

Прикладной статистический анализ данных.  
2. Параметрическая проверка гипотез.

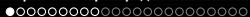
Рябенко Евгений  
riabenko.e@gmail.com

I/2016

## О нормальном распределении

Благодаря центральной предельной теореме и удобству вывода критериев для нормально распределённых выборок методы, основанные на предположении о нормальности данных, наиболее широко распространены.

- Перед использованием методов, предполагающих нормальность, стоит проверить нормальность.
- Если принять предположение о нормальности, то можно применять более мощные критерии. Зачастую они также чувствительны к небольшим отклонениям от нормальности.
- Если гипотеза нормальности отвергается, следует использовать непараметрические методы.



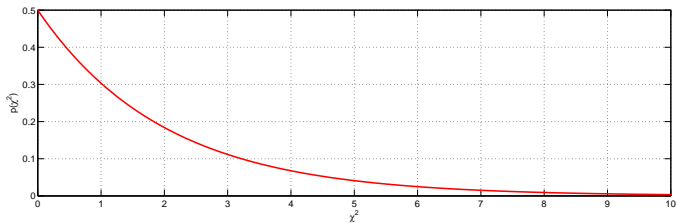
# Критерий Харке-Бера

выборка:  $X^n = (X_1, \dots, X_n)$ ;

нулевая гипотеза:  $H_0: X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ;

альтернатива:  $H_1: H_0$  неверна;

статистика:  $\chi^2(X^n) = \frac{n}{6}(g_1^2 + \frac{1}{4}g_2^2)$ ;  
 $\chi^2(X^n) \sim \chi_2^2$  при  $H_0$ ;



достигаемый уровень значимости:

$$p(\chi^2) = 1 - pchisq(\chi^2, 2).$$

# Критерий Шапиро-Уилка

выборка:  $X^n = (X_1, \dots, X_n)$ ;

нулевая гипотеза:  $H_0: X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ;

альтернатива:  $H_1: H_0$  неверна;

статистика:  $W(X^n) = \frac{\left(\sum_{i=1}^n a_i X_{(i)}\right)^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2},$

$$(a_1, \dots, a_n) = \frac{m^T V^{-1}}{(m^T V^{-1} V^{-1} m)},$$

$m = (m_1, \dots, m_n)^T$  — матожидания порядковых статистик  $N(0, 1)$ ,  $V$  — их ковариационная матрица;

$W(X^n)$  при  $H_0$  имеет табличное распределение.

Значения  $a_i$  также табулированы.

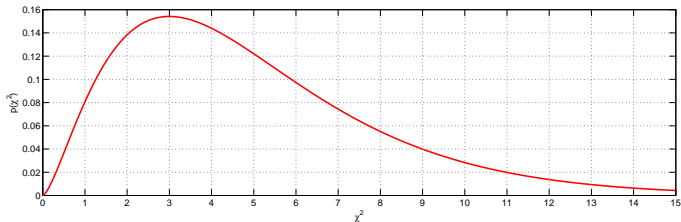
## Критерий согласия Пирсона (хи-квадрат)

выборка:  $X^n = (X_1, \dots, X_n)$ ;  
 нулевая гипотеза:  $H_0: X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ;  
 альтернатива:  $H_1: H_0$  неверна;

статистика: 
$$\chi^2(X^n) = \sum_{i=1}^K \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i};$$

$$\chi^2(X^n) \sim \begin{cases} \chi_{K-1}^2, & \mu, \sigma \text{ заданы,} \\ \chi_{K-3}^2, & \mu, \sigma \text{ оцениваются} \end{cases} \text{ при } H_0;$$

$[a_i, a_{i+1}]$ ,  $i = 1, \dots, K$  — интервалы гистограммы,  
 $n_i$  — число элементов выборки в  $[a_i, a_{i+1}]$ ,  
 $p_i = F(a_{i+1}) - F(a_i)$  — вероятность попадания  
 в  $i$ -й интервал при  $H_0$ .



Недостатки:

- разбиение на интервалы неоднозначно;
- требует больших выборок ( $np_i > 5$  в 80% ячеек).

# Критерии, основанные на эмпирической функции распределения

Ряд критериев согласия основаны на различиях между  $F(x)$  и  $F_n(x)$ :

- Джини:

$$\int |F_n(x) - F(x)| dx;$$

- Крамера-фон Мизеса:

$$\int (F_n(x) - F(x))^2 dx;$$

- Колмогорова (одновыборочный Колмогорова-Смирнова):

$$\sup_{-\infty < x < \infty} |F_n(x) - F(x)|;$$

- Смирнова-Крамера-фон Мизеса:

$$\int (F_n(x) - F(x))^2 dF(x);$$

## Критерии, основанные на эмпирической функции распределения

- Андерсона-Дарлинга:

$$\int \frac{(F_n(x) - F(x))^2}{F(x)(1 - F(x))} dF(x);$$

- Купера:

$$\sup_{-\infty < x < \infty} (F_n(x) - F(x)) + \sup_{-\infty < x < \infty} (F(x) - F_n(x));$$

- Ватсона:

$$\int \left( F_n(x) - F(x) - \int (F_n(x) - F(x)) dF(x) \right) dF(x);$$

- Фроцини:

$$\int |F_n(x) - F(x)| dF(x).$$

Предполагается, что  $F(x)$  известна с точностью до параметров (если они оцениваются по выборке, нулевое распределение корректируется).

## Критерий Колмогорова (Лиллиефорса)

- выборка:  $X^n = (X_1, \dots, X_n)$ ;
- нулевая гипотеза:  $H_0: X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ;
- альтернатива:  $H_1: H_0$  неверна;
- статистика:  $D(X^n) = \sup_{-\infty < x < \infty} |F_n(x) - \Phi(x)|$ ;
- $D(X^n)$  при  $H_0$  имеет табличное распределение.

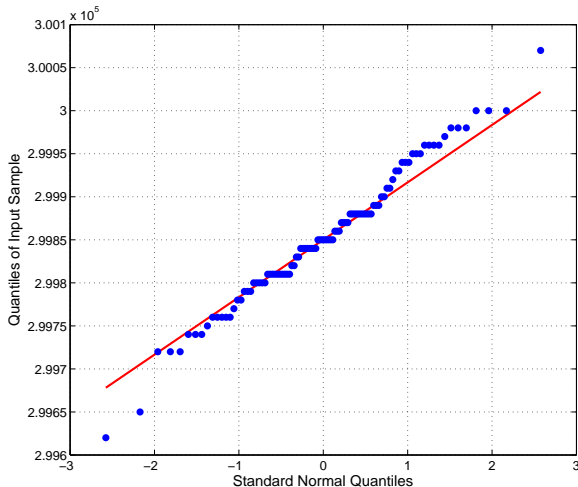
Недостатки:

- имеет низкую мощность;
- не чувствителен к различиям на хвостах распределений.



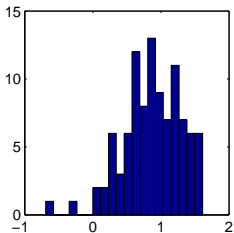
## Q-Q plot

Визуальный метод проверки согласия выборки и распределения — q-q plot (для нормального распределения называется также normal probability plot)

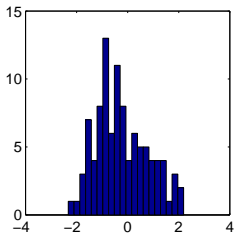


# Q-Q plot

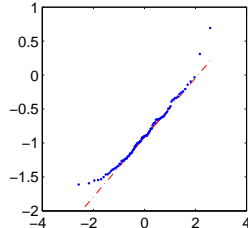
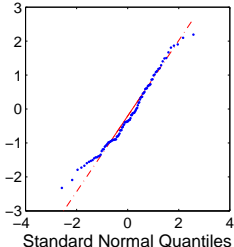
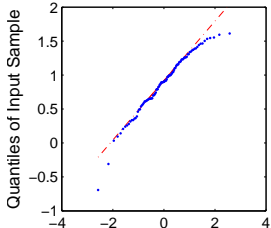
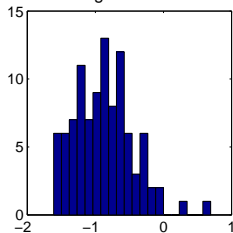
Left skewed



Normal

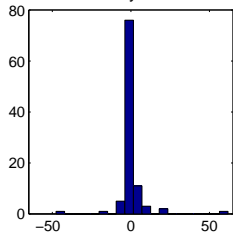


Right skewed

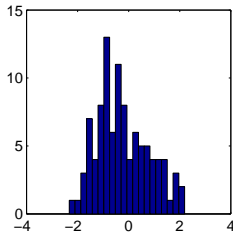


# Q-Q plot

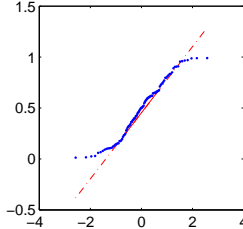
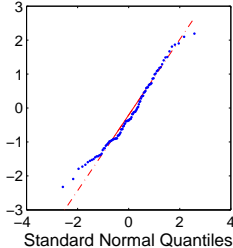
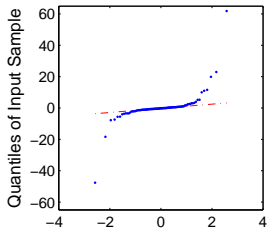
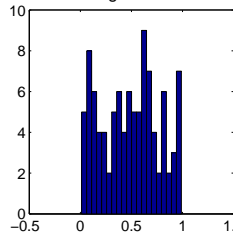
Heavy tails



Normal



Light tails



# Пример

Измерения скорости света:

<https://yadi.sk/d/RWmzy0d3egbLe>

## Итого о проверке нормальности

- **очень маленькие выборки:** любой критерий может пропустить отклонения от нормальности, графические методы бесполезны;
- **очень большие выборки:** любой критерий может выявлять небольшие статистически, но не практически значимые отклонения от нормальности; значительная часть методов, предполагающих нормальность, демонстрируют устойчивость к отклонениям;
- **выбросы:** сильно влияют на выборочные коэффициенты асимметрии и эксцесса;
- **критерий Лиллиефорса:** представляет только исторический интерес;
- **критерий хи-квадрат:** слишком общий, не самый мощный, потеря информации из-за разбиения на интервалы.

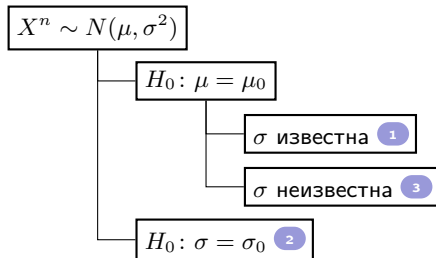
# Итого о проверке нормальности

Сравнение критериев проверки  
нормальности распределения случайных величин

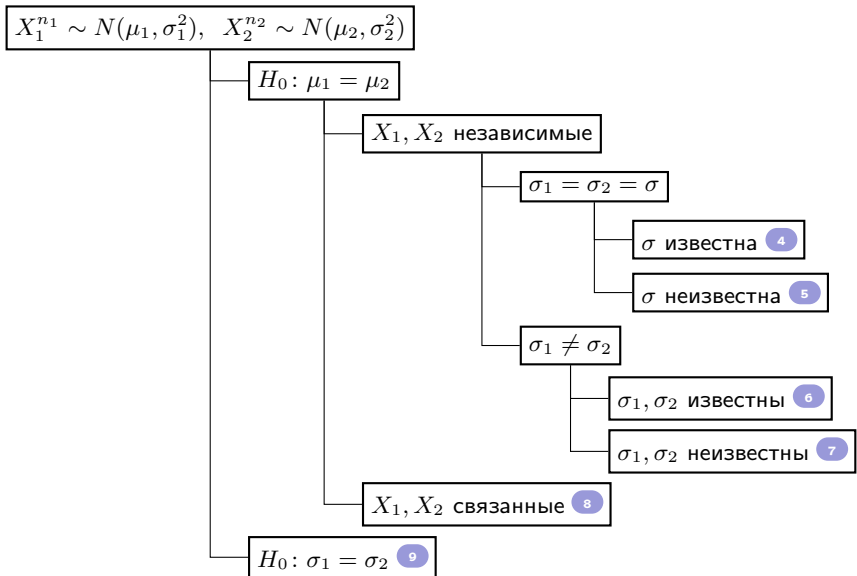
Наименование критерия (раздел)	Характер альтернативного распределения					Ранг
	асимметричное		симметричное		≈ нормальное	
	$\alpha_4 < 3$	$\alpha_4 > 3$	$\alpha_4 < 3$	$\alpha_4 > 3$	$\alpha_4 \approx 3$	
Критерий Шапиро-Уилка (3.2.2.1)	1	1	3	2	2	1
Критерий $K^2$ (3.2.2.16)	7	8	10	6	4	2
Критерий Дарбина (3.1.2.7)	11	7	7	15	1	3
Критерий Д'Агостино (3.2.2.14)	12	9	4	5	12	4
Критерий $\alpha_4$ (3.2.2.16)	14	5	2	4	18	5
Критерий Васичека (3.2.2.2)	2	14	8	10	10	6
Критерий Дэвида-Хартли-Пирсона (3.2.2.10)	21	2	1	9	1	7
Критерий $\chi^2$ (3.1.1.1)	9	20	9	8	3	8
Критерий Андерсона-Дарлинга (3.1.2.4)	18	3	5	18	7	9
Критерий Филлибена (3.2.2.5)	3	12	18	1	9	10
Критерий Колмогорова-Смирнова (3.1.2.1)	16	10	6	16	5	11
Критерий Мартинеса-Иглевича (3.2.2.14)	10	16	13	3	15	12
Критерий Лина-Мудхолкара (3.2.2.13)	4	15	12	12	16	13
Критерий $\alpha_3$ (3.2.2.16)	8	6	21	7	19	14
Критерий Шпигельхальтера (3.2.2.11)	19	13	11	11	8	15
Критерий Саркади (3.2.2.12)	5	18	15	14	13	16
Критерий Смирнова-Крамера-фон Мизеса (3.1.2.2)	17	11	20	17	6	17
Критерий Локка-Спурье (3.2.2.7)	13	4	19	21	17	18
Критерий Оя (3.2.2.8)	20	17	14	13	14	19
Критерий Хегази-Грина (3.2.2.3)	6	19	16	19	21	20
Критерий Муроты-Такеучи (3.2.2.17)	15	21	17	20	20	21

Кобзарь, 3.2.2.19, табл. 80.

## Виды задач: одновыборочные



# Виды задач: двухвыборочные





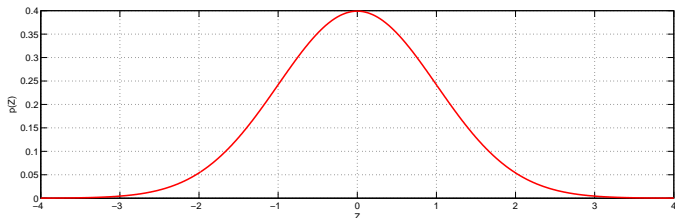
## 1 Z-критерий

выборка:  $X^n = (X_1, \dots, X_n), X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,  
 $\sigma$  известна;

нулевая гипотеза:  $H_0: \mu = \mu_0$ ;

альтернатива:  $H_1: \mu < \neq > \mu_0$ ;

статистика:  $Z(X^n) = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ ;  
 $Z(X^n) \sim N(0, 1)$  при  $H_0$ ;



достигаемый уровень значимости:

$$p(z) = \begin{cases} 1 - pnorm(z, 0, 1), & H_1: \mu > \mu_0, \\ pnorm(z, 0, 1), & H_1: \mu < \mu_0, \\ 2(1 - pnorm(|z|, 0, 1)), & H_1: \mu \neq \mu_0. \end{cases}$$

## 1 Z-критерий

**Пример** (Капji, критерий 1): линия по производству пудры должна обеспечивать средний вес пудры в упаковке 4 грамма, заявленное стандартное отклонение — 1 грамм.

В ходе инспекции выбрано 9 упаковок, средний вес продукта в них составляет 4.6 грамма.

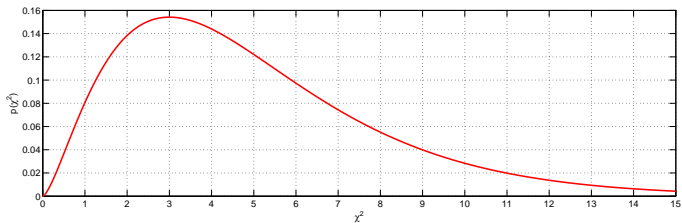
$H_0$ : средний вес пудры в упаковке соответствует норме.

$H_1$ : средний вес пудры в упаковке не соответствует норме  $\Rightarrow p = 0.0719$ , 95% доверительный интервал для среднего веса — [3.95, 5.25] г.

$H_1$ : средний вес пудры в упаковке превышает норму  $\Rightarrow p = 0.0359$ , односторонний нижний 95% доверительный предел для среднего веса — 4.05 г.

## 2 Критерий хи-квадрат

- выборка:  $X^n = (X_1, \dots, X_n), X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ;
- нулевая гипотеза:  $H_0: \sigma = \sigma_0$ ;
- альтернатива:  $H_1: \sigma < \neq > \sigma_0$ ;
- статистика:  $\chi^2(X^n) = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$ ;
- $\chi^2(X^n) \sim \chi_{n-1}^2$  при  $H_0$ ;



достигаемый уровень значимости:

$$p(\chi^2) = \begin{cases} 1 - pchisq(\chi^2, n - 1), & H_1: \sigma > \sigma_0, \\ pchisq(\chi^2, n - 1), & H_1: \sigma < \sigma_0, \\ 2 \min(1 - pchisq(\chi^2, n - 1), pchisq(\chi^2, n - 1)), & H_1: \sigma \neq \sigma_0. \end{cases}$$

## 2 Критерий хи-квадрат

**Пример** (Капji, критерий 15): при производстве микрогидравлической системы делается инъекция жидкости. Дисперсия объёма жидкости — критически важный параметр, установленный стандартом на уровне 9 кв. мл. В выборке из 25 микрогидравлических систем дисперсия объёма жидкости составляет 12 кв. мл.

$H_0$ : дисперсия объёма жидкости соответствует стандарту.

$H_1$ : дисперсия объёма жидкости не соответствует стандарту  $\Rightarrow p = 0.254$ , 95% доверительный интервал для дисперсии — [7.3, 23.2] кв. мл.

$H_1$ : дисперсия объёма жидкости превышает допустимое значение  $\Rightarrow p = 0.127$ , односторонний нижний 95% доверительный предел — 7.9 кв. мл.

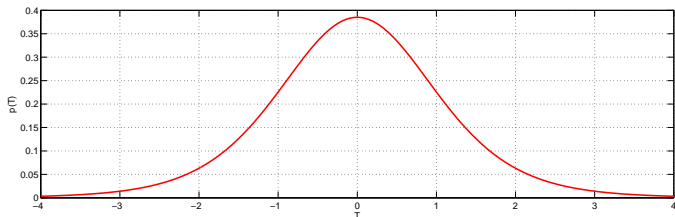
## 3 t-критерий Стьюдента

выборка:  $X^n = (X_1, \dots, X_n), X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,  
 $\sigma$  неизвестна;

нулевая гипотеза:  $H_0: \mu = \mu_0$ ;

альтернатива:  $H_1: \mu < \neq > \mu_0$ ;

статистика:  $T(X^n) = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$ ;  
 $T(X^n) \sim St(n-1)$  при  $H_0$ .



С ростом объёма выборки разница между t- и z-критериями уменьшается.

## 3 t-критерий Стьюдента

**Пример:** в 1975 году с помощью лазерного интерферометра была получена оценка скорости света 299792458 м/с.

Насколько этому значению соответствуют данные эксперимента Майкельсона?

$H_0$ : оценки Майкельсона являются несмещёнными.

$H_1$ : оценки Майкельсона смещены  $\Rightarrow p = 1.8 \times 10^{-11}$ , 95%

доверительный интервал для смещения — [44.2, 75.6] км/с.

$H_1$ : оценки Майкельсона завышены  $\Rightarrow p = 9.1 \times 10^{-12}$ , односторонний нижний 95% доверительный предел для смещения — 46.8 км/с.

4 Z-критерий

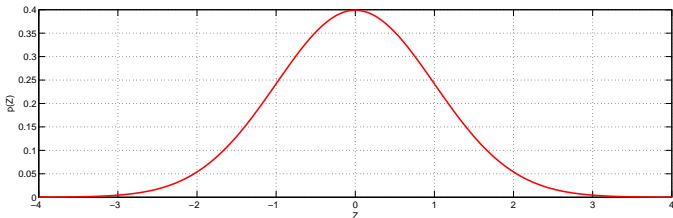
выборки:  $X_1^{n_1} = (X_{11}, \dots, X_{1n_1}), X_1 \sim N(\mu_1, \sigma^2),$   
 $X_2^{n_2} = (X_{21}, \dots, X_{2n_2}), X_2 \sim N(\mu_2, \sigma^2),$   
 $\sigma$  известна;

нулевая гипотеза:  $H_0: \mu_1 = \mu_2;$

альтернатива:  $H_1: \mu_1 < \neq > \mu_2;$

статистика:  $Z(X_1^{n_1}, X_2^{n_2}) = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sigma \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}};$

$Z(X_1^{n_1}, X_2^{n_2}) \sim N(0, 1)$  при  $H_0.$



## 4 Z-критерий

**Пример** (Канжі, критерий 2): два отдела сбыта сравниваются по коэффициенту результативности при выполнении схожих операций. В первом отделе на 9 операциях среднее значение коэффициента результативности составило 1.2, во втором на 16 операциях — 1.7. Дисперсии коэффициента результативности в обоих отделах равны 2.075.

$H_0$ : средняя результативность в обоих отделах одинакова.

$H_1$ : средняя результативность в двух отделах различается  $\Rightarrow p = 0.405$ ,  
95% доверительный интервал для разности —  $[-1.7, 0.7]$ .



## 5 t-критерий Стьюдента

выборки:  $X_1^{n_1} = (X_{11}, \dots, X_{1n_1}), X_1 \sim N(\mu_1, \sigma^2),$   
 $X_2^{n_2} = (X_{21}, \dots, X_{2n_2}), X_2 \sim N(\mu_2, \sigma^2),$   
 $\sigma$  неизвестна;

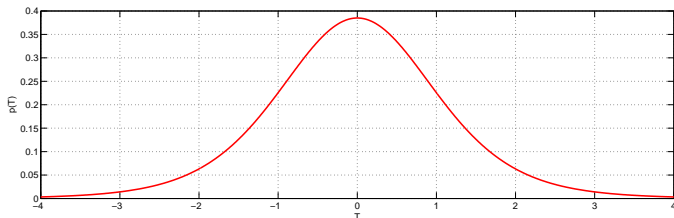
нулевая гипотеза:  $H_0: \mu_1 = \mu_2;$

альтернатива:  $H_1: \mu_1 < \neq > \mu_2;$

статистика:  $T(X_1^{n_1}, X_2^{n_2}) = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{S \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}},$

$$S = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}};$$

$T(X_1^{n_1}, X_2^{n_2}) \sim St(n_1 + n_2 - 2)$  при  $H_0.$



## 5 t-критерий Стьюдента

**Пример** (Капji, критерий 8): чипсы продаются в тридцатиграммовых пакетах двух разновидностей. В выборке из 12 пачек каждого вида средние веса равны 31.75 г и 28.67 г, выборочные дисперсии — 112.25 г<sup>2</sup> и 66.64 г<sup>2</sup>.

$H_0$ : количество чипсов в упаковках двух разновидностей совпадает.

$H_1$ : количество чипсов в упаковках двух разновидностей различается

$\Rightarrow p = 0.433$ , 95% доверительный интервал для разности —  $[-4.9, 11.1]$ .

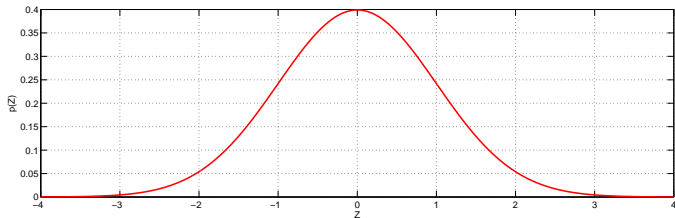
6 Z-критерий

выборки:  $X_1^{n_1} = (X_{11}, \dots, X_{1n_1}), X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2),$   
 $X_2^{n_2} = (X_{21}, \dots, X_{2n_2}), X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2),$   
 $\sigma_1, \sigma_2$  известны;

нулевая гипотеза:  $H_0: \mu_1 = \mu_2;$

альтернатива:  $H_1: \mu_1 < \neq > \mu_2;$

статистика:  $Z(X_1^{n_1}, X_2^{n_2}) = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}};$   
 $Z(X_1^{n_1}, X_2^{n_2}) \sim N(0, 1)$  при  $H_0.$



## 6 Z-критерий

**Пример** (Капji, критерий 3): известно, что одна из линий по расфасовке чипсов даёт упаковки с более вариабельным весом продукта, чем вторая. Дисперсии равны  $0.000576 \text{ г}^2$  и  $0.001089 \text{ г}^2$  соответственно, средние значения веса в выборках из 13 и 8 элементов — 80.02 г и 79.98 г.

$H_0$ : средний вес продукта в упаковках, произведённых на двух линиях, совпадает.

$H_1$ : средние веса продукта в упаковках, произведённых на двух линиях, различаются  $\Rightarrow p = 0.001$ , 95% доверительный интервал для разности —  $[0.039, 0.041]$ .

## 7 t-критерий Стьюдента / Аспина-Уэлша (проблема Беренца-Фишера)

выборки:  $X_1^{n_1} = (X_{11}, \dots, X_{1n_1}), X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2),$   
 $X_2^{n_2} = (X_{21}, \dots, X_{2n_2}), X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2),$   
 $\sigma_1, \sigma_2$  неизвестны;

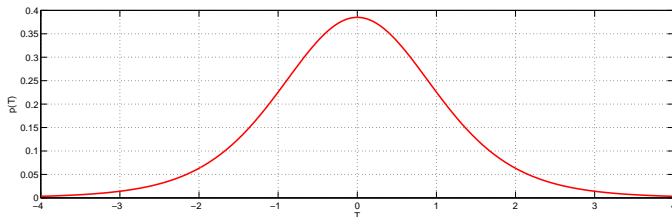
нулевая гипотеза:  $H_0: \mu_1 = \mu_2;$

альтернатива:  $H_1: \mu_1 < \neq > \mu_2;$

статистика:  $T(X_1^{n_1}, X_2^{n_2}) = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}},$

$$\nu = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{S_1^4}{n_1^2(n_1-1)} + \frac{S_2^4}{n_2^2(n_2-1)}};$$

$T(X_1^{n_1}, X_2^{n_2}) \approx \sim St(\nu)$  при  $H_0.$



## 7 t-критерий Стьюдента / Аспина-Уэлша (проблема Беренца-Фишера)

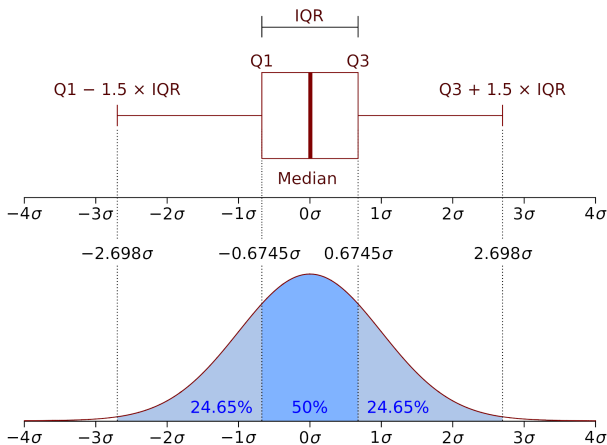
**Пример** (Капји, критерий 9): в связи со слиянием двух финансовых организаций решается вопрос о ликвидации отделов, выполняющих дублирующиеся функции. Рассматриваются две команды, занимающиеся сбытом похожих продуктов; первая продаёт 4 продукта, вторая — 9. Для каждого из продуктов рассчитывается уровень принесённой прибыли на одного работника за две недели, средние значения составляют 3166.0 и 2240.4, дисперсии — 6328.27 и 221661.3.

$H_0$ : эффективность работы двух команд одинакова.

$H_1$ : эффективность работы двух команд различна  $\Rightarrow p = 1.342 \times 10^{-4}$ ,  
95% доверительный интервал для разности — [559.1245, 1292.075].

# Boxplot

Ящик с усами — способ визуализации основных характеристик распределения:



Иногда дополняется доверительным интервалом для медианы и выбросами.

## Пример

Продолжительность жизни крыс:  
<https://yadi.sk/d/Cp9yoQtRegfyu>



## 8 t-критерий Стьюдента для связанных выборок

выборки:  $X_1^n = (X_{11}, \dots, X_{1n}), X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2),$   
 $X_2^n = (X_{21}, \dots, X_{2n}), X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2),$   
 выборки связанные;

нулевая гипотеза:  $H_0: \mu_1 = \mu_2;$

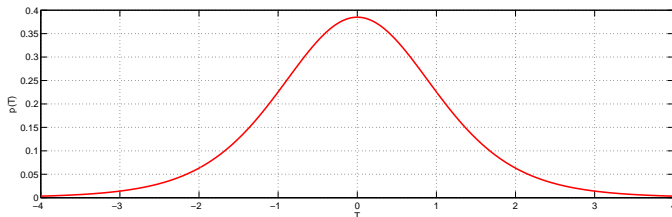
альтернатива:  $H_1: \mu_1 < \neq > \mu_2;$

статистика:  $T(X_1^n, X_2^n) = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{S/\sqrt{n}},$

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (D_i - \bar{D})^2},$$

$$D_i = X_{1i} - X_{2i};$$

$$T(X_1^n, X_2^n) \sim St(n-1) \text{ при } H_0.$$



## 8 t-критерий Стьюдента для связанных выборок

**Пример** (Капжі, критерий 10): на 10 испытуемых сравниваются два лекарства против респираторного заболевания. Каждый из испытуемых вдыхает первое лекарство с помощью ингалятора, после чего проходит упражнение беговой дорожке. Измеряется время достижения максимальной нагрузки. Затем после периода восстановления эксперимент повторяется со вторым лекарством.

$H_0$ : время достижения максимальной нагрузки не отличается для исследуемых лекарств.

$H_1$ : время достижения максимальной нагрузки для исследуемых лекарств отличается  $\Rightarrow p = 0.916$ ; 95% доверительный интервал для разницы —  $[-2.1, 0.9]$ .

# Пример

Пусть имеются следующие связанные выборки:

$$\begin{aligned}
 X_1^n, X_1 &\sim N(0, 1), \\
 X_2^n, X_2 = X_1 + \varepsilon, \varepsilon &\sim N(0.1, 0.25) \Rightarrow X_2 \sim N(0.1, 1.25);
 \end{aligned}$$

требуется оценить разность  $\Delta = \mathbb{E}X_1 - \mathbb{E}X_2$ .  
 Если попарные соответствия элементов известны, лучшая оценка

$\hat{\Delta}_p = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_{1i} - X_{2i})$  имеет дисперсию

$$\mathbb{D}\hat{\Delta}_p = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \mathbb{D}(X_{1i} - X_{2i}) = \frac{1}{n} \mathbb{D}\varepsilon = \frac{1}{2n};$$

мощность 0.8 достигается при  $n \approx 200$ .

Если же попарные соответствия неизвестны, лучшая оценка —  $\hat{\Delta}_i = \bar{X}_1 - \bar{X}_2$ ; её дисперсия:

$$\mathbb{D}\hat{\Delta}_i = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \mathbb{D}X_{1i} + \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \mathbb{D}X_{2i} = \frac{1}{n} + \frac{5}{4n} = \frac{9}{4n}$$

— в 4.5 раза больше; мощность 0.8 достигается при  $n \approx 1900$ .

# Пример

Метилфенидат и способность к подавлению импульсивных поведенческих реакций:

<https://yadi.sk/d/vH-hmNNmehR6Z>

## • F-критерий Фишера

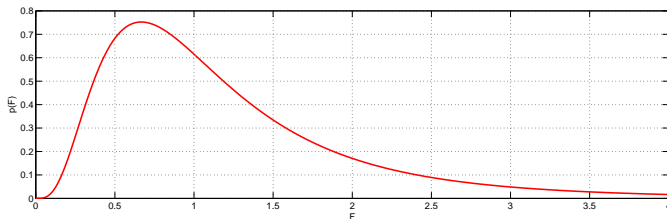
выборки:  $X_1^{n_1} = (X_{11}, \dots, X_{1n_1}), X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2),$   
 $X_2^{n_2} = (X_{21}, \dots, X_{2n_2}), X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2);$

нулевая гипотеза:  $H_0: \sigma_1 = \sigma_2;$

альтернатива:  $H_1: \sigma_1 < \neq > \sigma_2;$

статистика:  $F(X_1^{n_1}, X_2^{n_2}) = \frac{S_1^2}{S_2^2};$

$F(X_1^{n_1}, X_2^{n_2}) \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$  при  $H_0.$

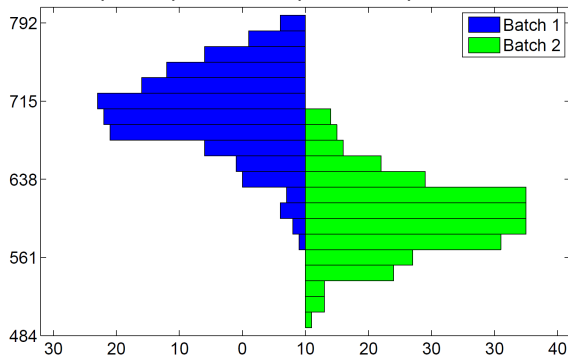


Критерий Фишера неустойчив к отклонениям от нормальности даже асимптотически.

## Ф-критерий Фишера

**Пример** (NIST/industry ceramics consortium for strength optimization of ceramic, 1996): собраны данные о прочности материала 440 керамических изделий из двух партий по 220 в каждой.

Одинакова ли дисперсия прочности в разных партиях?



Гипотезы нормальности не отклоняются критерием Шапиро-Уилка ( $p_1 = 0.2062, p_2 = 0.7028$ ).

Критерий Фишера:  $p = 0.1721, [C_L, C_U] = [0.9225, 1.5690]$ .

# Теоретическая база

$$X^n = (X_1, \dots, X_n), X \sim Ber(p), y \equiv \sum_{i=1}^n X_i.$$

Критерии для проверки гипотез о  $p$  основаны на ММП:

$$L(p) = y \ln p + (n - y) \ln(1 - p),$$

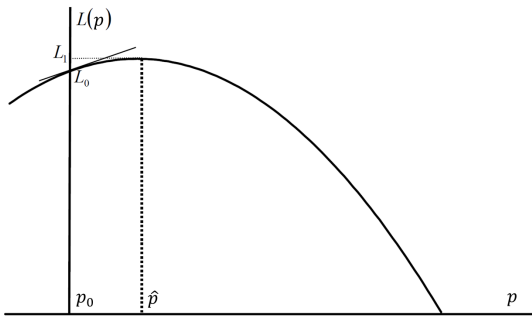
$$l(p) \equiv -\mathbb{E} \frac{\partial^2 L}{\partial p^2} = \frac{n}{p(1-p)},$$

$$\hat{p} = \frac{y}{n},$$

$$\mathbb{E} \hat{p} = p,$$

$$\mathbb{D} \hat{p} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}.$$

Теоретическая база



ММП порождает критерии МП, Вальда и множителей Лагранжа:

$$Z_{MLE} = -2 (L(p_0) - L(\hat{p})) \sim \chi_1^2;$$

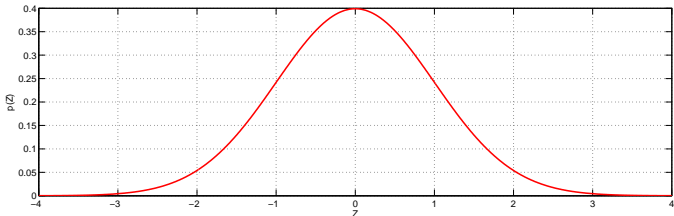
$$Z_W = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{1/l(\hat{p})}} = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}} \sim N(0, 1);$$

$$Z_{LM} = \frac{\left. \frac{\partial L}{\partial p} \right|_{p=p_0}}{\sqrt{l(p_0)}} = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \sim N(0, 1).$$



# Z-критерий для доли

выборка:  $X^n = (X_1, \dots, X_n), X \sim Ber(p)$ ;  
 нулевая гипотеза:  $H_0: p = p_0$ ;  
 альтернатива:  $H_1: p < \neq > p_0$ ;  
 статистика:  $Z(X^n) = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$ ,  
 $Z(X^n) \sim N(0, 1)$  при  $H_0$ .



Выборочное распределение статистики критерия множителей Лагранжа ближе к стандартному нормальному, чем критерия Вальда.

## Z-критерий для доли

**Пример 1** (Королёв, задача 7.2.2): Бенджамин Спок, знаменитый педиатр и автор большого количества книг по воспитанию детей, был арестован за участие в антивоенной демонстрации в Бостоне. Его дело должен был рассматривать суд присяжных. Присяжные назначаются с помощью многоступенчатой процедуры, на очередном этапе которой было отобрано 300 человек. Однако среди них оказалось только 90 женщин. Адвокаты доктора Спока подали протест на предвзятость отбора.

$H_0$ : процедура отбора была беспристрастной, женщины попадали в выборку с вероятностью  $1/2$ .

$H_1$ : предпочтение отдавалось кандидатам-мужчинам  $\Rightarrow p = 2.3 \times 10^{-12}$ .

## Z-критерий для доли

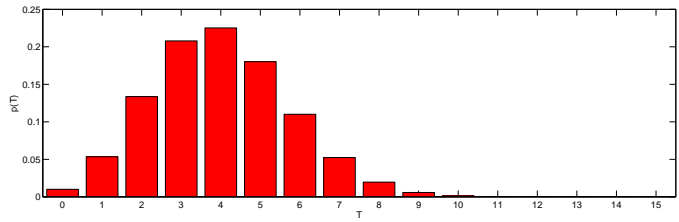
**Пример 2** (Кобзарь, задача 227): нормируемый уровень дефектных изделий в партии  $p_0 = 0.05$ . Из партии извлечена выборка  $n = 20$  изделий, в которой обнаружены при проверке  $t = 2$  дефектных.

$H_0$ : доля дефектных изделий в партии не превосходит нормируемого значения.

$H_1$ : доля дефектных изделий в партии превышает нормируемое значение  
 $\Rightarrow p = 0.15$ .

# Точный критерий для доли

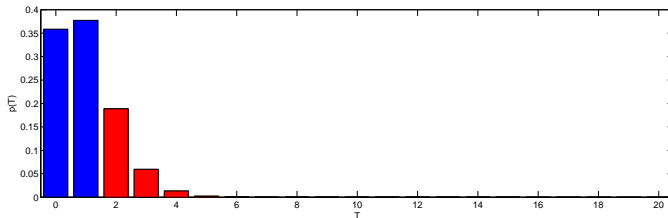
выборка:  $X^n = (X_1, \dots, X_n), X \sim Ber(p)$ ;  
 нулевая гипотеза:  $H_0: p = p_0$ ;  
 альтернатива:  $H_1: p < \neq > p_0$ ;  
 статистика:  $T(X^n) = y$ ;  
 $T(X^n) \sim Bin(n, p_0)$  при  $H_0$ .



Поскольку нулевое распределение дискретно, нельзя добиться, чтобы вероятность ошибки первого рода была равна в точности  $\alpha$ .  
 Критерий консервативен — истинная вероятность ошибки первого рода ограничена уровнем значимости сверху.

## Точный критерий для доли

## Пример 2:



$H_0$ : доля дефектных изделий в партии не превосходит нормируемого значения.

$H_1$ : доля дефектных изделий в партии превышает нормируемое значение  
 $\Rightarrow p = 0.26$ .

## Доверительные интервалы для доли

$100(1 - \alpha)\%$  доверительный интервал Вальда:

$$\hat{p} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

В примере 1 95% доверительный интервал Вальда —  $[0.2481, 0.3519]$ .

В примере 2 —  $[-0.0315, 0.2315]$ .

Недостатки:

- доверительные пределы могут выходить за границы  $[0, 1]$  (вообще, при  $\hat{p} \in (0, 1)$  нежелательно даже  $C_L = 0$  и  $C_U = 1$ );
- при  $\hat{p} = 0$  и  $\hat{p} = 1$  вырождается в точку;
- антиконсервативен — накрывает  $p$  реже, чем в  $100(1 - \alpha)\%$  случаев.

# Доверительные интервалы для доли

Более точный доверительный интервал Уилсона (score confidence interval):

$$\left[ \hat{p} \left( \frac{n}{n+z} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{z}{n+z} \right) \right] \pm z \sqrt{\frac{1}{n+z} \left[ \hat{p} (1 - \hat{p}) \left( \frac{n}{n+z} \right) + \frac{1}{2} \frac{1}{2} \left( \frac{z}{n+z} \right) \right]},$$

$$z \equiv z_{1-\frac{\alpha}{2}}^2.$$

Центр интервала —  $\frac{y+z/2}{n+z}$ .

В примере 1 95% доверительный интервал Уилсона — [0.2509, 0.3541].

В примере 2 — [0.0279, 0.3010].

# Z-критерий для разности двух долей, независимые выборки

выборки:  $X_1^{n_1} = (X_{11}, \dots, X_{1n_1}), X_1 \sim \text{Ber}(p_1);$   
 $X_2^{n_2} = (X_{21}, \dots, X_{2n_2}), X_2 \sim \text{Ber}(p_2),$  выборки независимы;

Исход \ Выборка	Выборка	
	$X_1^{n_1}$	$X_2^{n_2}$
1	a	b
0	c	d
$\Sigma$	$n_1$	$n_2$

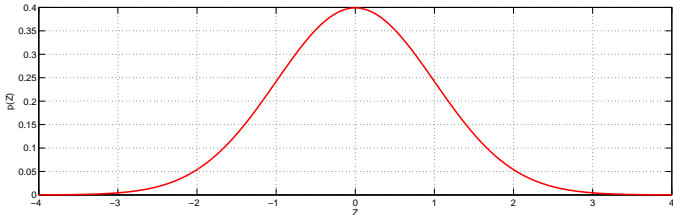
$$p_1 = \frac{\mathbb{E}A}{n_1}, \hat{p}_1 = \frac{a}{n_1}, p_2 = \frac{\mathbb{E}B}{n_2}, \hat{p}_2 = \frac{b}{n_2};$$

нулевая гипотеза:  $H_0: p_1 = p_2;$

альтернатива:  $H_1: p_1 < \neq > p_2;$

статистика:  $Z(X_1^{n_1}, X_2^{n_2}) = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{P(1-P)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}, P = \frac{\hat{p}_1 n_1 + \hat{p}_2 n_2}{n_1 + n_2};$

$$Z(X_1^{n_1}, X_2^{n_2}) \sim N(0, 1) \text{ при } H_0.$$





Z-критерий для разности двух долей, независимые выборки

**Пример** (Кобзарь, задача 226): в двух партиях объёмами  $n_1 = 100$  шт. и  $n_2 = 200$  шт. обнаружено соответственно  $t_1 = 3$  и  $t_2 = 5$  дефектных приборов. Необходимо проверить гипотезу о равенстве долей дефектных приборов в партиях.

		Номер партии	
		1	2
Наличие дефекта	Есть	$a = 3$	$b = 5$
	Нет	$c = 97$	$d = 195$
	Всего	$n_1 = 100$	$n_2 = 200$

- $H_0$ : доли дефектных изделий в партиях равны.
- $H_1$ : доли дефектных изделий в партиях различаются  $\Rightarrow p = 0.8$ .
- $H_1$ : доля дефектных изделий в первой партии выше  $\Rightarrow p = 0.4$ .
- $H_1$ : доля дефектных изделий в первой партии ниже  $\Rightarrow p = 0.6$ .

# Доверительный интервал для разности двух долей

Доверительный интервал Уилсона:

$$[C_L, C_U] = [\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - \delta, \hat{p}_1 - \hat{p}_2 + \varepsilon],$$

$$\delta = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{l_1(1-l_1)}{n_1} + \frac{u_2(1-u_2)}{n_2}},$$

$$\varepsilon = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{u_1(1-u_1)}{n_1} + \frac{l_2(1-l_2)}{n_2}},$$

$l_1, u_1$  — корни уравнения  $|x - \hat{p}_1| = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{x(1-x)}{n_1}}$ ,

$l_2, u_2$  — корни уравнения  $|x - \hat{p}_2| = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{x(1-x)}{n_2}}$ .

В примере 95% доверительный интервал —  $[-0.0331, 0.0616]$ , минимальное значение  $\alpha$ , при котором интервал не содержит нуля — 0.8003.

# Z-критерий для разности двух долей, связанные выборки

выборки:  $X_1^n = (X_{11}, \dots, X_{1n}), X_{1i} \sim \text{Ber}(p_1);$   
 $X_2^n = (X_{21}, \dots, X_{2n}), X_{2i} \sim \text{Ber}(p_2),$  выборки связанные;

$X_1^n \backslash X_2^n$	1	0	$\Sigma$
1	$e$	$g$	$e + g$
0	$f$	$h$	$f + h$
$\Sigma$	$e + f$	$g + h$	$n$

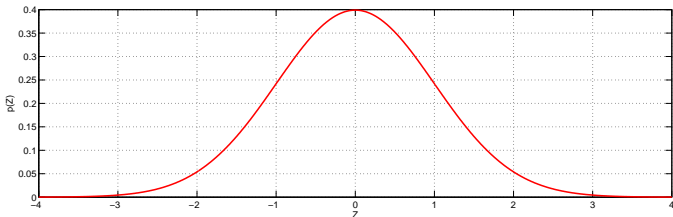
$$p_1 = \frac{\mathbb{E}(E+F)}{n}, \quad \hat{p}_1 = \frac{e+f}{n}, \quad p_2 = \frac{\mathbb{E}(E+G)}{n}, \quad \hat{p}_2 = \frac{e+g}{n};$$

нулевая гипотеза:  $H_0: p_1 = p_2;$

альтернатива:  $H_1: p_1 < \neq > p_2;$

статистика: 
$$Z(X_1^n, X_2^n) = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\frac{f+g - (f-g)^2}{n^3}}} = \frac{f-g}{\sqrt{f+g - \frac{(f-g)^2}{n}}};$$

$$Z(X_1^n, X_2^n) \sim N(0, 1) \text{ при } H_0.$$



## Z-критерий для разности двух долей, связанные выборки

**Пример** (Agresti, табл. 10.1): из опрошенных 1600 граждан Великобритании, имеющих право голоса, 944 высказали одобрение деятельности премьер-министра. Через 6 месяцев эти же люди были опрошены снова, на этот раз одобрение высказали только 880 опрошенных.

I \ II	+	-	$\Sigma$
+	$e = 794$	$g = 150$	944
-	$f = 86$	$h = 570$	656
$\Sigma$	880	720	1600

$H_0$ : рейтинг премьер-министра не изменился.

$H_1$ : рейтинг премьер-министра изменился  $\Rightarrow p = 2.8 \times 10^{-5}$ .

$H_1$ : рейтинг премьер-министра снизился  $\Rightarrow p = 1.4 \times 10^{-5}$ .

$H_1$ : рейтинг премьер-министра повысился  $\Rightarrow p = 0.999986$ .

# Z-критерий для разности двух долей, связанные выборки

Без учёта информации о связи между выборками:

Результат \ Опрос	I	II
+	$a = 994$	$b = 880$
-	$c = 606$	$d = 720$
$\Sigma$	$n_1 = 1600$	$n_2 = 1600$

$H_0$ : рейтинг премьер-министра не изменился.

$H_1$ : рейтинг премьер-министра изменился  $\Rightarrow p = 4.3 \times 10^{-5}$ .

$H_1$ : рейтинг премьер-министра снизился  $\Rightarrow p = 2.1 \times 10^{-5}$ .

$H_1$ : рейтинг премьер-министра повысился  $\Rightarrow p = 0.999979$ .

# Доверительный интервал для разности двух долей

Доверительный интервал Уилсона:

$$[C_L, C_U] = [\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - \delta, \hat{p}_1 - \hat{p}_2 + \varepsilon],$$

$$\delta = \sqrt{dl_1^2 - 2\hat{\phi}dl_1du_2 + du_2^2},$$

$$\varepsilon = \sqrt{du_1^2 - 2\hat{\phi}du_1dl_2 + dl_2^2},$$

$$\hat{\phi} = \begin{cases} \frac{eh-fg}{(e+f)(g+h)(e+h)(f+h)}, & \text{если знаменатель не равен нулю,} \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases}$$

$$dl_1 = \hat{p}_1 - l_1,$$

$$du_1 = u_1 - \hat{p}_1,$$

$$dl_2 = \hat{p}_2 - l_2,$$

$$du_2 = u_2 - \hat{p}_2,$$

$$l_1, u_1 \text{ — корни уравнения } |x - \hat{p}_1| = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}},$$

$$l_2, u_2 \text{ — корни уравнения } |x - \hat{p}_2| = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}.$$

В примере 95% доверительный интервал —  $[0.0214, 0.0590]$ , минимальное значение  $\alpha$ , при котором интервал не содержит нуля —  $3.1 \times 10^{-5}$ .

# Примеры

«Разрушители легенд» и обратная сторона руки:

<https://yadi.sk/d/-chv8FwqehNVm>

Качество бинарных классификаторов (для самостоятельной работы):

<https://yadi.sk/i/1RYBvUcyejVbT>

## Литература

Критерии нормальности:

- Харке-Бера (Jarque-Bera) — Кобзарь, 3.2.2.16;
- Шапиро-Уилка (Shapiro-Wilk) — Кобзарь, 3.2.2.1;
- хи-квадрат (chi-square) — Кобзарь, 3.1.1.1, 3.2.1.1;
- согласия (goodness-of-fit), основанные на эмпирической функции распределения — Кобзарь, 3.1.2, 3.2.1.2.

Для нормальных распределений:

- Z-критерии (Z-tests) — Канжи, №№ 1, 2, 3;
- t-критерии Стьюдента (t-tests) — Канжи, №№ 7, 8, 9;
- критерий хи-квадрат (chi-square test) — Канжи, №15;
- критерий Фишера (F-test) — Канжи, №16.



## Литература

Для распределения Бернулли:

- всё про одновыборочную задачу — Agresti, 1.3, 1.4;
- Z-критерии (Z-tests) — Kanji, №№ 4, 5;
- точный критерий (exact binomial test) — McDonald, <http://www.biostathandbook.com/exactgof.html>;
- доверительные интервалы Уилсона (score confidence intervals) — Newcombe, 1998a, 1998b, 1998c.

Кобзарь А.И. *Прикладная математическая статистика*. — Москва: Физматлит, 2006.

Kanji G.K. *100 statistical tests*. — London: SAGE Publications, 2006.

Agresti A. *Categorical Data Analysis*. — Hoboken: Wiley, 2013.

McDonald J.H. *Handbook of Biological Statistics*. — Baltimore: Sparky House Publishing, 2008.

Newcombe R.G. (1998). *Two-sided confidence intervals for the single proportion: comparison of seven methods*. *Statistics in Medicine*, 17, 857–872.

## Литература

Newcombe R.G. (1998). *Improved confidence intervals for the difference between binomial proportions based on paired data*. *Statistics in Medicine*, 17, 2635–2650.

Newcombe R.G. (1998). *Interval estimation for the difference between independent proportions: comparison of eleven methods*. *Statistics in Medicine*, 17, 873–890.

Королёв В.Ю. *Теория вероятностей и математическая статистика*. — Москва: Проспект, 2008.

NIST/SEMATECH. *e-Handbook of Statistical Methods*.

<http://www.itl.nist.gov/div898/handbook/>