Многомодальные тематические модели на гиперграфах

Жариков Илья Николаевич

zharikov.i.n@yandex.ru

Московский физико-технический институт
Факультет управления и прикладной математики
Кафедра интеллектуальных систем

Научный руководитель: д.ф.-м.н. К. В. Воронцов

Июнь, 2018

Цель исследования

Задача

Построение тематической модели, нахождение тематических векторов (профилей) объектов, выявление множества латентных тем.

Проблема

Большинство существующих тематических моделей описывают только попарные взаимодействия между объектами разных типов (модальностей).

Предлагается

Обобщить методы тематического моделирования на случай, когда исходные взаимодействия объектов не распадаются на попарные.

Гиперграф

Примеры транзакций

- **Данные социальной сети**
  (u, w, d) — пользователь u написал слово w в блоге d
- **Данные сети интернет-рекламы**
  (u, b, d) — пользователь u кликнул баннер b на странице d
- **Данные рекомендательной системы**
  (u, f, s) — пользователь u оценил фильм f в ситуации s
- **Данные финансовых организаций**
  (b, s, g) — покупатель b купил товар g у продавца s

Транзакция $\leftrightarrow$ определенное ребро.

Данные $\leftrightarrow$ ребра **гиперграфа**.

Гиперграф — обобщение графа, в котором ребром могут соединяться не только две вершины, но и любое подмножество вершин.

Пример

Транзакционные данные — наблюдаемые ребра гиперграфа

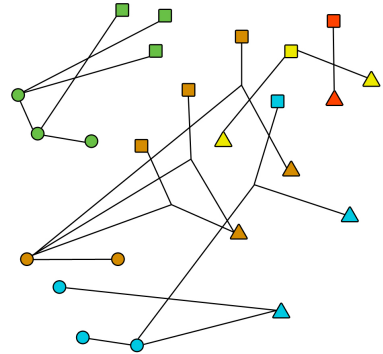
Множество модальностей M:

Множество типов рёбер K:

d					
x					
n_{dx}	3	3	4	2	4

n_{dx} — число ребер (d, x) в гиперграфе

Множество тем T:



Хотим найти тематические вектора **всех** вершин

Постановка задачи

Для оптимизации параметров применим принцип максимума правдоподобия:

$$\sum_{k\in K}\tau_k \sum_{(d,x)\in E_k} n_{dx} \ln \sum_{t\in T} \theta_{td} \prod_{v\in x} \varphi_{vtk} + \underbrace{R(\Phi,\Theta)}_{\text{регуляризатор}} \to \max_{\Phi,\Theta},$$

где τ_k — вес ребёр типа k, $\theta_{td} = p(t \mid d)$, $\varphi_{vtk} = p_k(v \mid t)$.

Ограничения:

$$\sum_{v\in V_m} \varphi_{vtk} = 1,\ \varphi_{vtk} \geqslant 0$$

$$\sum_{t\in T} \theta_{td} = 1,\ \theta_{td} \geqslant 0$$

d — документ
v — вершина
m — модальность
k — тип ребра
t — тема

EM алгоритм

E step. Вычисление распределения тем для каждого (d, x):

$$p_{tdx} = \underset{t\in T}{\operatorname{norm}}\left(\theta_{td}\prod_{v\in x}\varphi_{vtk}\right), \text{ где } \underset{i\in I}{\operatorname{norm}}\, a_i = \frac{\max\{a_i, 0\}}{\sum_{j\in I}\max\{a_i, 0\}}.$$

M step. Оценивание параметров модели:

$$\varphi_{vtk} = \underset{v\in V_m}{\operatorname{norm}}\left(n_{vtk} + \varphi_{vtk}\frac{\partial R}{\partial \varphi_{vtk}}\right); \qquad n_{vtk} = \sum_{(d,x)\in E_k}[v \in x]\,\tau_k n_{dx} p_{tdx};$$

$$\theta_{td} = \underset{t\in T}{\operatorname{norm}}\left(n_{td} + \theta_{td}\frac{\partial R}{\partial \theta_{td}}\right); \qquad n_{td} = \sum_{k\in K}\sum_{(d,x)\in E_k}\tau_k n_{dx} p_{tdx};$$

Теорема

Если функция $R(\Phi, \Theta)$ непрерывно дифференцируема и (Φ, Θ) — точка локального максимума рассматриваемой задачи, то выполняется система уравнений, описанная выше, относительно параметров φ_{vtk}, θ_{td} и вспомогательных переменных p_{tdx}, n_{td} и n_{vtk}.

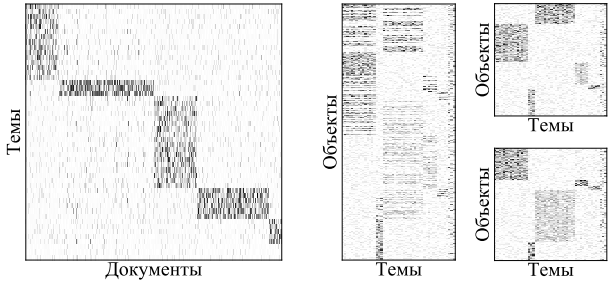
Эксперимент

Модельные данные:

1. Генерация матриц $\Theta = p(t \mid d)$ и $\Phi_k = p_k(v \mid t)$ для всех $k \in K$.

   Число тем: 50
   Число классов: 5
   Число документов: 5000
   Число объектов: 1000
   Число типов ребер: 9
   Число модальностей: 3

   $\Theta \in \mathbb{R}^{50 \times 5000}$
   $\Phi_k \in \mathbb{R}^{1000 \times 50}$



2. Генерация данных (транзакций) на основе матриц Θ, Φ_k.
   Общее число транзакций: $\sim 13\,500\,000$.

Цели эксперимента:

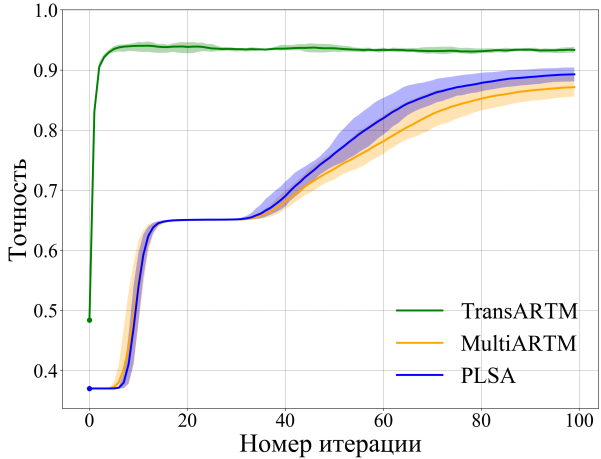
1. Проверить, способен ли алгоритм восстановить параметры модели, с помощью которой были порождены данные.
2. Оценить устойчивость модели относительно инициализации и выбора числа тем.

Постановка эксперимента:

1. Вычисление матрицы Θ с использованием различных методов:
   - PLSA;
   - MultimodalARTM;
   - TransARTM.
2. Решение задачи классификации документов с использованием распределения тем $p(t \mid d)$ в качестве признаков.
3. Оценка качества восстановления матрицы Θ путем вычисления точности решения задачи классификации документов:

$$\text{Точность} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left[y_i^{\text{pred}} = y_i^{\text{true}} \right]$$

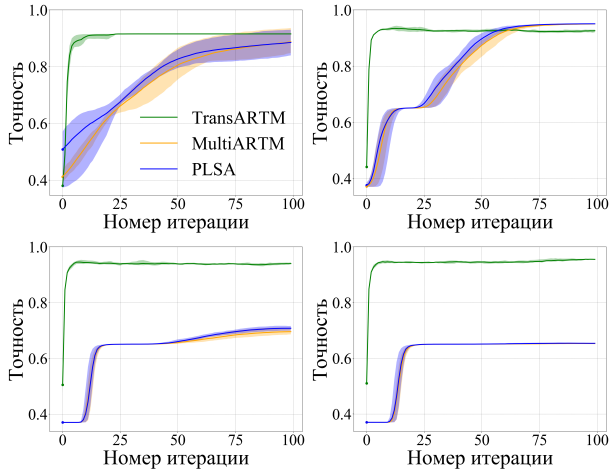
Результаты



Число тем совпадает с заданным при генерации

Вывод:
TransARTM достигает высокого качества быстрее других моделей на транзакционных данных.

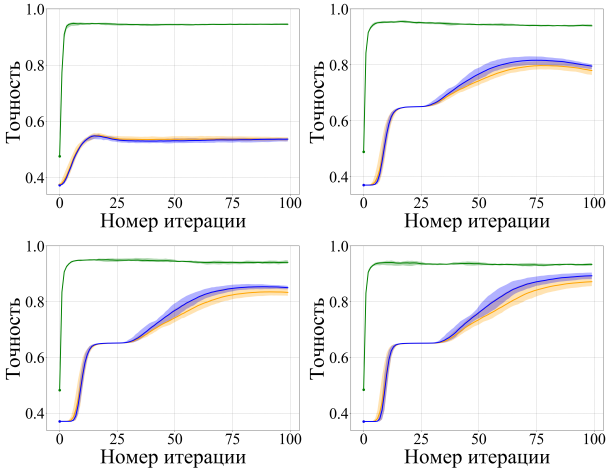
Результаты



Меняем число тем
от 5 до 100

Вывод:
TransARTM наиболее устойчива относительно инициализации и выбора числа тем.

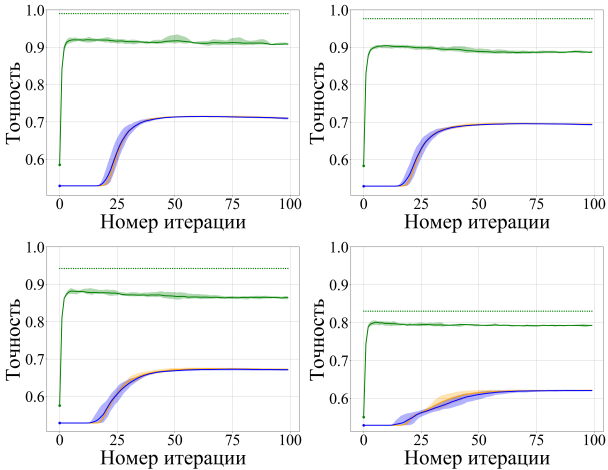
Результаты



Меняем число транзакций
от 450 000 до 13 500 000

Вывод:
TransARTM восстанавливает изначальную структуры матрицы Θ с высоким качеством даже при небольшом числе данных.

Результаты



Меняем разреженность матрицы Θ от 0.2 до 0.8

Вывод:
TransARTM показывает близкое к максимальному качество вне зависимости от разреженности матрицы Θ.

The Million Playlist Dataset (MPD)

$$\text{MPD} \begin{cases} \text{плейлист}_1 \begin{cases} \text{трек}_1, \text{альбом}_1, \text{исполнитель}_1 \\ \text{трек}_2, \text{альбом}_2, \text{исполнитель}_2 \\ \dots \end{cases} \\ \text{плейлист}_2 \\ \dots \\ \text{плейлист}_{1\,000\,000} \end{cases}$$

Цель:
Построить рекомендательную систему треков пользователям

	MPD	Train	Test	Valid
Число плейлистов:	1 000 000	100 000	1 000	1 000
Число треков:	66 346 428	9 875 306	232 613	232 808
Число уникальных треков:	2 262 292	296 882	39 368	38 641
Число уникальных альбомов:	734 684	140 983	20 690	20 483
Число уникальных артистов:	295 860	69 280	10 081	10 008

Ссылка на данные: https://recsys-challenge.spotify.com/dataset.

Эксперимент

Цели эксперимента:

1. Применить TransARTM к задаче построения рекомендаций.
2. Проанализировать различные гипотезы порождения плейлиста.
3. Сравнить результаты с другими моделями.

Постановка эксперимента:

1. Для нахождения параметров моделей используем обучающую выборку, состоящую из 100 000 плейлистов, каждый из которых содержит от 140 до 250 треков.
2. Настраиваем коэффициенты регуляризации по сетке на валидационной выборке.
3. Предсказываем ранжированный список из 500 треков для каждого плейлиста тестовой выборки (последние 70 каждого плейлиста используются для оценки качества).
4. Используем следующие метрики для оценки качества:
   - **precision**;
   - **recall**;
   - **fscore**;
   - **ndcg**.

Results

Модель	Рассматриваемые взаимодействия	Метрики, @500 precision	recall	fscore	ndcg
TopTracks	-	0.0230	0.1646	0.0404	0.1152
PLSA	(Pl, Tr)	0.0592	0.4228	0.1038	0.3025
LDA	(Pl, Tr)	0.0583	0.4162	0.1022	0.2988
MultiARTM	(Pl, Al), (Pl, Tr)	0.0594	0.4245	0.1043	0.3029
	(Pl, Ar), (Pl, Tr)	**0.0608**	**0.4343**	**0.1067**	**0.3110**
	(Pl, Ar), (Pl, Al), (Pl, Tr)	0.0605	0.4321	0.1061	0.3098
TransARTM	(Pl, Al, Tr)	0.0490	0.3497	0.0859	0.2484
	(Pl, Ar, Tr)	**0.0504**	**0.3603**	**0.0885**	**0.2555**
	(Pl, Al, Tr), (Pl, Ar, Tr)	0.0502	0.3587	0.0879	0.2548
	(Pl, Ar, Al, Tr)	0.0476	0.3398	0835	0.2374

Тем: 500

Вывод: TransARTM показывает сравнимые результаты.

Результаты

1. Предложено обобщение методов тематического моделирования на случай, когда исходные данные представимы в виде гиперграфа.
2. Проведены эксперименты на модельных данных, демонстрирующие корректность предложенного метода и преимущество его использования для сложноструктурированных данных.
3. Продемонстрировано применение гиперграфовой многомодальной тематической модели для построения рекомендательной системы.

Доклады:

1. Международная научная конференция «Ломоносов-2018», «Многомодальные тематические модели на гиперграфах».
2. Data Fest[5], «Гиперграфовые тематические модели для анализа транзакционных данных».

Fast online EM-algorithm for TransARTM

Input: collection $\bigcup\limits_{k \in K} D_k$ split into batches $D_b, b = 1, \ldots, B$;

Output: φ_{vtk} for all $v \in V, t \in T, k \in K$;

initialize φ_{vtk} for all $v \in V, t \in T, k \in K$;
$n_{vtk} := 0$, $\widetilde{n}_{vtk} := 0$ for all $v \in V, t \in T, k \in K$;
for all batches $D_b, b = 1, \ldots, B$ **do**
    iterate each document $d \in D_b$ at a constant matrix Φ:
    $(\widetilde{n}_{vtk}) := (\widetilde{n}_{vtk}) + \textbf{ProcessBatch}\,(D_b, \Phi)$;
    if synchronize **then**
        $n_{vtk} := n_{vtk} + \widetilde{n}_{vtk}$ for all $v \in V, t \in T, k \in K$;
        $\varphi_{vtk} = \underset{v \in V_m}{\operatorname{norm}}\left(n_{vtk} + \varphi_{vtk} \frac{\partial R}{\partial \varphi_{vtk}}\right)$ for all $v \in V_m, m \in M,$ $t \in T, k \in K$;
        $\widetilde{n}_{vtk} := 0$ for all $v \in V, t \in T, k \in K$;

Fast online EM-algorithm for TransARTM

ProcessBatch iterates $d \in D_b$ at a constant Φ.

Input: set of vertices-containers D_b, matrix Φ;
Output: matrix $(\widetilde{n}_{vtk})$;

$\widetilde{n}_{vtk} := 0$ for all $v \in V, t \in T, k \in K$;
for all $d \in D_b$ **do**
  initialize $\theta_{td} := \frac{1}{|T|}$ for all $t \in T$;
  repeat
    $p_{tdx} = \underset{t \in T}{\operatorname{norm}} \left(\theta_{td} \prod_{v \in x} \varphi_{vtk} \right)$ for all $x \in d_k, t \in T, k \in K$;
    $n_{td} = \sum_{k \in K} \sum_{x \in d_k} \tau_k n_{dx} p_{tdx}$ for all $t \in T$;
    $\theta_{td} = \underset{t \in T}{\operatorname{norm}} \left(n_{td} + \theta_{td} \frac{\partial R}{\partial \theta_{td}} \right)$ for all $t \in T$;
  until θ_{td} converges;
  $\widetilde{n}_{vtk} := \widetilde{n}_{vtk} + \sum_{x \in d_k} [v \in x] \tau_k n_{dx} p_{tdx}$ for all $v \in V, t \in T$ $k \in K$;

Model data

Probabilistic process of data generation using considered model:

Input: K, distributions $p(t \mid d)$, $p_k(v \mid t)$, for all $k \in K$;
Output: edges of the hypergraph (transactions);

for all $k \in K$ **do** ▷ K is the set of edge types
  define D_k; ▷ D_k is the set of vertices-containers
  for all $d \in D_k$ **do**
    define the number of hyperedges — n_d;
    for all $i = 1, \ldots, n_d$ **do**
      $d_i := d$;
      choose random topic t_i from $p(t \mid d_i)$;
      for all $j = 2, \ldots, h(k)$ **do** ▷ $h(k) = |e|$, $e \in E_k$
        choose random object v_i from $p_k(v|t_i), v \in V_{m_{kj}}$;

The Million Playlist Dataset (MPD)

The dataset contains 1 000 000 playlists:

- **pid** – playlist id;
- **name** – the name of the playlist;
- **description** – the description given to the playlist;
- **modified_at** – timestamp when this playlist was last updated;
- **num_artists** – the total number of unique artists;
- **num_albums** – the number of unique albums;
- **num_tracks** – the number of tracks in the playlist;
- **num_followers** – the number of followers this playlist;
- **num_edits** – the number of separate editing sessions;
- **duration_ms** – the total duration of all the tracks in the playlist;
- **collaborative** – if true, the playlist is a collaborative playlist;
- **tracks** – an array of information about each track in the playlist:
  - **track_name** – the name of the track;
  - **track_uri** – the Spotify URI of the track;
  - **album_name** – the name of the track's album;
  - **album_uri** – the Spotify URI of the album;
  - **artist_name** – the name of the track's primary artist;
  - **artist_uri** – the Spotify URI of track's primary artist;
  - **duration_ms** – the duration of the track in milliseconds;
  - **pos** – the position of the track in the playlist (zero-based).

The dataset is available at https://recsys-challenge.spotify.com/dataset.

Notations

Each vertex $v \in V$ has **modality** $m = \mu(v) \in M$:

$$V = \bigsqcup_{m \in M} V_m, \text{ where } V_m = \{v \in V \colon \mu(v) = m\}.$$

Each edge $e \in E$ has **the transaction type** $k = \varkappa(e) \in K$:

$$E = \bigsqcup_{k \in K} E_k, \text{ where } E_k = \{e \in E \colon \varkappa(e) = k\}.$$

All edges of type k have the same:

1. degree $h = h(k) = |e|$, where $e = \{v_1, \ldots, v_h\}$;
2. set of vertices' modalities: $\mu(v_j) = m_{kj}$, $j = 1, \ldots, h$.

Notations

Edge's type k corresponds to the discrete probability space:

$$\Omega_k = V_{m_{k1}} \times \ldots \times V_{m_{kh}} \times T$$

with a probability function $p_k \colon \Omega_k \to [0, 1]$.

Each vertex v is associated with latent topics:

$$p_k(v, t) = p_k(v \mid t)p_k(t) = p_k(t \mid v)p_k(v).$$

Probability distribution normalized within each modality:

$$\sum_{v \in V_m} p_k(v) = 1; \qquad \sum_{v \in V_m} p_k(v \mid t) = 1.$$

Assumptions

1. For each type of edges k first modality m_{k1} is a container.

   D_k is the set of all vertices-containers of type k edges.
   d_k is the set of edges x: $(d, x) \in E_k$, where $d \in D_k$.

2. The distribution of the topics in vertex-container d are not depends on the edge type:
$$p_k(t \mid d) = p(t \mid d) \text{ for all } d \in D_k.$$

3. The hypothesis of conditional independence of vertices:
$$p_k(x \mid t, d) = p_k(x \mid t) = \prod_{v \in x} p_k(v \mid t).$$

Hypergraphic Topic Model

The mathematical model is the following:

$$p_k(d,x) = p_k(x \mid d)\, p_k(d) = p_k(d) \sum_{t \in T} p_k(x \mid t)\, p_k(t \mid d) =$$

$$= p_k(d) \sum_{t \in T} p(t \mid d) \prod_{v \in x} p_k(v \mid t) = p_k(d) \sum_{t \in T} \theta_{td} \prod_{v \in x} \varphi_{vtk}.$$

Model's parameters:

1. Conditional probability of vertices in topics: $\varphi_{vtk} = p_k(v \mid t)$;
2. Conditional probability of topics in the containers $\theta_{td} = p(t \mid d)$;
3. The probability $p_k(d)$ estimated from observed data:

$$p_k(d) = \frac{\sum\limits_{x \in d_k} n_{dx}}{\sum\limits_{d' \in D_k} \sum\limits_{x \in d'_k} n_{d'x}}.$$

Hypergraphic Topic Model (TransARTM)

The considered hypergraphic topic model is defined by:

1. The oriented hypergraph $G = \langle V, E \rangle$;
2. The set of modalities M;
3. The decomposition of the vertices set into subsets of different modalities $\mu\colon V \to M$;
4. The set of edge types K;
5. The decomposition of the edges set into subsets of different edges type $\varkappa\colon E \to K$;
6. Degree of $h(k)$ and set of modalities $m_{k1}, \ldots, m_{kh(k)}$ of type k edges;
7. The set of topics T;
8. The probability space Ω_k with the distribution p_k for all $k \in K$;
9. The model parameters $\varphi_{vtk} = p_k(v \mid t)$ and $\theta_{td} = p(t \mid d)$.

Theoretical justification

Theorem 1. If the function $R(\Phi, \Theta)$ is continuously differentiable and (Φ, Θ) is the local maximum of the considered problem, then the system of equations for the model's parameters φ_{vtk}, θ_{td} and auxiliary variables p_{tdx}, n_{td} and n_{vtk} holds.

Let's use Karush–Kuhn–Tucker conditions and write the Lagrangian of the optimization problem:

$$\mathscr{L}(\Phi,\Theta) = \sum_{k\in K} \tau_k \sum_{d\in D_k} \sum_{x\in d_k} n_{dx} \ln \sum_{t\in T} \theta_{td} \prod_{v\in x} \varphi_{vtk} + R(\Phi,\Theta) -$$
$$- \sum_{k\in K} \sum_{m\in M} \sum_{t\in T} \lambda_{kmt} \left(\sum_{v\in V_m} \varphi_{vtk} - 1 \right) - \sum_{k\in K} \sum_{m\in M} \sum_{v\in V_m} \sum_{t\in T} \lambda_{kmvt} \varphi_{vtk} -$$
$$- \sum_{k\in K} \sum_{d\in D_k} \mu_d \left(\sum_{t\in T} \theta_{td} - 1 \right) - \sum_{k\in K} \sum_{d\in D_k} \sum_{t\in T} \mu_{td} \theta_{td}.$$

Theoretical justification

Equate to zero the derivatives of a Lagrangian for the model parameters:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi_{vtk}} = \sum_{d \in D_k} \sum_{x \in d_k} [v \in x]\, \tau_k n_{dx} \frac{\theta_{td} \prod_{u \in x \setminus v} \varphi_{utk}}{p_k(d,x)} + \frac{\partial R}{\partial \varphi_{vtk}} - \lambda_{k\mu(v)t} - \lambda_{k\mu(v)vt} = 0;$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \theta_{td}} = \sum_{k \in K} \sum_{x \in d_k} \tau_k n_{dx} \frac{\prod_{v \in x} \varphi_{vtk}}{p_k(d,x)} + \frac{\partial R}{\partial \theta_{td}} - \mu_d - \mu_{td} = 0.$$

Multiply left and right sides of the first equality by φ_{vtk}, the left and right side of the second equality by θ_{td}:

$$\sum_{d \in D_k} \sum_{x \in d_k} [v \in x]\, \tau_k n_{dx} \underbrace{\frac{\theta_{td} \prod_{u \in x} \varphi_{utk}}{p_k(d,x)}}_{p_{tdx} = p(t \mid d,x)} + \varphi_{vtk} \frac{\partial R}{\partial \varphi_{vtk}} = \lambda_{k\mu(v)t} \varphi_{vtk};$$

$$\sum_{k \in K} \sum_{x \in d_k} \tau_k n_{dx} \underbrace{\frac{\theta_{td} \prod_{v \in x} \varphi_{vtk}}{p_k(d,x)}}_{p_{tdx} = p(t \mid d,x)} + \theta_{td} \frac{\partial R}{\partial \theta_{td}} = \mu_d \theta_{td}.$$

Theoretical justification

Rewrite these equations in the variables n_{vtk} and n_{td}:

$$\varphi_{vtk}\lambda_{k\mu(v)t} = n_{vtk} + \varphi_{vtk}\frac{\partial R}{\partial \varphi_{vtk}}. \quad (1)$$

$$\theta_{td}\mu_d = n_{td} + \theta_{td}\frac{\partial R}{\partial \theta_{td}}; \quad (2)$$

If we assume that $\lambda_{kmt} \leqslant 0$, then the regularity condition does not hold, and in this case, according to the agreement, $\varphi_{vtk} = 0$ for each $v \in V_m$. If the dual variable λ_{kmt} is positive, then both side of the equation (1) is non-negative. Combining these two cases into one formula, we obtain:

$$\varphi_{vtk}\lambda_{k\mu(v)t} = \max\Big\{n_{vtk} + \varphi_{vtk}\frac{\partial R}{\partial \varphi_{vtk}}, 0\Big\}.$$

Analogically, if $\mu_d \leqslant 0$, then the regularity condition does not hold, and according to the agreement, $\theta_{td} = 0$ for all $t \in T$. If $\mu_d > 0$, then both side of the equation (2) is non-negative. Combining these two cases into one formula, we obtain:

$$\theta_{td}\mu_d = \max\Big\{n_{td} + \theta_{td}\frac{\partial R}{\partial \theta_{td}}, 0\Big\}.$$

Theoretical justification

Sum the left and right side of the equation (3) by $v \in V_m$, the left and right side of the equation (4) by $t \in T$, and apply normalization conditions and express the dual variables:

$$\mu_d = \sum_{t \in T} \max\Big\{ n_{td} + \theta_{td} \frac{\partial R}{\partial \theta_{td}}, 0 \Big\};$$

$$\lambda_{kmt} = \sum_{v \in V_m} \max\Big\{ n_{vtk} + \varphi_{vtk} \frac{\partial R}{\partial \varphi_{vtk}}, 0 \Big\}.$$

Substituting the obtained expressions of dual variables in (3) and (4), we get desired equations for E and M step. The theorem is proved. ■