

## Прикладная статистика 10. Анализ временных рядов.

Рябенко Евгений  
riabenko.e@gmail.com

21 апреля 2014 г.

## Прогнозирование временного ряда

Временной ряд:  $y_1, \dots, y_T, \dots$ ,  $y_t \in \mathbb{R}$ , — значения признака, измеренные через постоянные временные интервалы.

Задача прогнозирования: найти функцию  $f_T$ :

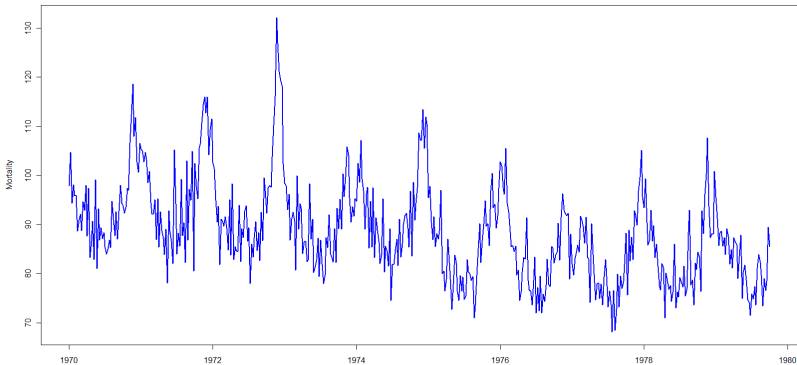
$$y_{T+d} \approx \hat{y}_{T+d} = f_T(y_T, \dots, y_1, d),$$

где  $d \in \{1, 2, \dots, D\}$ ,  $D$  — горизонт прогнозирования.

Функция выбирается следующим образом:

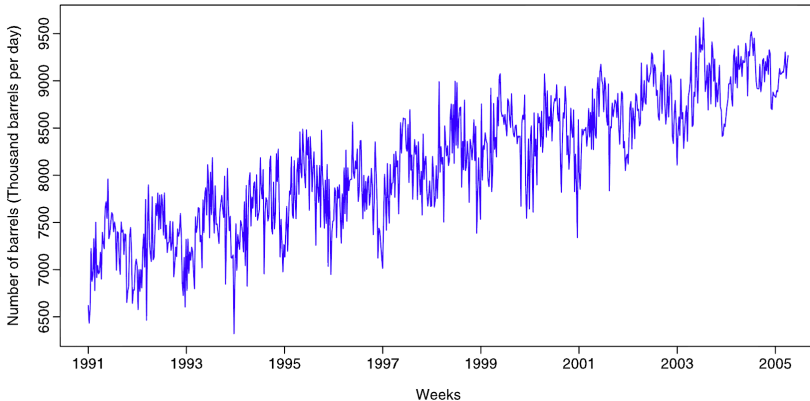
$$Q_T = \sum_{t=1}^T (y_t - \hat{y}_t)^2 \rightarrow \min_{f_T}.$$

# Смертность от сердечно-сосудистых заболеваний



- есть годичный профиль — сезонность (годовая);
- есть линейное убывание — тренд.

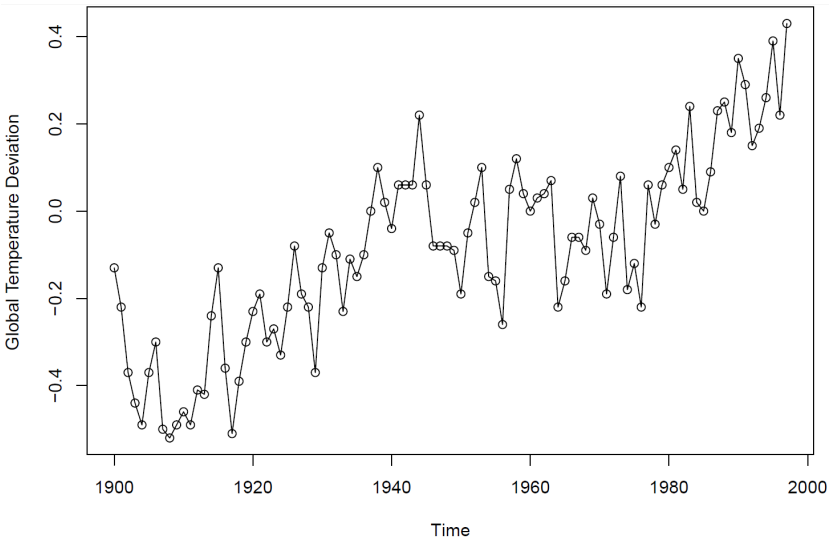
# Продажи нефтепродуктов в США



- годовая сезонность;
- повышающийся линейный тренд.

# Динамика среднегодовой температуры

Отклонение от среднегодовой температуры в градусах Цельсия:



# Линейный тренд: регрессия

Построим зависимость отклонения температуры от года:

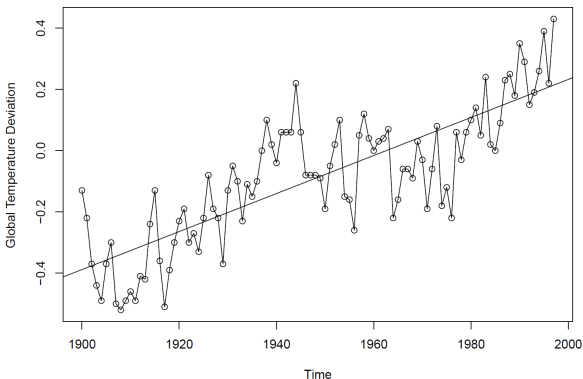
$$y_t = \theta_0 + \theta_1 t + \varepsilon, \quad t = 1900, \dots, 2000.$$

$$\theta_0 = -12.186, \quad \theta_1 = 0.006;$$

$$SE(\theta_0) = 0.9, \quad SE(\theta_1) = 0.005;$$

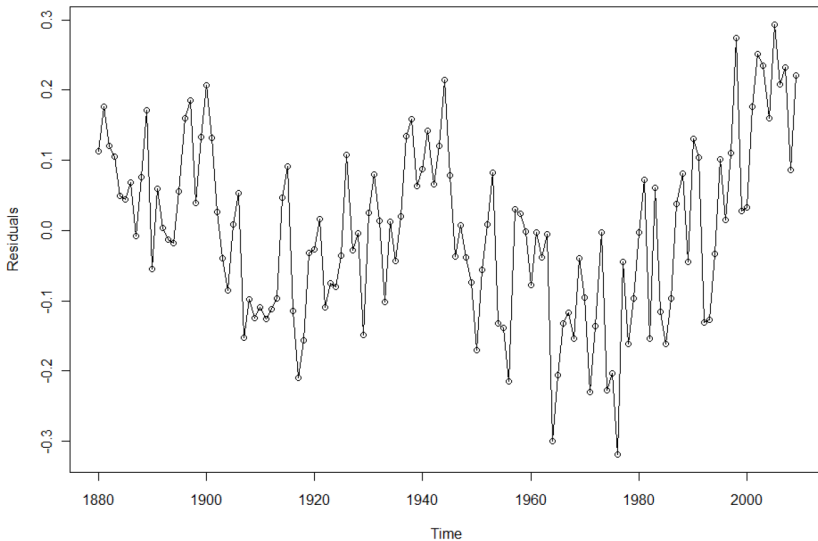
$$R^2 = 0.651, \quad R_a^2 = 0.648;$$

$$F = 179.5, \quad p = 2 \times 10^{-16}.$$



## Остатки

$$\hat{\varepsilon}_t = \hat{y}_t - y_t, t = 1, \dots, T :$$



## Анализ остатков

Требуемые свойства остатков и методы их проверки:

- нормальность (улучшает свойства МНК-оценки, определяет выбор критериев для проверки других гипотез) — критерий Шапиро-Уилка;
- несмещённость — критерии Стьюдента и Уилкоксона;
- гомоскедастичность — критерий Бройша-Пагана;
- неавтокоррелированность (отсутствие неучтённой линейной зависимости от предыдущих наблюдений) — коррелограмма, Q-критерий Льюнга-Бокса (группа лагов);
- стационарность (отсутствие зависимости от времени) — критерий KPSS.



# Автокорреляция

**Автокорреляционная функция:**

$$r_\tau = \text{corr}(y_t, y_{t-\tau}) = \frac{\sum_{t=1}^{T-\tau} (y_t - \bar{y})(y_{t+\tau} - \bar{y})}{\sum_{t=1}^T (y_t - \bar{y})^2}, \quad \bar{y} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y_t.$$

$r_\tau \in [-1, 1]$ ,  $\tau$  — лаг автокорреляции.

Проверка значимости отличия автокорреляции от нуля:

временной ряд:  $Y^T = Y_1, \dots, Y_T$ ;

нулевая гипотеза:  $H_0: r_\tau = 0$ ;

альтернатива:  $H_1: r_\tau \neq 0$ ;

статистика:  $T(Y^T) = \frac{r_\tau \sqrt{T-\tau-2}}{\sqrt{1-r_\tau^2}}$ ;

$T(Y^T) \sim St(T - \tau - 2)$  при  $H_0$ .

## Q-критерий Льюнга-Бокса

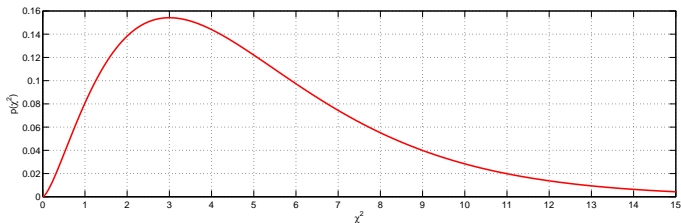
ряд ошибок прогноза:  $\varepsilon^T = \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_T$ ;

нулевая гипотеза:  $H_0: r_1 = \dots = r_L = 0$ ;

альтернатива:  $H_1: H_0$  неверна;

статистика:  $Q(\varepsilon^T) = T(T+2) \sum_{\tau=1}^L \frac{r_\tau^2}{T-\tau}$ ;

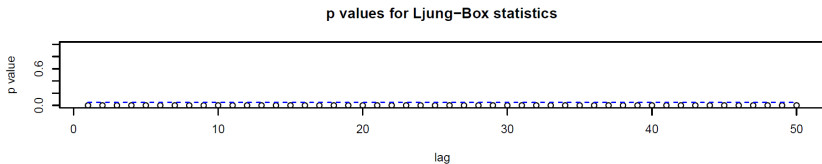
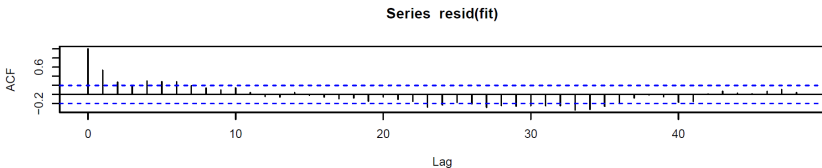
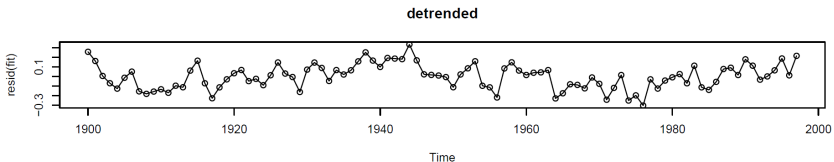
$Q(\varepsilon^T) \sim \chi_L^2$  при  $H_0$ ;



достигаемый уровень значимости:

$$p(q) = 1 - \text{chi2cdf}(q, L).$$

# В рассматриваемой задаче



## Критерий KPSS (Kwiatkowski-Philips-Schmidt-Shin)

ряд ошибок прогноза:  $\varepsilon^T = \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_T$ ;

нулевая гипотеза:  $H_0$ : ряд  $\varepsilon^T$  стационарен;

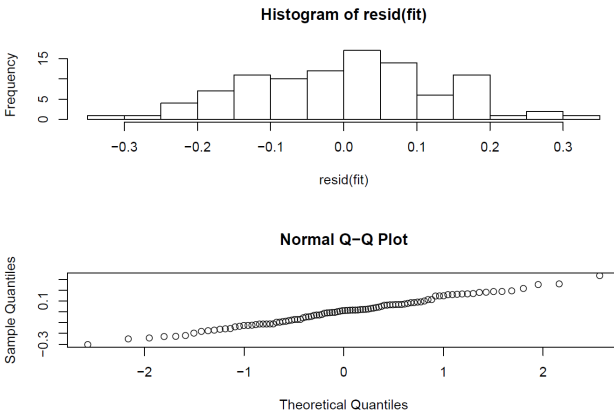
альтернатива:  $H_1$ : ряд  $\varepsilon^T$  описывается моделью

вида  $\varepsilon_t = \alpha\varepsilon_{t-1}$ ;

статистика:  $KPSS(\varepsilon^T) = \frac{1}{T^2} \sum_{i=1}^T \left( \sum_{t=1}^i \varepsilon_t \right)^2 / \lambda^2$ ;

$KPSS(\varepsilon^T)$  при  $H_0$  имеет табличное распределение.

## В рассматриваемой задаче



Критерий нормальности Шапиро-Уилка:  $p = 0.8618$ .

Критерий Стьюдента:  $p \approx 1$ .

Критерий гомоскедастичности Бройша-Пагана:  $p = 0.9335$ .

Критерий стационарности KPSS:  $p > 0.1$ .

## Авторегрессия

$$AR(p): \quad y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t,$$

где  $y_t$  — стационарный ряд с нулевым средним,  $\phi_1, \dots, \phi_p$  — константы ( $\phi_p \neq 0$ ),  $\varepsilon_t$  — гауссов белый шум с нулевым средним и постоянной дисперсией  $\sigma_\varepsilon^2$ .

Если среднее равно  $\mu$ , модель принимает вид

$$y_t = \alpha + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t,$$

где  $\alpha = \mu(1 - \phi_1 - \dots - \phi_p)$ .

Другой способ записи:

$$\phi(B)y_t = (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p)y_t = \varepsilon_t,$$

где  $B$  — разностный оператор ( $By_t = y_{t-1}$ ).

Линейная комбинация  $p$  подряд идущих членов ряда даёт белый шум.

## Скользящее среднее

$$MA(q): \quad y_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q},$$

где  $y_t$  — стационарный ряд с нулевым средним,  $\theta_1, \dots, \theta_q$  — константы ( $\theta_q \neq 0$ ),  $\varepsilon_t$  — гауссов белый шум с нулевым средним и постоянной дисперсией  $\sigma_\varepsilon^2$ .

Если среднее равно  $\mu$ , модель принимает вид

$$y_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q}.$$

Другой способ записи:

$$y_t = \theta(B) \varepsilon_t = (1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \cdots + \theta_q B^q) \varepsilon_t,$$

где  $B$  — разностный оператор.

Линейная комбинация  $q$  подряд идущих компонент белого шума  $\varepsilon_t$  даёт элемент ряда.

# Автокорреляции

В моделях  $MA(q)$  автокорреляция ряда равна нулю при лаге, большем  $q$ , и строго больше нуля при лаге  $q$ .

**Частичная автокорреляция** стационарного ряда  $y_t$ :

$$\phi_{hh} = \begin{cases} \text{corr}(y_{t+1}, y_t), & h = 1, \\ \text{corr}(y_{t+h} - y_{t+h}^{h-1}, y_t - y_t^{h-1}), & h \geq 2, \end{cases}$$

где  $y_t^{h-1}$  — регрессия  $y_t$  на  $y_{t+1}, y_{t+2}, \dots, y_{t+h-1}$ :

$$y_t^{h-1} = \beta_1 y_{t+1} + \beta_2 y_{t+2} + \dots + \beta_{h-1} y_{t+h-1},$$

$$y_{t+h}^{h-1} = \beta_1 y_{t+h-1} + \beta_2 y_{t+h-2} + \dots + \beta_{h-1} y_{t+1}.$$

В моделях  $AR(p)$  частичная автокорреляция ряда равна нулю при лаге, большем  $p$ , и строго больше нуля при лаге  $p$ .



## ARMA (Autogressive moving average)

$$ARMA(p, q): y_t = \phi_1 y_{t-1} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q},$$

где  $y_t$  — стационарный ряд с нулевым средним,  $\phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q$  — константы ( $\phi_p \neq 0, \theta_q \neq 0$ ),  $\varepsilon_t$  — гауссов белый шум с нулевым средним и постоянной дисперсией  $\sigma_\varepsilon^2$ .

Если вреднее равно  $\mu$ , модель принимает вид

$$y_t = \alpha + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q},$$

где  $\alpha = \mu (1 - \phi_1 - \dots - \phi_p)$ .

Другой способ записи:

$$\phi(B) y_t = \theta(B) \varepsilon_t.$$

# ARIMA (Autogerressive integrated moving average)<sup>1</sup>

Для нестационарного ряда стационарным может оказаться ряд его разностей.

Ряд описывается моделью  $ARIMA(p, d, q)$ , если ряд его разностей

$$\nabla^d y_t = (1 - B)^d y_t$$

описывается моделью  $ARMA(p, q)$ .

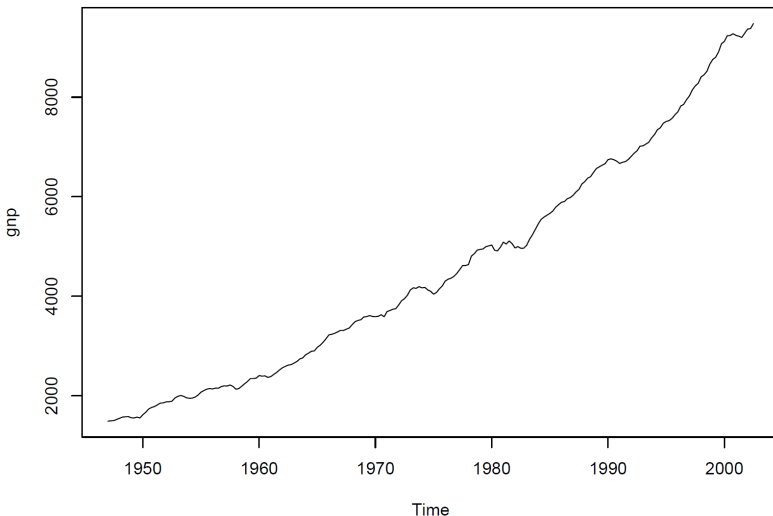
$$\phi(B) \nabla^d y_t = \theta(B) \varepsilon_t.$$

---

<sup>1</sup> Также это энергетическое имя, данное творцом первоизданным двум своим посланникам для работы планете Земля, подробности см.  
<http://light-love.ru/nasha-istoriya/ot-avtorov.html/>

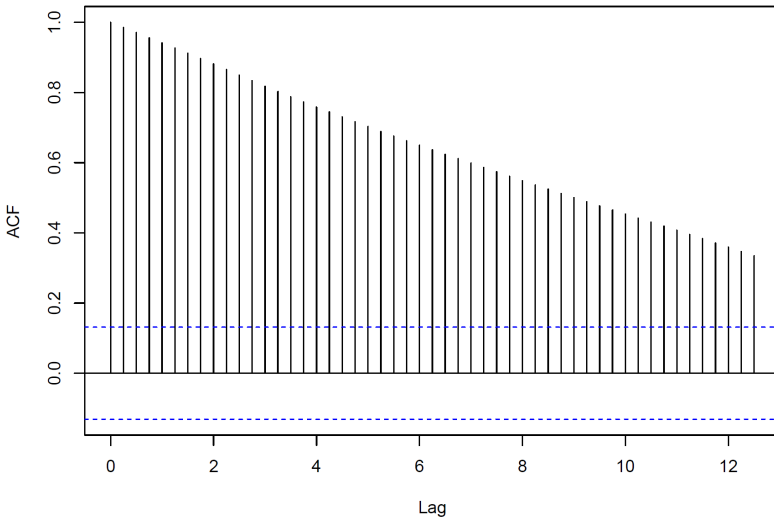
## ВВП США

Поквартальные очищенные от сезонности данные о ВВП США  
в миллиардах долларов 1996 года:

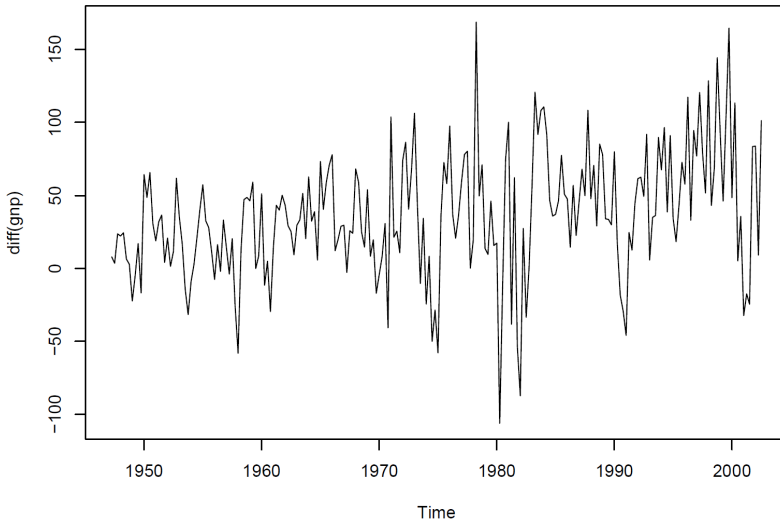


# Автокорреляция

Series gnp

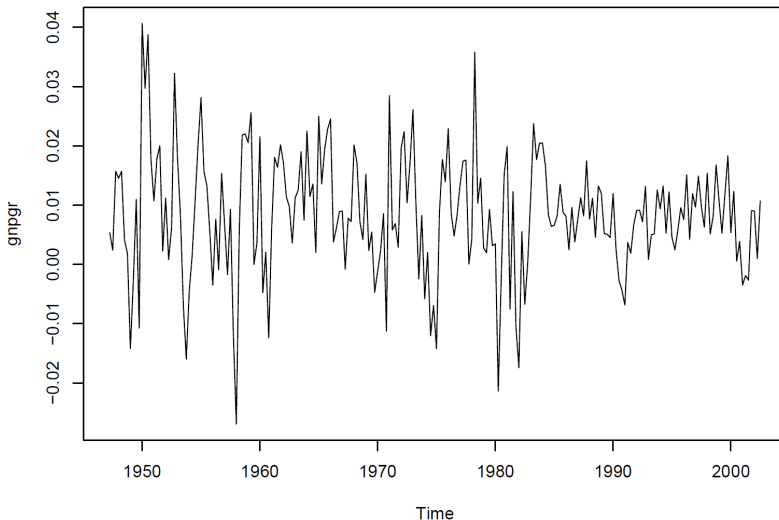


## Ряд первых разностей



Нестационарен, вариация данных выше во второй половине ряда ( $KPSS$   $p < 0.01$ ).

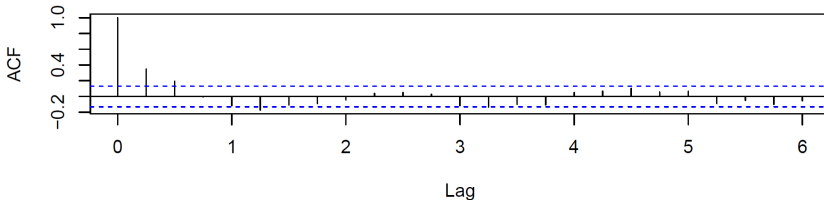
## Ряд первых разностей логарифмов



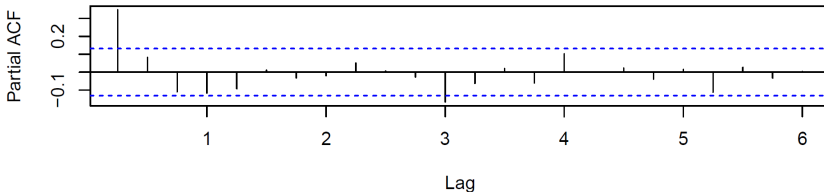
Стационарен ( $KPSS p > 0.1$ ), интерпретируется как прирост ВВП в процентах.

# Автокорреляция и частичная автокорреляция ряда приростов

Series gnpggr



Series gnpggr



Варианты интерпретации графиков:

- $AC$  равна нулю после лага 2,  $PAC$  убывает — модель  $MA(2)$ ;
- $PAC$  равна нулю после лага 1,  $AC$  убывает — модель  $AR(1)$ ;
- модель  $ARMA(1, 2)$ .

$$AR(1): y_t = 0.005 + 0.347y_{t-1} + \varepsilon_t, \hat{\sigma}_\varepsilon = 0.0095;$$

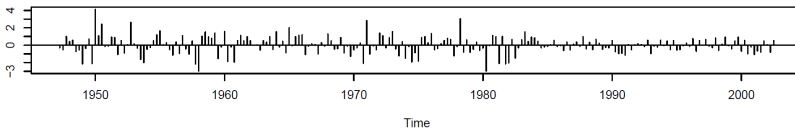
$$MA(2): y_t = 0.008 + 0.303\varepsilon_{t-1} + 0.204\varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t, \hat{\sigma}_\varepsilon = 0.0094;$$

$$ARMA(1, 2): y_t = 0.008 + 0.241y_{t-1} + 0.076\varepsilon_{t-1} + 0.162\varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t, \hat{\sigma}_\varepsilon = 0.0089.$$

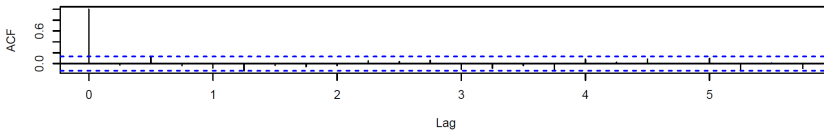


# Диагностика $AR(1)$

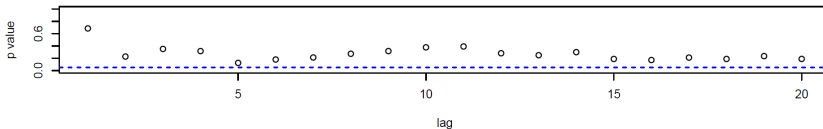
Standardized Residuals

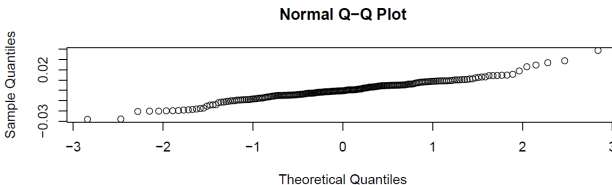
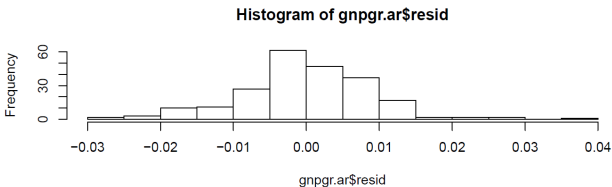


ACF of Residuals



p values for Ljung-Box statistic



Диагностика  $AR(1)$ 

Критерий нормальности Шапиро-Уилка:  $p = 0.0006886$ .

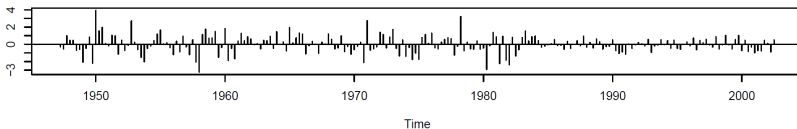
Критерий Уилкоксона:  $p = 0.8665$ .

Критерий гомоскедастичности Бройша-Пагана:  $p = 0.5613$ .

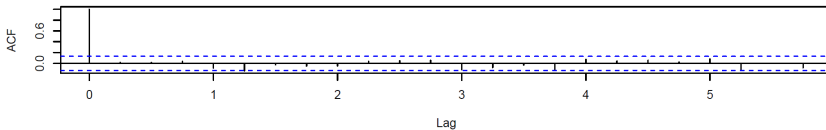
Критерий стационарности KPSS:  $p > 0.1$ .

# Диагностика $MA(2)$

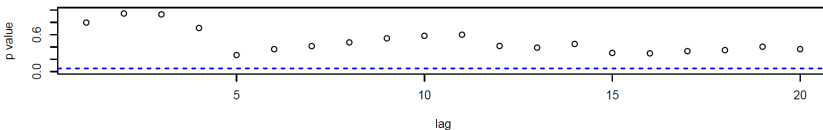
Standardized Residuals

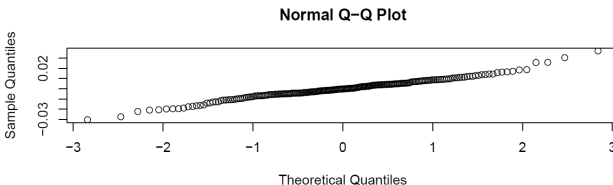
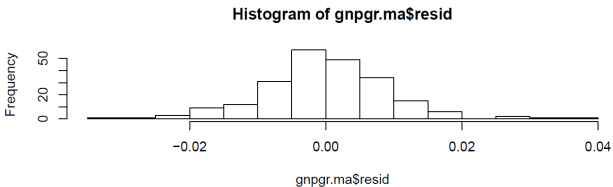


ACF of Residuals



p values for Ljung-Box statistic



Диагностика *MA(2)*

Критерий нормальности Шапиро-Уилка:  $p = 0.003416$ .

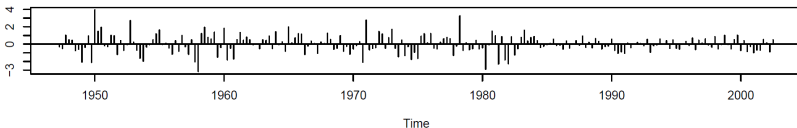
Критерий Уилкоксона:  $p = 0.9917$ .

Критерий гомоскедастичности Бройша-Пагана:  $p = 0.4947$ .

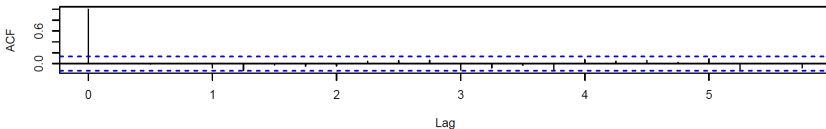
Критерий стационарности KPSS:  $p > 0.1$ .

# Диагностика ARMA(1,2)

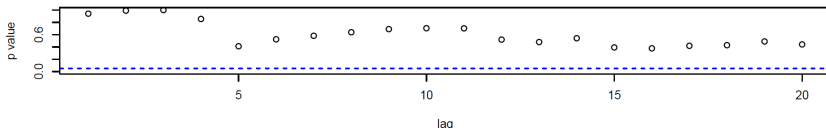
Standardized Residuals

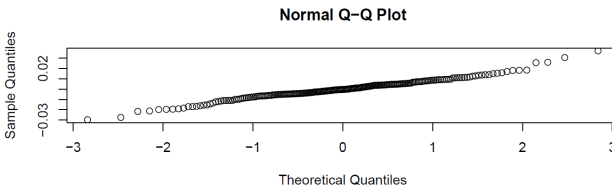
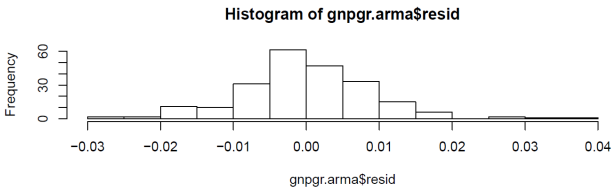


ACF of Residuals



p values for Ljung-Box statistic



Диагностика  $ARMA(1,2)$ 

Критерий нормальности Шапиро-Уилка:  $p = 0.003497$ .

Критерий Уилкоксона:  $p = 0.9817$ .

Критерий гомоскедастичности Бройша-Пагана:  $p = 0.5165$ .

Критерий стационарности KPSS:  $p > 0.1$ .

## Сравнение моделей

$AIC$  — информационный критерий Акаике:

$$AIC = \log \left( \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (y_t - \hat{y}_t)^2 \right) + \frac{T + 2k}{T},$$

где  $k$  — число параметров модели;

$AICc$  — он же с поправкой на случай небольшого размера выборки:

$$AICc = \log \left( \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (y_t - \hat{y}_t)^2 \right) + \frac{T + k}{T - k - 2};$$

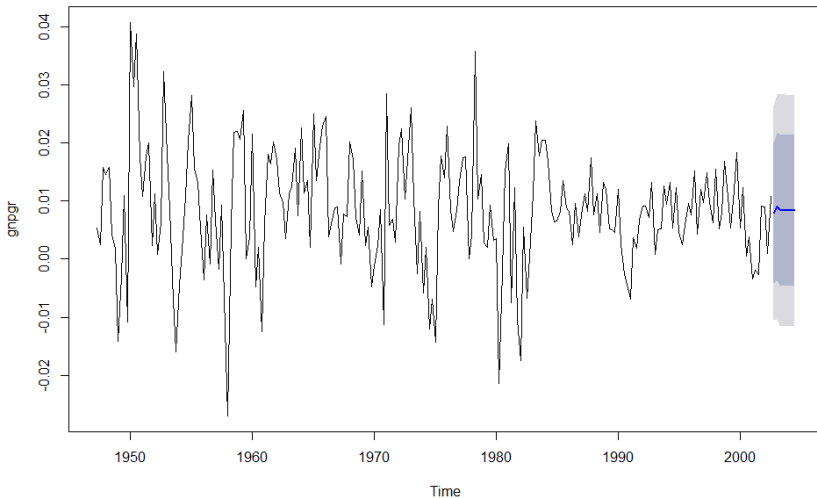
$BIC$  ( $SIC$ ) — байесовский (Шварца) информационный критерий:

$$BIC = \log \left( \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (y_t - \hat{y}_t)^2 \right) + \frac{k \log T}{T}.$$

	$AIC$	$AICc$	$BIC$
$AR(1)$	-1431.22	-8.284	-9.264
$MA(2)$	-1431.93	-8.297	-9.276
$ARMA(1, 2)$	-1430.95	-8.301	-9.281

## Результат

Forecasts from ARIMA(1,0,2) with non-zero mean

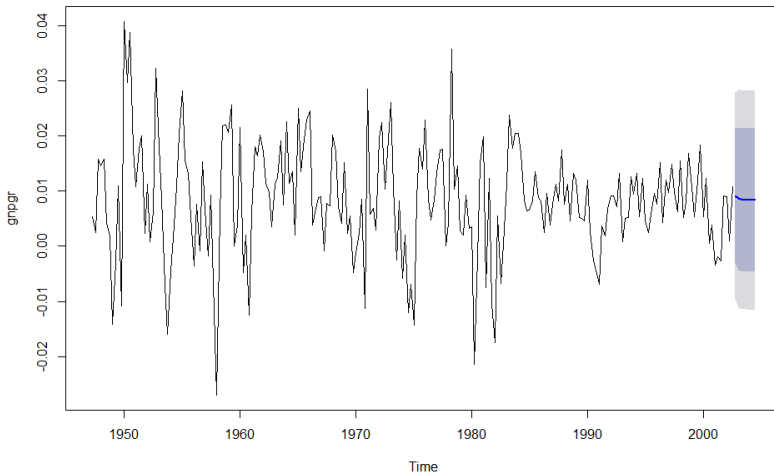




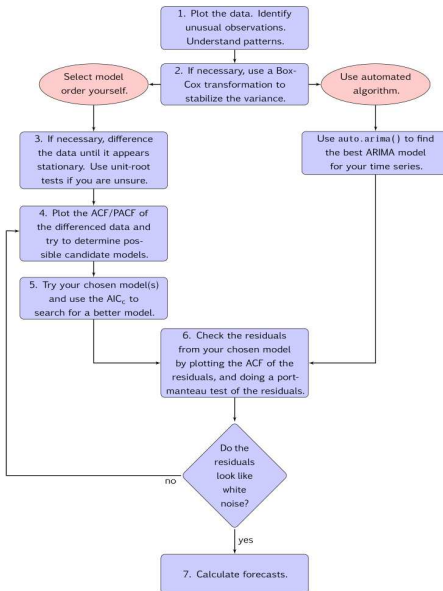
## auto.arima

Функция `auto.arima` в пакете `forecast` сама подбирает модель с наименьшим AICc:

Forecasts from ARIMA(1,0,0) with non-zero mean



## auto.arima



## Предсказательные интервалы

Предсказательные интервалы могут строиться:

- в соответствии с моделью;
- с использованием остатков.

**Пример** (Silver, The Signal and the Noise: Why Most Predictions Fail — but Some Don't, 2012): в апреле 1997 года в Гранд-Форкс, Северная Дакота, произошло наводнение. Город был защищён дамбой высотой в 51 фут; согласно прогнозу, высота весеннего паводка должна была составить 49 футов; истинная высота паводка оказалась равной 54 футам. 50000 жителей было эвакуировано, 75% зданий повреждено или уничтожено, ущерб составил несколько миллиардов долларов. На исторических данных точность прогнозов метеорологической службы составляла  $\pm 9$  футов.

# Виды сезонных эффектов

## ESS Guidelines on Seasonal Adjustment

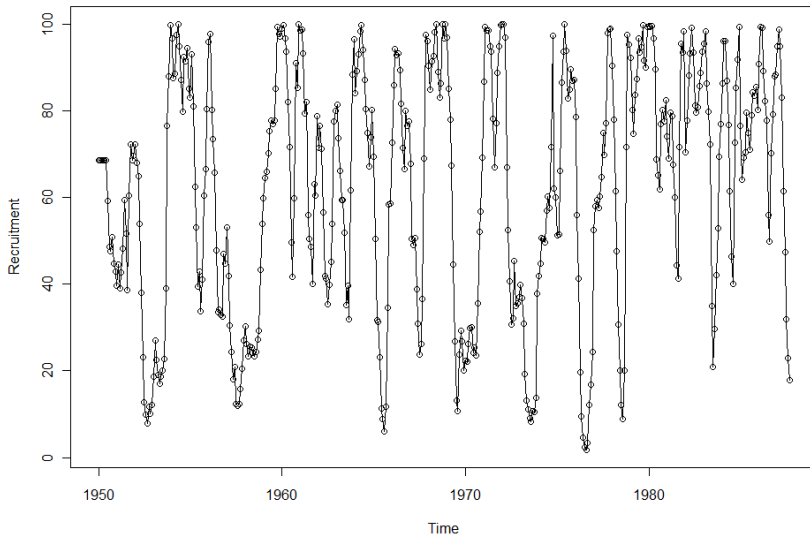
Сезонность — циклические изменения уровня ряда внутри повторяющегося периода, достаточно устойчивые между периодами.

Причины возникновения сезонности:

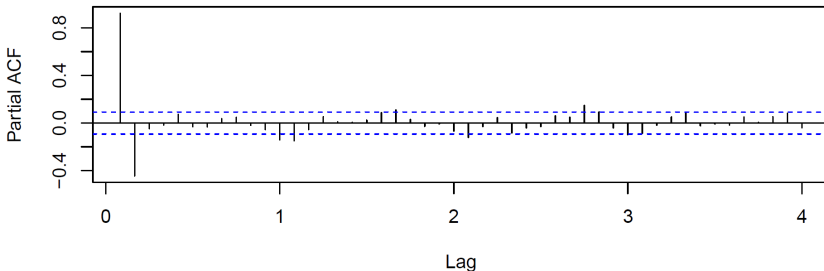
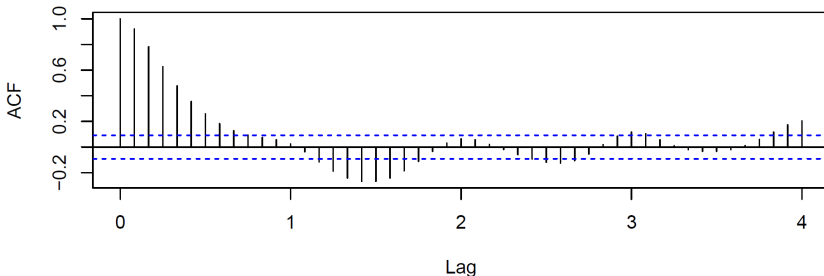
- природные факторы;
- административные и юридические факторы;
- календарные эффекты: число рабочих дней, эффекты фиксированных праздников.

# Размер популяции рыб

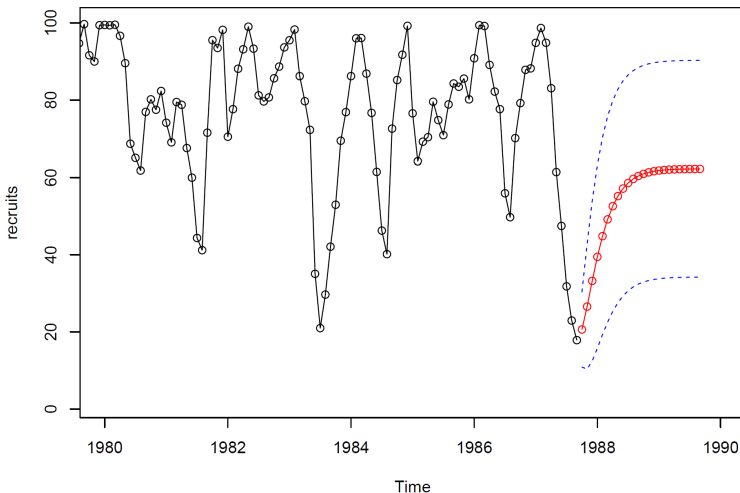
Recruitment — число новых особей рыбы — за каждый месяц 1950-1987:



# Корреляции



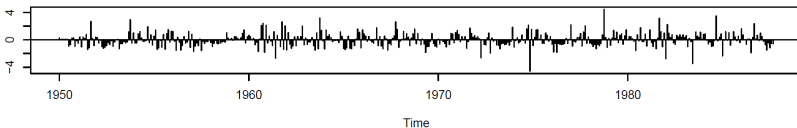
## Прогноз

Выбор — модель  $AR(2)$ .

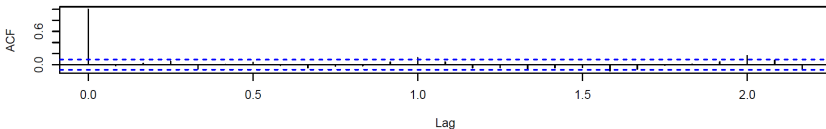
В моделях  $ARMA(p, q)$  с увеличением горизонта прогноз всё больше похож на константу.

# Диагностика $AR(2)$

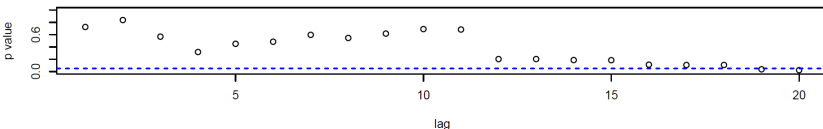
Standardized Residuals



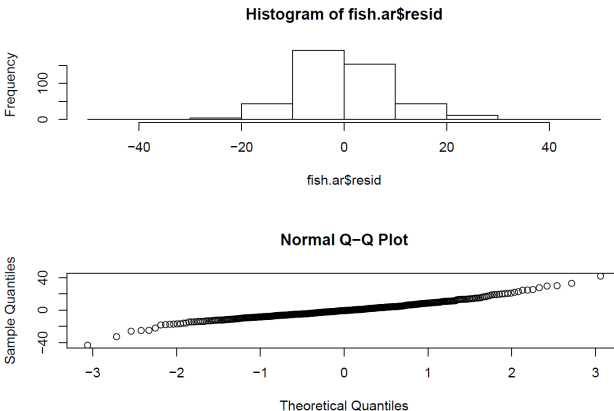
ACF of Residuals



p values for Ljung-Box statistic





Диагностика  $AR(2)$ 

Критерий нормальности Шапиро-Уилка:  $p = 2.7 \times 10^{-7}$ .

Критерий Уилкоксона:  $p = 0.4167$ .

Критерий гомоскедастичности Бройша-Пагана:  $p = 0.3783$ .

Критерий стационарности KPSS:  $p > 0.1$ .

# Seasonal multiplicative ARMA/ARIMA

$$ARMA(p, q) \times (P, Q)_s : \Phi_P(B^s) \phi(B) y_t = \alpha + \Theta_Q(B^s) \theta(B) \varepsilon_t,$$

где

$$\Phi_P(B^s) = 1 - \Phi_1 B^s - \Phi_2 B^{2s} - \dots - \Phi_P B^{Ps},$$

$$\Theta_Q(B^s) = 1 + \Theta_1 B^s + \Theta_2 B^{2s} + \dots + \Theta_Q B^{Ps}.$$

SARIMA:

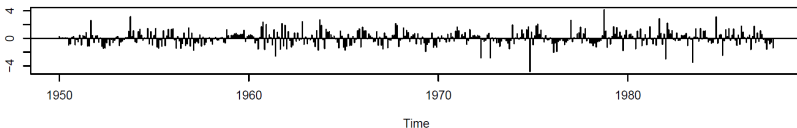
$$\Phi_P(B^s) \phi(B) \nabla_s^D \nabla^d y_t = \alpha + \Theta_Q(B^s) \theta(B) \varepsilon_t.$$

## Сравнение моделей

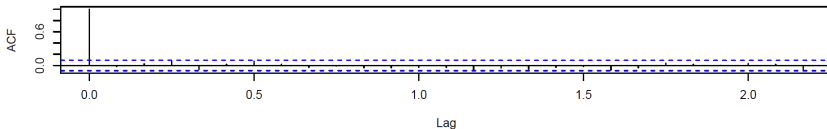
	<i>AIC</i>
$ARMA(2, 0) \times (3, 0)_{12}$	3308.515
$ARMA(2, 0) \times (2, 0)_{12}$	3316.283
$ARMA(2, 0) \times (1, 0)_{12}$	3325.706
$ARMA(2, 0) \times (0, 1)_{12}$	3327.352
$ARMA(2, 0) \times (0, 2)_{12}$	3321.880
$ARMA(2, 0) \times (0, 3)_{12}$	3314.787
$ARMA(2, 0) \times (1, 1)_{12}$	3283.717

# Диагностика $ARMA(2,0) \times (1,1)_{12}$

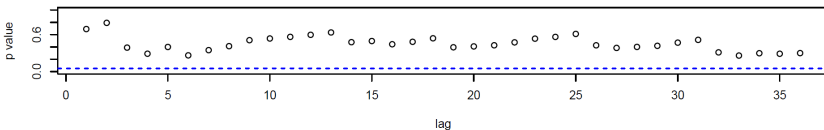
Standardized Residuals

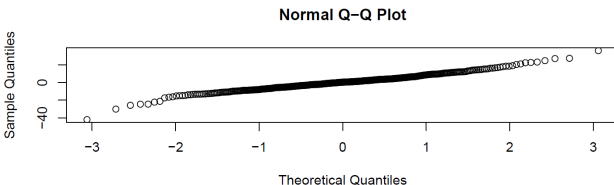
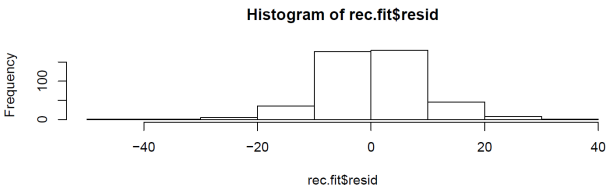


ACF of Residuals



p values for Ljung-Box statistic



Диагностика  $ARMA(2,0) \times (1,1)_{12}$ 

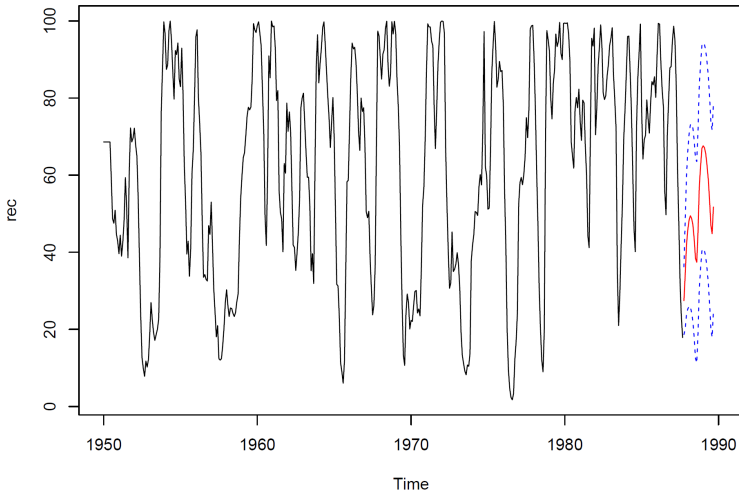
Критерий нормальности Шапиро-Уилка:  $p = 6.8 \times 10^{-6}$ .

Критерий Уилкоксона:  $p = 0.7387$ .

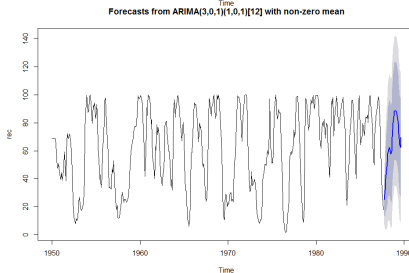
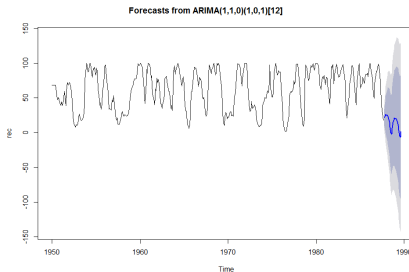
Критерий гомоскедастичности Бройша-Пагана:  $p = 0.2546$ .

Критерий стационарности KPSS:  $p > 0.1$ .

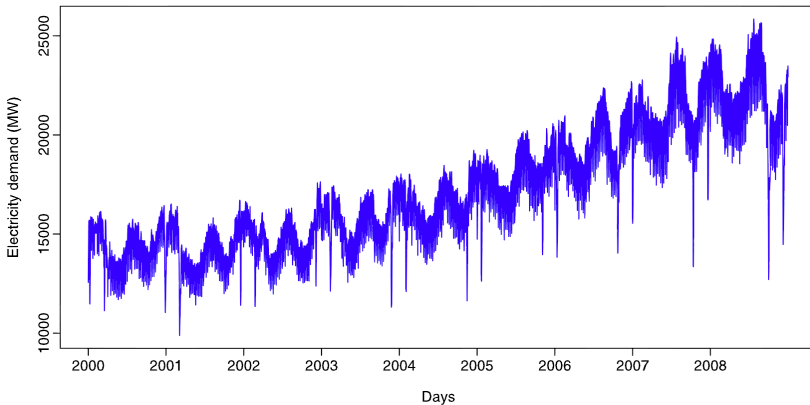
# Прогноз



# Результаты auto.arima



# Потребление электричества в Турции



- недельная сезонность;
- годовая сезонность;
- праздники по исламскому календарю (год примерно на 11 дней короче, чем в грегорианском).



## regARIMA

Эффекты плавающих праздников, краткосрочных маркетинговых акций и других нерегулярно повторяющихся событий удобно моделировать с помощью regARIMA:

$$\Phi_P(B^s) \phi(B) \nabla_s^D \nabla^d z_t = \Theta_Q(B^s) \theta(B) \varepsilon_t$$

+

$$y_t = \sum_{j=1}^k \beta_j x_{jt} + z_t$$

=

$$\Phi_P(B^s) \phi(B) \nabla_s^D \nabla^d \left( y_t - \sum_{j=1}^k \beta_j x_{jt} \right) = \Theta_Q(B^s) \theta(B) \varepsilon_t.$$

## Оценка параметров модели

- 1 Проверить стационарность признаков, если её нет, перейти к разностям. Для лучшей интерпретируемости разностный оператор следует применять и к признакам тоже.
- 2 Для ряда разностей строится регрессия в предположении, что ошибки описываются моделью начального приближения (как правило,  $AR(2)$  или  $SARMA(2, 0, 0) \times (1, 0)_s$ ).
- 3 Для остатков регрессии  $\hat{z}_t$  подбирается подходящая модель  $ARMA(p_1, q_1)$ .
- 4 Регрессия перестраивается в предположении, что ошибки описываются моделью  $ARMA(p_1, q_1)$ .
- 5 Анализируются остатки  $\hat{\varepsilon}_t$ .

Для подзадачи регрессии формальная проверка значимости признаков неприменима, для отбора признаков необходимо сравнивать значения  $AIC$  моделей со всеми подмножествами  $x_j$ .

Пример: <https://www.otexts.org/fpp/9/1>

## Реализации

- US Census Bureau: X-12-ARIMA, X-13-ARIMA-SEATS (<http://www.census.gov/srd/www/x13as/>, доступен через иностранные прокси-серверы);
- Matlab: regARIMA (2013b);
- R: пакет X12; параметр xreg функции Arima пакета forecast.

# Литература

- ARMA/ARIMA — Shumway,
- regARIMA — Hyndman, 9.1.

Hyndman R.J., Athanasopoulos G. *Forecasting: principles and practice*. — OTexts, 2013. <https://www.otexts.org/book/fpp>

Shumway R.H, Stoffer D.S. *Time Series Analysis and Its Applications with R Examples*. — New York: Springer, 2011.