 2(y^6+2)\,\right] =$$

$$= \frac{1}{6}\left[\,u_0 + u_1 y + u_2 y^2 + \ldots + u_6 y^6\,\right] =$$

$$= \frac{1}{6}\left[\,\left(2^6 + 2^3 + 2^3 + 4\right) + 6\cdot 2^5 y + \left(16\cdot 15 + 2\cdot 3\cdot 2^2\right) y^2 + \ldots\right].$$

$u_0 = 84/6 = 14, \quad u_1 = 2^5 = 32, \quad u_2 = (240{+}24)/6 = 44.$

Число пирамид с:

(б) одной красной гранью — $u_1 = 32$,

(в) не менее, чем 3 красными гранями —

$\#Col(3) - (u_0 + u_1 + u_2) = 130 - (14 + 32 + 44) = 130 - 90 = 40.$

Задача ТП-2-3

Имеются плоские бусины, окрашенные с одной стороны в красный, синий и зелёный цвета. Из них составляют ожерелья, содержащие по 8 *в равноотстоящих точках окружности. Определить*

а) *число различных* 3*-цветных ожерелий;*
б) *число ожерелий, у которых не менее трёх красных бусин?*

Решение. Здесь везде — транзитивное самодействие циклической группы Z_8.

$$D(8) = \{1, 2, 4, 8\},\ \varphi(1) = \varphi(2) = 1,\ \varphi(4) = 2,\ \varphi(8) = 4,$$

$$P(Z_8) = \frac{1}{8}\sum_{d|8}\varphi(d)\, x_d^{8/d} = \frac{1}{8}\left[\, x_1^8 + x_2^4 + 2x_4^2 + 4x_8 \,\right].$$

Задача ТП-2-3... I

а) Общее число ожерелий:

$$\#Col(3) = \frac{3^8 + 3^4 + 2 \cdot 9 + 4 \cdot 3}{8} = \frac{6561 + 81 + 18 + 12}{8} =$$
$$= \frac{6560 + 80 + 32}{8} = 820 + 10 + 4 = 834.$$

б) Подсчитаем число X ожерелий, в которых число красных бусин не более 3 (т.е. 0, 1 и 2) и вычтем полученное количество из 834.
Полагаем $y_1 = y$, $y_2 = y_3 = 1$ (следим только за бусинами красного цвета).

Найдём коэффициенты u_0, u_1, u_2 при y_0, y_1, y_2 в производящем многочлене W при подстановке
$x_k = y^k + 2,\ k = 1, \ldots, 8.$

Задача ТП-2-3... II

$$P(Z_8) \;=\; \frac{1}{8}\left[\, x_1^8 + x_2^4 + 2x_4^2 + 4x_8 \,\right]$$

$$W \;=\; \frac{1}{8}\left[\, (y+2)^8 + (y^2+2)^4 + 2(y^4+2)^2 + 4(y^8+2) \,\right] \;=$$

$$=\; u_0 + u_1 y + u_2 y^2 + \ldots + u_8 y^8 \;=$$

$$=\; \frac{1}{2^3}\left[\, (2^8 + 2^4 + 2\cdot 2^2 + 8) + 8\cdot 2^7 y + (C_8^2\cdot 2^6 + 4\cdot 2^3)y^2 + \ldots \,\right].$$

$$u_0 \;=\; 2^5 + 2 + 1 + 1 \;=\; 36, \qquad u_1 \;=\; 128,$$

$$u_2 \;=\; 28\cdot 8 + 4 \;=\; 224 + 4 \;=\; 228.$$

Отсюда
$\#Col(3 \leqslant) \;=\; 834 - (36 + 128 + 228) \;=\; 834 - 392 \;=\; 442.$

Задача ТП-2-4 I

Грани куба раскрашивают в два цвета — красный и синий. Сколько существует кубов

1) *различно окрашенных?*
2) *у которых не менее* 4 *граней красные* ($\#Col(\geqslant 4)$)*?*

<u>Решение</u>. Цикловой индекс:

$$P(O \underset{\alpha}{:} F) = \frac{1}{3 \cdot 2^3}\left[x_1^6 + \underline{6x_1^2x_4} + 3x_1^2x_2^2 + \underline{6x_2^3} + 8x_3^2\right].$$

1) $\#Col(2) = \frac{2^6+12\cdot 2^3+3\cdot 2^4+2^5}{3\cdot 2^3} = \frac{2^3+12+6+4}{3} = \frac{30}{3} = 10.$

2) Полагаем $w(1) = y,\ w(2) = 1,\ x_k = y^k + 1,\ k = \overline{1,6}.$

$$W = \frac{1}{24}\Big[(y+1)^6 + 6(y+1)^2(y^4+1) + 3(y+1)^2(y^2+1)^2 + 6(y^2+1)^3 + 8(y^3+1)^2\Big].$$

Задача ТП-2-4 II

$\#Col(\geqslant 4) = u_4 + u_5 + u_6$ — число кубов с 4, 5 и 6 красными гранями соответственно. Очевидно $u_5 = u_6 = 1$.

Раскрывая W, находим:

$$W = \frac{1}{24}\left[\ldots + C_6^4 y^4 + \ldots + 6(y^2 + 2y + 1)(\underline{y^4} + 1) + \right.$$
$$+3(\underline{y^2} + 2y + 1)(\underline{y^4} + 2\underline{y^2} + 1) +$$
$$\left. +6(y^6 + 3\underline{y^4} + 3y^2 + 1) + 8(y^6 + 2y^3 + 1)\right].$$

Откуда $u_4 = \dfrac{15 + 6 + 9 + 18}{3 \cdot 8} = \dfrac{5 + 2 + 3 + 6}{8} = \dfrac{16}{8} = 2.$

Итого $\#Col(\geqslant 4) = 1 + 1 + 2 = 4.$

Задача ТП-2-5 I

Для раскраски сторон квадрата на стеклянной пластинке используют 3 цвета — красный, синий и зелёный. Сколько можно получить

1) *разнораскрашенных квадратов?*
2) *квадратов с 1 красным ребром и не более 2 синих?*

Решение. Цикловой индекс:

$$P(D_4) = \frac{1}{8}\left[x_1^4 + 2x_4 + 3x_2^2 + 2x_1^2 x_2 \right]$$

1)
$$\#Col(3) = \frac{1}{8}[3^4 + 2\cdot 3 + 3\cdot 3^2 + 2\cdot 3^2\cdot 3] = \frac{81+6+27+54}{8} =$$
$$= \frac{168}{8} = \frac{87+81}{8} = 21.$$

Задача ТП-2-5 II

2) При раскраске в 3 цвета: $x_k = y_1^k + y_2^k + y_3^k,\ k = \overline{1,4}$.
Следим только за красным (y_1) и синим (y_2) цветами:
$x_k = y_1^k + y_2^k + 1,\ k = \overline{1,4}$. Находим $u_{10} + u_{11} + u_{12}$.

$$W = \frac{1}{8}\,[\,(y_1 + (y_2+1))^4 + 2(y_1^4 + y_2^4 + 1) +$$
$$+\,3(y_1^2 + (y_2^2+1))^2 + 2(y_1 + (y_2+1))^2(y_1^2 + y_2^2 + 1)\,]\boxed{=}$$

нас интересуют только члены с y_1^1 (красное ребро — одно)

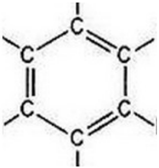
$$\boxed{=}\ \frac{1}{8}\,[\,y_1^4 + 4y_1^3(y_2+1) + 6y_1^2(y_2+1)^2 + \underline{4y_1(y_2+1)^3} + (y_2+1) + \ldots$$
$$\ldots + 2(y_1^2 + \underline{2y_1(y_2+1)} + (y_2+1)^2)(y_1^2 + y_2^2 + 1)\,] =$$
$$= \frac{1}{8}\,[\ldots + 4y_1(y_2+1)^3 + 4y_1(y_2+1)(y_2^2+1))] =$$
$$= \frac{1}{8}\,[\,\ldots + 4y_1(y_2^3 + \underline{3y_2^2 + 3y_2^1 + 1}) + 4y_1(y_2^3 + \underline{y_2 + y_2^2 + 1})\,]\boxed{=}$$

Задача ТП-2-5 III

нас интересуют только члены с y_2^0, y_2^1 и y_2^2 при y_1 (синих рёбер — 0, 1, 2)

$$\boxed{=}\ \frac{1}{8}\left[4\cdot 7+4\cdot 3\right] = \frac{4\cdot 10}{8} = 5\,.$$

Задача ТП-2-6



Присоединяя к свободным связям углерода бензольного кольца атомы водорода H *или метил* CH_3, *можно получить молекулы разных веществ (ксилол, бензол и др.).*

1) *Сколько химически разных молекул можно получить таким путём?*
2) *Сколько из них молекул с присоединёнными* $0, \ldots, 6$ *атомами водорода?*

Задача ТП-2-6... I

Решение. Самодействие группы диэдра D_6.

1) Имеем $D_6 = \langle\, t,\, f,\, s\, \rangle$, $t^4 = f^2 = s^2 = e$, $|D_6| = 12$ — группа диэдра порядка 6, где

> t — вращение на 60° вокруг центра квадрата;
> f — симметрия относительное прямой, проходящей через середины противоположных сторон $(3$ оси$)$;
> s — симметрия относительное прямой, проходящей через противоположные вершин $(3$ оси$)$.

Пронумеруем последовательно вершины правильного 6-угольника $1, \ldots, 6$.

Перестановки ниже указаны для случая, когда ось f проходит через середины сторон $(2\text{-}3)$ и $(5\text{-}6)$, а ось s — через вершины 1 и 4.

Задача ТП-2-6... II

$g \in D_6$	перестановка	$Type(g)$	$w(g)$	#
e	$(1)\ldots(6)$	$\langle\, 6,\, 0,\, \ldots\, 0 \,\rangle$	x_1^6	1
t, t^5	(123456)	$\langle\, 0,\, \ldots,\, 0,\, 1 \,\rangle$	x_6^1	2
t^2, t^4	$(135)(246)$	$\langle\, 0,\, 0,\, 2, \ldots\, 0 \,\rangle$	x_3^2	2
t^3	$(14)(25)(36)$	$\langle\, 0,\, 3,\, 0, \ldots\, 0 \,\rangle$	x_2^3	1
f	$(14)(23)(56)$	$\langle\, 0,\, 3,\, 0,\, \ldots\, 0 \,\rangle$	x_3^2	3
s	$(1)(4)(26)(35)$	$\langle\, 2,\, 2,\, 0,\, \ldots \,\rangle$	$x_1^2 x_2^2$	3
				12

Цикловой индекс: $P(D_6) = \dfrac{1}{12}\left[x_1^6 + 2x_6 + 2x_3^2 + 4x_2^3 + 3x_1^2 x_2^2\right]$.

Всего молекул — подстановка $x_1 = \ldots = x_6 = 2$ (H и метил $\mathrm{CH_3}$):

$$M = \frac{64 + 4 + 8 + 32 + 3 \cdot 16}{3 \cdot 4} = \frac{16 + 1 + 2 + 8 + 12}{3} = \frac{39}{3} = 13$$

Задача ТП-2-6... III

2) Число молекул с $0, \ldots, 6$ атомами водорода — обозначение $y_1 = \mathrm{H}$, $y_2 = 1$ и подстановка $x_k = \mathrm{H}^k + 1$, $k = \overline{1,6}$ в P.

$$W = \frac{1}{12}\Big[(\mathrm{H}+1)^6 + 3(\mathrm{H}+1)^2(\mathrm{H}^2+1)^2 + 4(\mathrm{H}^2+1)^3 + \\ +2(\mathrm{H}^3+1)^2 + 2(\mathrm{H}^6+1)\Big] = \\ = \mathrm{H}^6 + \mathrm{H}^5 + 3\cdot\mathrm{H}^4 + 3\cdot\mathrm{H}^3 + 3\cdot\mathrm{H}^2 + \mathrm{H} + 1\,.$$

Итого: молекул с числом атомов водорода (как радикала) — $\mathrm{H} = 0, 1, 5$ и 6 — по 1 шт., $\mathrm{H} = 2, 3$ и 4 — по 3 шт., всего — 13.

Разделы I

Литература I

Белов В.В., Воробьев Е.М., Шаталов В.Е. Теория графов. — М.: Высшая школа, 1976.

Лидл Р., Пильц Г. Прикладная абстрактная алгебра: Учебное пособие. — Екатеринбург: Изд.-во Урал. ун.-та, 1996.

Нефедов В.Н., Осипова В.А. Курс дискретной математики. М.: Изд-во МАИ, 1992.

Прикладная комбинаторная математика. Сборник статей / Под. ред. Э.Бэккенбаха. — М.: Изд-во Мир, 1968.

Воронин В.П. Дополнительные главы дискретной математики. — М.: ф-т ВМК, 2002. (http://padabum.com/d.php?id=10281)