Оценивание состава инвестиционного портфеля в большом множестве биржевых активов

Моттль Вадим Вячеславович
Вычислительный центр РАН

Красоткина Ольга Вячеславовна
Markov Processes International, New Jersey, USA

Морозов Алексей Олеглвич
Московский физико-технический институт

Суждение о составе инвестиционного портфеля по временному ряду его доходности

Инвестиционная компания – это финансовый посредник, аккумулирующий деньги многих инвесторов и вкладывающий их в некоторое множество финансовых активов на биржевом рынке.

Цель – увеличение исходного капитала за счет роста цен биржевых активов.

Суждение о составе инвестиционного портфеля по временному ряду его доходности

Инвестиционная компания – это финансовый посредник, аккумулирующий деньги многих инвесторов и вкладывающий их в некоторое множество финансовых активов на биржевом рынке.

Цель – увеличение исходного капитала за счет роста цен биржевых активов.

$\mathbb{I}=\{1,...,n\}$	полное множество доступных ценных бумаг, n = тысячи
$\beta_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{n}\beta_i = 1$	вложенные в них доли капитала (бэта коэффициенты инвестиционного портфеля)
$\mathbb{I}^*=\{i:\beta_i>0\}\subset\mathbb{I}$	структура портфеля – фактическое подмножество активов

Суждение о составе инвестиционного портфеля по временному ряду его доходности

Инвестиционная компания – это финансовый посредник, аккумулирующий деньги многих инвесторов и вкладывающий их в некоторое множество финансовых активов на биржевом рынке.
Цель – увеличение исходного капитала за счет роста цен биржевых активов.

$\mathbb{I}=\{1,...,n\}$	полное множество доступных ценных бумаг, n = тысячи
$\beta_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n}\beta_i = 1$	вложенные в них доли капитала (бэта коэффициенты инвестиционного портфеля)
$\mathbb{I}^* = \{i : \beta_i > 0\} \subset \mathbb{I}$	структура портфеля – фактическое подмножество активов

Администраторы портфеля, как правило, рассматривают долевую структуру портфеля $(\beta_1,...,\beta_n)$ как свою коммерческую тайну. В то же время, знание состава портфеля очень важно для инвесторов.

Суждение о составе инвестиционного портфеля по временному ряду его доходности

Инвестиционная компания – это финансовый посредник, аккумулирующий деньги многих инвесторов и вкладывающий их в некоторое множество финансовых активов на биржевом рынке.
Цель – увеличение исходного капитала за счет роста цен биржевых активов.

$\mathbb{I}=\{1,...,n\}$	полное множество доступных ценных бумаг, n = тысячи
$\beta_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{n}\beta_i = 1$	вложенные в них доли капитала (бэта коэффициенты инвестиционного портфеля)
$\mathbb{I}^* = \{i : \beta_i > 0\} \subset \mathbb{I}$	структура портфеля – фактическое подмножество активов

Администраторы портфеля, как правило, рассматривают долевую структуру портфеля $(\beta_1,...,\beta_n)$ как свою коммерческую тайну. В то же время, знание состава портфеля очень важно для инвесторов.

Однако инвестиционная компания обязана периодически отчитываться о своей доходности – скорости изменения совокупной стоимости портфеля.
Идея: использовать эту информацию для оценивания структуры портфеля.

Суждение о составе инвестиционного портфеля по временному ряду его доходности

Инвестиционная компания – это финансовый посредник, аккумулирующий деньги многих инвесторов и вкладывающий их в некоторое множество финансовых активов на биржевом рынке.
Цель – увеличение исходного капитала за счет роста цен биржевых активов.

$\mathbb{I} = \{1, ..., n\}$	полное множество доступных ценных бумаг, n = тысячи
$\beta_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \beta_i = 1$	вложенные в них доли капитала (бэта коэффициенты инвестиционного портфеля)
$\mathbb{I}^* = \{i : \beta_i > 0\} \subset \mathbb{I}$	структура портфеля – фактическое подмножество активов

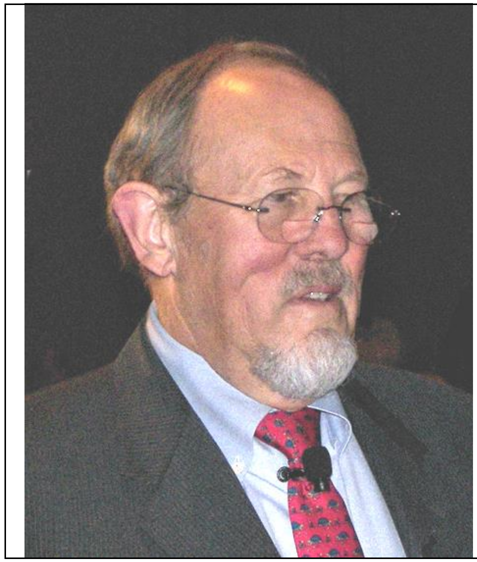
Администраторы портфеля, как правило, рассматривают долевую структуру портфеля $(\beta_1, ..., \beta_n)$ как свою коммерческую тайну. В то же время, знание состава портфеля очень важно для инвесторов.

Однако инвестиционная компания обязана периодически отчитываться о своей доходности – скорости изменения совокупной стоимости портфеля.
Идея: использовать эту информацию для оценивания структуры портфеля.

Такую задачу принято называть

Returns Based Analysis of Investment Portfolios

William Sharpe: Линейная модель доходности инвестиционного портфеля



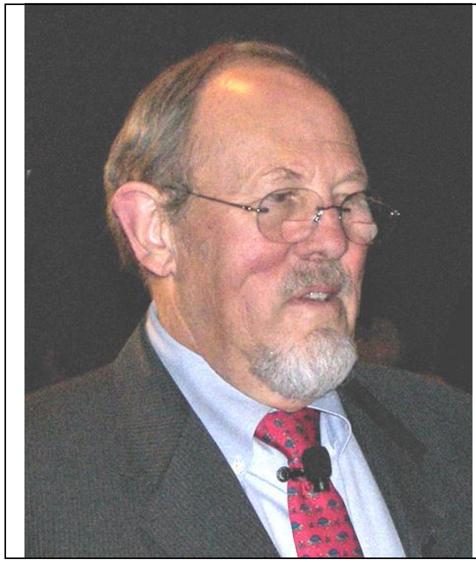
Лауреат Нобелевской премии по экономике в 1990 г.

Доходность портфеля за период владения: $y = (z_1 - z_0)/z_0$

z – стоимость портфеля $\begin{bmatrix} \text{в начале } z_0 \\ \text{в конце } \; z_1 \end{bmatrix}$ периода владения.

Всякая инвестиционная компания обязана регулярно публиковать доходность своего портфеля.

William Sharpe: Линейная модель доходности инвестиционного портфеля



Лауреат Нобелевской премии по экономике в 1990 г.

Доходность портфеля за период владения: $y = (z_1 - z_0)/z_0$

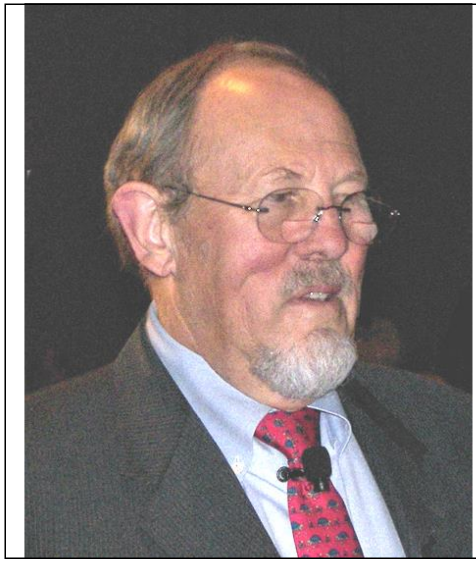
z – стоимость портфеля $\begin{bmatrix} \text{в начале } z_0 \\ \text{в конце } \; z_1 \end{bmatrix}$ периода владения.

Всякая инвестиционная компания обязана регулярно публиковать доходность своего портфеля.

Доходности биржевых активов или их классов: $x_i = (x_{1,i} - x_{0,i})/x_{0,i}$

стоимости активов или их классов $\begin{bmatrix} \text{в начале} & x_{0,i} \\ \text{в конце} & x_{1,i} \end{bmatrix}$ периода владения.

William Sharpe: Линейная модель доходности инвестиционного портфеля



Лауреат Нобелевской премии по экономике в 1990 г.

Доходность портфеля за период владения: $y = (z_1 - z_0)/z_0$

z – стоимость портфеля $\begin{bmatrix} \text{в начале } z_0 \\ \text{в конце } \; z_1 \end{bmatrix}$ периода владения.

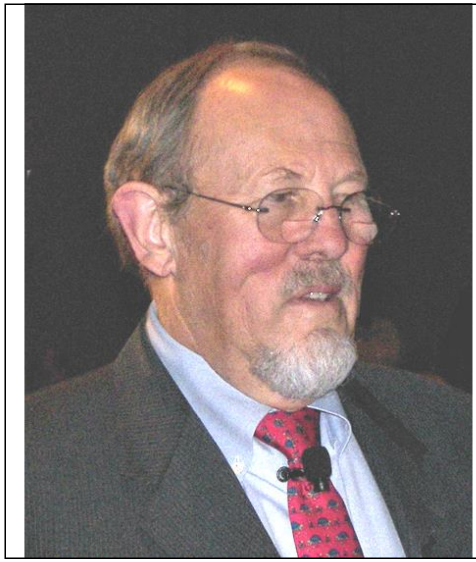
Всякая инвестиционная компания обязана регулярно публиковать доходность своего портфеля.

Доходности биржевых активов или их классов: $x_i = (x_{1,i} - x_{0,i})/x_{0,i}$

стоимости активов или их классов $\begin{bmatrix} \text{в начале} & x_{0,i} \\ \text{в конце} & x_{1,i} \end{bmatrix}$ периода владения.

Если рассматриваются классы активов, то их ожидаемые доходности x_i обычно оцениваются аналитическими компаниями как ***индексы доходности***.

William Sharpe: Линейная модель доходности инвестиционного портфеля



Лауреат Нобелевской премии по экономике в 1990 г.

Доходность портфеля за период владения: $y = (z_1 - z_0)/z_0$

z – стоимость портфеля $\begin{bmatrix} \text{в начале } z_0 \\ \text{в конце } z_1 \end{bmatrix}$ периода владения.

Всякая инвестиционная компания обязана регулярно публиковать доходность своего портфеля.

Доходности биржевых активов или их классов: $x_i = (x_{1,i} - x_{0,i})/x_{0,i}$

стоимости активов или их классов $\begin{bmatrix} \text{в начале } & x_{0,i} \\ \text{в конце } & x_{1,i} \end{bmatrix}$ периода владения.

Если рассматриваются классы активов, то их ожидаемые доходности x_i обычно оцениваются аналитическими компаниями как ***индексы доходности***.

Основное уравнение: $y = \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i = \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{x}$	$\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, ..., \beta_n)$ – распределение капитала в начале периода владения.

Returns Based Analysis of Investment Portfolios

Доступная информация: $\left[(y_t, x_{t,i}, i=1,...,n), t=1,2,3,...\right]$ – временные ряды доходности портфеля y_t и доходностей активов $x_{t,i}$, в которые предположительно может быть вложен капитал, для последовательности дней, недель, месяцев, кварталов или лет.

Returns Based Analysis of Investment Portfolios

Доступная информация: $\left[(y_t, x_{t,i}, i=1,...,n), t=1,2,3,...\right]$ – временные ряды доходности портфеля y_t и доходностей активов $x_{t,i}$, в которые предположительно может быть вложен капитал, для последовательности дней, недель, месяцев, кварталов или лет.

William Sharpe предложил аппроксимировать доходность портфеля (линейную комбинацию доходностей огромного множества всех активов, обращающихся на рынке) малым числом биржевых индексов, представляющих разные стили инвестирования.	**Задача квадратичного программирования:** $\begin{cases} (\hat{\beta}_1,...,\hat{\beta}_n): \sum_{t=1}^{T}\left(y_t - \sum_{i=1}^{n}\beta_i x_{t,i}\right)^2 \to \min, \\ \sum_{i=1}^{n}\beta_i = 1,\ \beta_i \ge 0. \end{cases}$

Returns Based Analysis of Investment Portfolios

Доступная информация: $\left[(y_t, x_{t,i}, i=1,...,n), t=1,2,3,...\right]$ – временные ряды доходности портфеля y_t и доходностей активов $x_{t,i}$, в которые предположительно может быть вложен капитал, для последовательности дней, недель, месяцев, кварталов или лет.

William Sharpe предложил аппроксимировать доходность портфеля (линейную комбинацию доходностей огромного множества всех активов, обращающихся на рынке) малым числом биржевых индексов, представляющих разные стили инвестирования.	**Задача квадратичного программирования:** $\begin{cases} (\hat{\beta}_1,...,\hat{\beta}_n): \sum_{t=1}^{T}\left(y_t - \sum_{i=1}^{n}\beta_i x_{t,i} \right)^2 \to \min, \\ \sum_{i=1}^{n}\beta_i = 1,\ \beta_i \geq 0. \end{cases}$

Предполагалось, что $\mathbb{I} = \{1,...,n\}$ – фактическое множество активов в портфеле.

Returns Based Analysis of Investment Portfolios

Доступная информация: $\left[(y_t,\, x_{t,i}, i=1,...,n), t=1,2,3,...\right]$ – временные ряды доходности портфеля y_t и доходностей активов $x_{t,i}$, в которые предположительно может быть вложен капитал, для последовательности дней, недель, месяцев, кварталов или лет.

William Sharpe предложил аппроксимировать доходность портфеля (линейную комбинацию доходностей огромного множества всех активов, обращающихся на рынке) малым числом биржевых индексов, представляющих разные стили инвестирования.	**Задача квадратичного программирования:** $\begin{cases} (\hat{\beta}_1,...,\hat{\beta}_n): \sum_{t=1}^{T}\left(y_t - \sum_{i=1}^{n}\beta_i x_{t,i} \right)^2 \to \min, \\ \sum_{i=1}^{n}\beta_i = 1,\ \beta_i \geq 0. \end{cases}$

Предполагалось, что $\mathbb{I}=\left\{1,...,n\right\}$ – фактическое множество активов в портфеле.

Наше обобщение: The factor search problem

Returns Based Analysis of Investment Portfolios

Доступная информация: $\left[(y_t, x_{t,i}, i=1,...,n), t=1,2,3,... \right]$ – временные ряды доходности портфеля y_t и доходностей активов $x_{t,i}$, в которые предположительно может быть вложен капитал, для последовательности дней, недель, месяцев, кварталов или лет.

William Sharpe предложил аппроксимировать доходность портфеля (линейную комбинацию доходностей огромного множества всех активов, обращающихся на рынке) малым числом биржевых индексов, представляющих разные стили инвестирования.	**Задача квадратичного программирования:** $\begin{cases} (\hat{\beta}_1,...,\hat{\beta}_n): \sum_{t=1}^{T} \left(y_t - \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_{t,i} \right)^2 \to \min, \\ \sum_{i=1}^{n} \beta_i = 1, \ \beta_i \geq 0. \end{cases}$

Предполагалось, что $\mathbb{I} = \{1,...,n\}$ – фактическое множество активов в портфеле.

Наше обобщение: The factor search problem

Число всех активов огромно $n \gg T$.

Требуется оценить подмножество активов, входящих в состав портфеля.

$\hat{\mathbb{I}} = \{i : \beta_i > 0\} \subset \mathbb{I} = \{1,...,n\}, \quad \hat{n} = |\hat{\mathbb{I}}| \ll n$ – неизвестный фактически размер портфеля.

Returns Based Analysis of Investment Portfolios

Доступная информация: $\left[(y_t,\, x_{t,i}, i=1,...,n),\, t=1,2,3,...\right]$ – временные ряды доходности портфеля y_t и доходностей активов $x_{t,i}$, в которые предположительно может быть вложен капитал, для последовательности дней, недель, месяцев, кварталов или лет.

William Sharpe предложил аппроксимировать доходность портфеля (линейную комбинацию доходностей огромного множества всех активов, обращающихся на рынке) малым числом биржевых индексов, представляющих разные стили инвестирования.	**Задача квадратичного программирования:** $\begin{cases} (\hat{\beta}_1,...,\hat{\beta}_n): \sum_{t=1}^{T}\left(y_t - \sum_{i=1}^{n}\beta_i x_{t,i}\right)^2 \to \min, \\ \sum_{i=1}^{n}\beta_i = 1,\ \beta_i \geq 0. \end{cases}$

Предполагалось, что $\mathbb{I}=\{1,...,n\}$ – фактическое множество активов в портфеле.

Наше обобщение: The factor search problem

Число всех активов огромно $n \gg T$.

Требуется оценить подмножество активов, входящих в состав портфеля.

$\hat{\mathbb{I}}=\{i:\beta_i>0\}\subset\mathbb{I}=\{1,...,n\}$, $\quad \hat{n}=|\hat{\mathbb{I}}|\ll n$ – неизвестный фактически размер портфеля.

Это поиск иголки в стоге сена!

Returns Based Analysis of Investment Portfolios

Доступная информация: $\left[(y_t, x_{t,i}, i=1,...,n), t=1,2,3,...\right]$ – временные ряды доходности портфеля y_t и доходностей активов $x_{t,i}$, в которые предположительно может быть вложен капитал, для последовательности дней, недель, месяцев, кварталов или лет.

William Sharpe предложил аппроксимировать доходность портфеля (линейную комбинацию доходностей огромного множества всех активов, обращающихся на рынке) малым числом биржевых индексов, представляющих разные стили инвестирования.	**Задача квадратичного программирования:** $\begin{cases} (\hat{\beta}_1,...,\hat{\beta}_n): \sum_{t=1}^{T}\left(y_t - \sum_{i=1}^{n}\beta_i x_{t,i}\right)^2 \to \min, \\ \sum_{i=1}^{n}\beta_i = 1,\ \beta_i \geq 0. \end{cases}$

Предполагалось, что $\mathbb{I} = \{1,...,n\}$ – фактическое множество активов в портфеле.

Наше обобщение: The factor search problem

Число всех активов огромно $n \gg T$.

Требуется оценить подмножество активов, входящих в состав портфеля.

$\hat{\mathbb{I}} = \{i : \beta_i > 0\} \subset \mathbb{I} = \{1,...,n\}, \quad \hat{n} = |\hat{\mathbb{I}}| \ll n$ – неизвестный фактически размер портфеля.

Это поиск иголки в стоге сена!

Такой поиск невозможен без принятия некоторых априорных предположений об искомой структуре инвестиционного портфеля.

Проблемно-ориентированная регуляризация

Некорректная задача, даже с ограничениями	$\varphi(\beta_1,\dots,\beta_n)=\sum_{t=1}^{T}\left(y_t-\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_{t,i}\right)^2\to\min,\ n\gg T,\ \sum_{i=1}^{n}\beta_i=1,\ \beta_i\geq 0.$	

Проблемно-ориентированная регуляризация

Некорректная задача, даже с ограничениями	$\varphi(\beta_1,...,\beta_n)=\sum_{t=1}^{T}\left(y_t-\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_{t,i}\right)^2\to\min,\ n\gg T,\ \sum_{i=1}^{n}\beta_i=1,\ \beta_i\geq 0.$

Традиционный принцип регуляризации – параметрическое семейство функций штрафа на выбор модели данных $f(\beta_1,...,\beta_n|\alpha)\to\min$.

Регуляризованная задача – два критерия оптимизация	$\underbrace{f(\beta_1,...,\beta_n\,|\,\alpha)}_{\text{функция регуляризации}}\to\min,\ \alpha\in\mathbb{A}\ \underbrace{\varphi(\beta_1,...,\beta_n)}_{\text{objective function}}\to\min$

Проблемно-ориентированная регуляризация

Некорректная задача, даже с ограничениями	$\varphi(\beta_1,...,\beta_n)=\sum_{t=1}^{T}\left(y_t-\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_{t,i}\right)^2\rightarrow\min,\ n\gg T,\ \sum_{i=1}^{n}\beta_i=1,\ \beta_i\geq 0.$

Традиционный принцип регуляризации – параметрическое семейство функций штрафа на выбор модели данных $f(\beta_1,...,\beta_n|\alpha)\rightarrow\min$.

Регуляризованная задача – два критерия оптимизация	$\underbrace{f(\beta_1,...,\beta_n\,|\,\alpha)}_{\text{функция регуляризации}}\rightarrow\min,\ \alpha\in\mathbb{A}\ \underbrace{\varphi(\beta_1,...,\beta_n)}_{\text{objective function}}\rightarrow\min$

Модель следует искать в пределах множества Парето $0\leq c<\infty$:

$$(\beta_1,...,\beta_n|\alpha,c)=\arg\min\left[f(\beta_1,...,\beta_n\,|\,\alpha)+c\sum_{t=1}^{T}\left(y_t-\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_{t,i}\right)^2,\ \sum_{i=1}^{n}\beta_i=1,\beta_i\geq 0\right].$$

Проблемно-ориентированная регуляризация

Некорректная задача, даже с ограничениями	$\varphi(\beta_1,...,\beta_n)=\sum_{t=1}^{T}\left(y_t-\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_{t,i}\right)^2 \to \min,\ n \gg T\ ,\ \sum_{i=1}^{n}\beta_i=1,\ \beta_i \geq 0.$

Традиционный принцип регуляризации – параметрическое семейство функций штрафа на выбор модели данных $f(\beta_1,...,\beta_n|\alpha) \to \min$.

Регуляризованная задача – два критерия оптимизация	$\underbrace{f(\beta_1,...,\beta_n\,|\,\alpha)}_{\textit{функция регуляризации}} \to \min,\ \alpha \in \mathbb{A}\ \underbrace{\varphi(\beta_1,...,\beta_n)}_{\textit{objective function}} \to \min$

Модель следует искать в пределах множества Парето $0 \leq c < \infty$:

$$(\beta_1,...,\beta_n|\alpha,c) = \arg\min\left[f(\beta_1,...,\beta_n\,|\,\alpha) + c\sum_{t=1}^{T}\left(y_t-\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_{t,i}\right)^2,\ \sum_{i=1}^{n}\beta_i = 1, \beta_i \geq 0 \right].$$

Здесь параметр регуляризации $\alpha \in \mathbb{A}$ и коэффициент Парето $0 \leq c < \infty$ – два гиперпараметра, которые должны быть подобраны согласно некоторому «подходящему принципу» верификации.

Проблемно-ориентированная регуляризация

Некорректная задача, даже с ограничениями	$\varphi(\beta_1,...,\beta_n)=\sum_{t=1}^{T}\left(y_t-\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_{t,i}\right)^2\to\min,\ n\gg T,\ \sum_{i=1}^{n}\beta_i=1,\ \beta_i\geq 0.$

Традиционный принцип регуляризации – параметрическое семейство функций штрафа на выбор модели данных $f(\beta_1,...,\beta_n|\alpha)\to\min$.

Регуляризованная задача – два критерия оптимизация	$\underbrace{f(\beta_1,...,\beta_n\mid\alpha)}_{функция\ регуляризации}\to\min,\ \alpha\in\mathbb{A}\ \underbrace{\varphi(\beta_1,...,\beta_n)}_{objective\ function}\to\min$

Модель следует искать в пределах множества Парето $0\leq c<\infty$:

$$(\beta_1,...,\beta_n|\alpha,c)=\arg\min\left[f(\beta_1,...,\beta_n\mid\alpha)+c\sum_{t=1}^{T}\left(y_t-\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_{t,i}\right)^2,\ \sum_{i=1}^{n}\beta_i=1,\beta_i\geq 0\right].$$

Здесь параметр регуляризации $\alpha\in\mathbb{A}$ и коэффициент Парето $0\leq c<\infty$ – два гиперпараметра, которые должны быть подобраны согласно некоторому «подходящему принципу» верификации.

В этих терминах, задача Factor Search сводится к:

- выбору семейства проблемно-ориентированных регуляризующих функций;
- выбору принципа и процедуры регуляризации.

Проблемно-ориентированная регуляризация

Некорректная задача, даже с ограничениями	$\varphi(\beta_1,...,\beta_n)=\sum_{t=1}^{T}\left(y_t-\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_{t,i}\right)^2\to\min,\ n\gg T,\ \sum_{i=1}^{n}\beta_i=1,\ \beta_i\ge 0.$

Традиционный принцип регуляризации – параметрическое семейство функций штрафа на выбор модели данных $f(\beta_1,...,\beta_n|\alpha)\to\min$.

Регуляризованная задача – два критерия оптимизация	$\underbrace{f(\beta_1,...,\beta_n\,|\,\alpha)}_{функция\ регуляризации}\to\min,\ \alpha\in\mathbb{A}\ \underbrace{\varphi(\beta_1,...,\beta_n)}_{objective\ function}\to\min$

Модель следует искать в пределах множества Парето $0\le c<\infty$:

$$(\beta_1,...,\beta_n|\alpha,c)=\arg\min\left[f(\beta_1,...,\beta_n\,|\,\alpha)+c\sum_{t=1}^{T}\left(y_t-\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_{t,i}\right)^2,\ \sum_{i=1}^{n}\beta_i=1,\beta_i\ge 0\right].$$

Здесь параметр регуляризации $\alpha\in\mathbb{A}$ и коэффициент Парето $0\le c<\infty$ – два гиперпараметра, которые должны быть подобраны согласно некоторому «подходящему принципу» верификации.

В этих терминах, задача Factor Search сводится к:

- выбору семейства проблемно-ориентированных регуляризующих функций;
- выбору принципа и процедуры регуляризации.

Мы вернемся к задаче верификации чуть позже. .

Проблемно-ориентированная регуляризация

Некорректная задача, даже с ограничениями	$\varphi(\beta_1,...,\beta_n)=\sum_{t=1}^{T}\left(y_t-\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_{t,i}\right)^2\to\min,\ n\gg T,\ \sum_{i=1}^{n}\beta_i=1,\ \beta_i\geq 0.$

Традиционный принцип регуляризации – параметрическое семейство функций штрафа на выбор модели данных $f(\beta_1,...,\beta_n|\alpha)\to\min$.

Регуляризованная задача – два критерия оптимизация	$\underbrace{f(\beta_1,...,\beta_n\,|\,\alpha)}_{\text{функция регуляризации}}\to\min,\ \alpha\in\mathbb{A}\ \underbrace{\varphi(\beta_1,...,\beta_n)}_{\text{objective function}}\to\min$

Модель следует искать в пределах множества Парето $0\leq c<\infty$:

$$(\beta_1,...,\beta_n|\alpha,c)=\arg\min\left[f(\beta_1,...,\beta_n\,|\,\alpha)+c\sum_{t=1}^{T}\left(y_t-\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_{t,i}\right)^2,\ \sum_{i=1}^{n}\beta_i=1,\beta_i\geq 0\right].$$

Здесь параметр регуляризации $\alpha\in\mathbb{A}$ и коэффициент Парето $0\leq c<\infty$ – два гиперпараметра, которые должны быть подобраны согласно некоторому «подходящему принципу» верификации.

В этих терминах, задача Factor Search сводится к:

- выбору семейства проблемно-ориентированных регуляризующих функций;
- выбору принципа и процедуры регуляризации.

Сначала мы займемся поиском принципов регуляризации модели инвестиционного портфеля.

Наша идея:

Использовать естественное предположение, что анализируемый портфель построен его администрацией с целью сохранения и увеличения капитала.

Наша идея:

Использовать естественное предположение, что анализируемый портфель построен его администрацией с целью сохранения и увеличения капитала.

Неизвестные доходности активов в предстоящем интервале владения как– случайный вектор	$\boldsymbol{X} = \left(X_1 \cdots X_n \right)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$
Тогда доходность портфеля – случайная величина, определяемой распределением капитала $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, ..., \beta_n) \in \mathbb{R}^n$	$Y = \sum_{i=1}^{n} \beta_i X_i = \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{X} \in \mathbb{R}$

Наша идея:

Использовать естественное предположение, что анализируемый портфель построен его администрацией с целью сохранения и увеличения капитала.

Неизвестные доходности активов в предстоящем интервале владения как– случайный вектор	$\boldsymbol{X} = \left(X_1 \cdots X_n \right)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$
Тогда доходность портфеля – случайная величина, определяемой распределением капитала $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, ..., \beta_n) \in \mathbb{R}^n$	$Y = \sum_{i=1}^{n} \beta_i X_i = \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{X} \in \mathbb{R}$

Будем полагать, что инвестор руководствовался своими предположениями об этом случайном векторе:

Наша идея:

Использовать естественное предположение, что анализируемый портфель построен его администрацией с целью сохранения и увеличения капитала.

Неизвестные доходности активов в предстоящем интервале владения как– случайный вектор	$\boldsymbol{X} = \left(X_1 \cdots X_n \right)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$
Тогда доходность портфеля – случайная величина, определяемой распределением капитала $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1,\ldots,\beta_n) \in \mathbb{R}^n$	$Y = \sum_{i=1}^{n} \beta_i X_i = \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{X} \in \mathbb{R}$

Будем полагать, что инвестор руководствовался своими предположениями об этом случайном векторе:

• предполагаемые доходности всех активов – вектор математических ожиданий	$\overline{\mathbf{x}} = E\{\boldsymbol{X}\} \in \mathbb{R}^n;$
• степень неуверенности в этих ожиданиях– ковариационная матрица	$\mathbf{G}=\mathbf{G}^{\mathrm{T}}=E\left\{\left(\boldsymbol{X}-\overline{\mathbf{x}}\right)\left(\boldsymbol{X}-\overline{\mathbf{x}}\right)^{\mathrm{T}}\right\}(n\times n)$
• полное отсутствие каких-либо предположений	???

Наша идея:

Использовать естественное предположение, что анализируемый портфель построен его администрацией с целью сохранения и увеличения капитала.

Неизвестные доходности активов в предстоящем интервале владения как– случайный вектор	$\boldsymbol{X} = \left(X_1 \cdots X_n \right)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$
Тогда доходность портфеля – случайная величина, определяемой распределением капитала $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, ..., \beta_n) \in \mathbb{R}^n$	$Y = \sum_{i=1}^{n} \beta_i X_i = \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{X} \in \mathbb{R}$

Будем полагать, что инвестор руководствовался своими предположениями об этом случайном векторе:

• предполагаемые доходности всех активов – вектор математических ожиданий	$\bar{\mathbf{x}} = E\{\boldsymbol{X}\} \in \mathbb{R}^n;$
• степень неуверенности в этих ожиданиях– ковариационная матрица	$\mathbf{G}{=}\mathbf{G}^{\mathrm{T}} = E\left\{ \left(\boldsymbol{X} - \bar{\mathbf{x}} \right) \left(\boldsymbol{X} - \bar{\mathbf{x}} \right)^{\mathrm{T}} \right\} (n \times n)$
• полное отсутствие каких-либо предположений	???

В любом случае, инвестор стремился построить «хороший» портфель.

Наша идея:

Использовать естественное предположение, что анализируемый портфель построен его администрацией с целью сохранения и увеличения капитала.

Неизвестные доходности активов в предстоящем интервале владения как– случайный вектор	$\boldsymbol{X} = \left(X_1 \cdots X_n \right)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$
Тогда доходность портфеля – случайная величина, определяемой распределением капитала $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, ..., \beta_n) \in \mathbb{R}^n$	$Y = \sum_{i=1}^{n} \beta_i X_i = \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{X} \in \mathbb{R}$

Будем полагать, что инвестор руководствовался своими предположениями об этом случайном векторе:

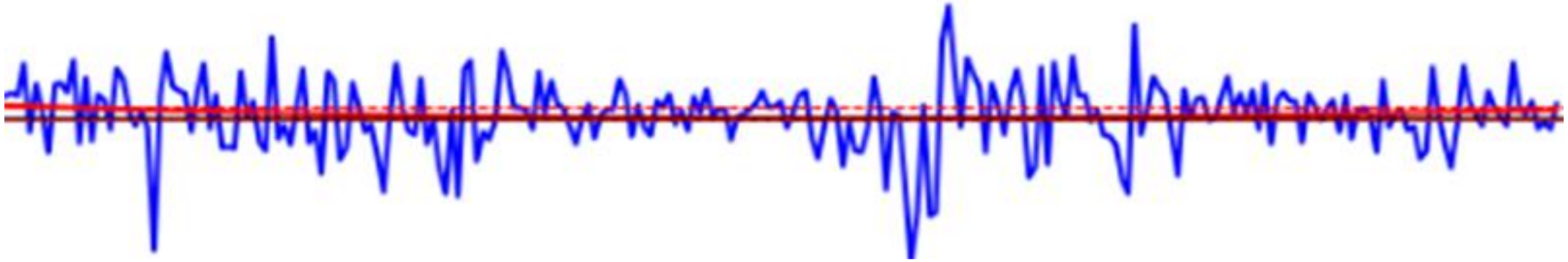
• предполагаемые доходности всех активов – вектор математических ожиданий	$\bar{\mathbf{x}} = E\{\boldsymbol{X}\} \in \mathbb{R}^n;$
• степень неуверенности в этих ожиданиях– ковариационная матрица	$\mathbf{G}=\mathbf{G}^{\mathrm{T}}=E\left\{\left(\boldsymbol{X}-\bar{\mathbf{x}}\right)\left(\boldsymbol{X}-\bar{\mathbf{x}}\right)^{\mathrm{T}}\right\}(n\times n)$
• полное отсутствие каких-либо предположений	???

В любом случае, инвестор стремился построить «хороций» портфель.

Каков математический критерий качества портфеля с точки зрения инвестора?

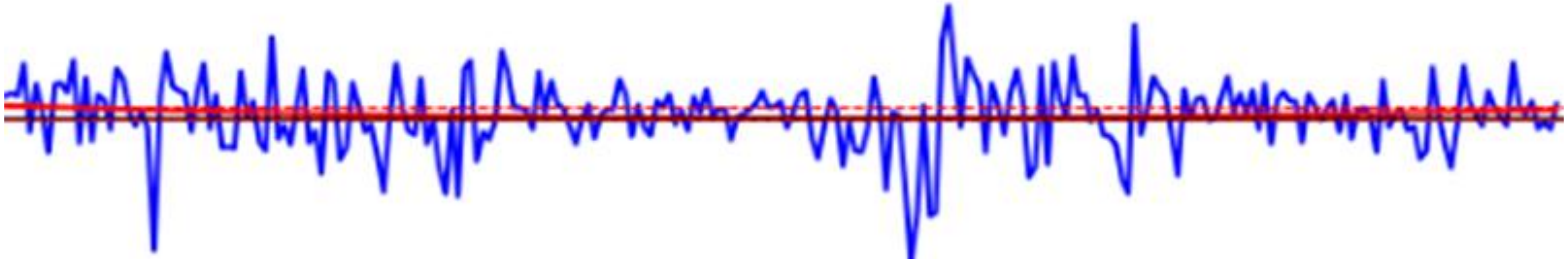
Желание минимизировать дисперсию доходности портфеля (риск потери капитала)

Средние значения случайных доходностей как отдельных активов, так и портфеля в целом, много меньше их среднеквадратичныых отклонений от нуля.



Желание минимизировать дисперсию доходности портфеля (риск потери капитала)

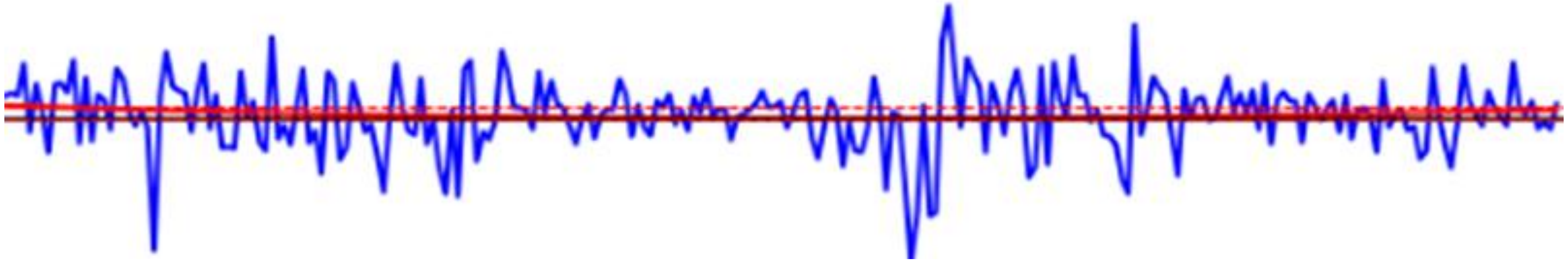
Средние значения случайных доходностей как отдельных активов, так и портфеля в целом, много меньше их среднеквадратичныых отклонений от нуля.



Чем меньше дисперсия, тем меньше риск отрицательной доходности.

Желание минимизировать дисперсию доходности портфеля (риск потери капитала)

Средниеч значения случайных доходностей как отдельных активов, так и портфеля в целом, много меньше их среднеквадратичныых отклонений от нуля.

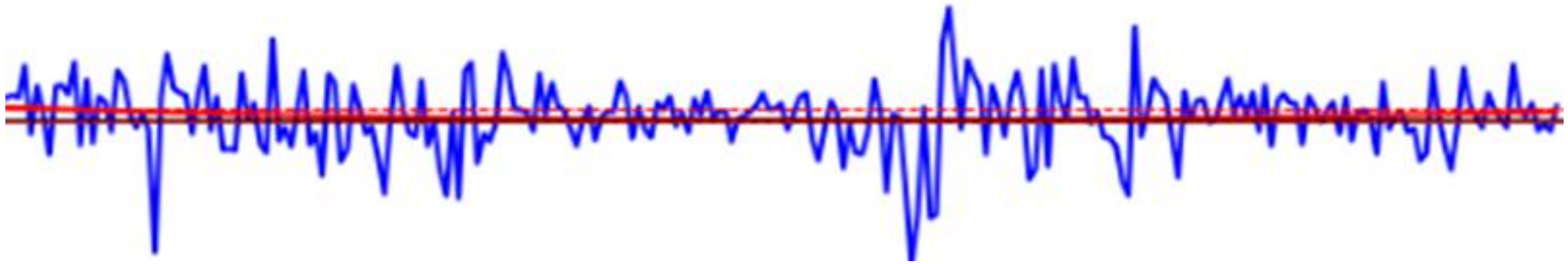


Чем меньше дисперсия, тем меньше риск отрицательной доходности.

$\begin{cases} \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}\boldsymbol{\beta} \to \min(\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^n), \\ \mathbf{1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} = 1, \ \boldsymbol{\beta} \geq \mathbf{0}, \end{cases}$ или, в скалярном виде,	$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} g_{ij}\beta_i\beta_j \to \min(\beta_1,\ldots,\beta_n), \\ \sum_{i=1}^{n}\beta_i = 1, \quad \beta_i \geq 0, i = 1,\ldots,n, \end{cases}$	Задача квадратичного программирования.

Желание минимизировать дисперсию доходности портфеля (риск потери капитала)

Средниеч значения случайных доходностей как отдельных активов, так и портфеля в целом, много меньше их среднеквадратичныых отклонений от нуля.



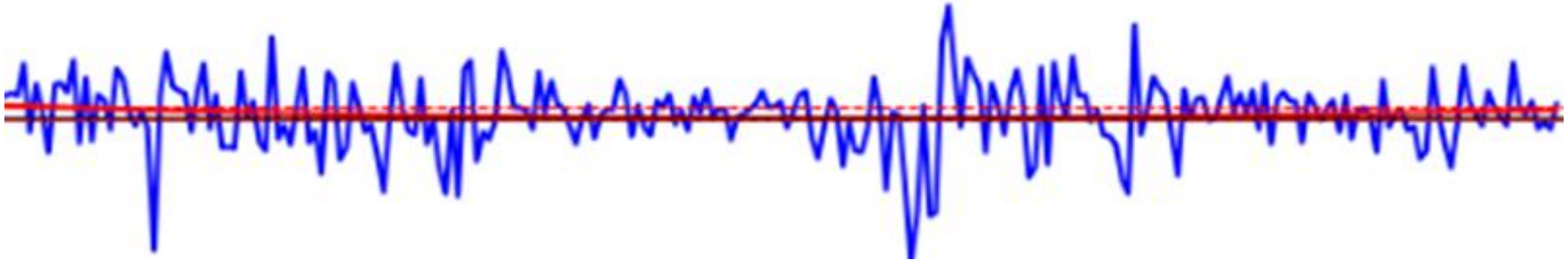
Чем меньше дисперсия, тем меньше риск отрицательной доходности.

$\begin{cases}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}\boldsymbol{\beta} \to \min(\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^n),\\ \mathbf{1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} = 1,\ \boldsymbol{\beta} \geq \mathbf{0},\end{cases}$ или, в скалярном виде,	$\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} g_{ij}\beta_i\beta_j \to \min(\beta_1,\ldots,\beta_n),\\ \sum_{i=1}^{n}\beta_i = 1,\quad \beta_i \geq 0,\ i = 1,\ldots,n,\end{cases}$	Задача квадратичного программирования.

Доходности биржевых активов, как правило, очень сильно коррелированы. Как следствие, наименее рискованный портфель содержит лишь небольшое число наименее рискованных и наименее коррелированных активов.

Желание минимизировать дисперсию доходности портфеля (риск потери капитала)

Средниеч значения случайных доходностей как отдельных активов, так и портфеля в целом, много меньше их среднеквадратичныых отклонений от нуля.



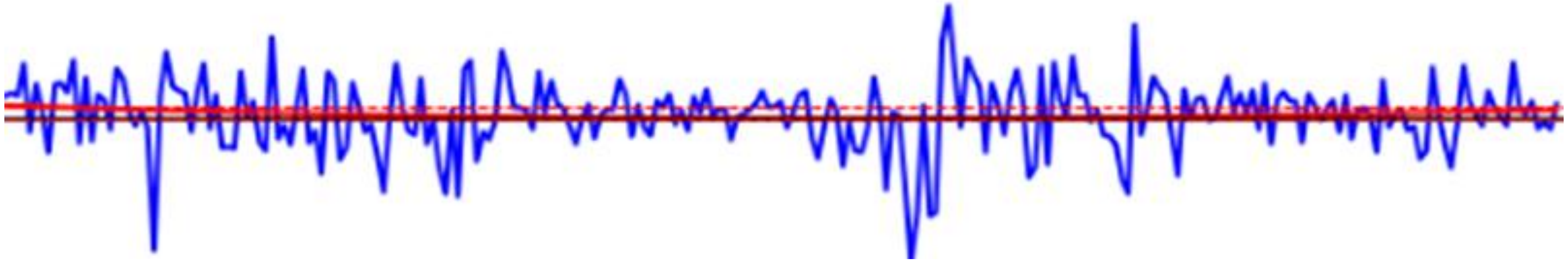
Чем меньше дисперсия, тем ментше риск отрицательной доходности.

$\begin{cases}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}\boldsymbol{\beta} \to \min(\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^n), \\ \mathbf{1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} = 1, \ \boldsymbol{\beta} \geq \mathbf{0},\end{cases}$ или, в скалярном виде,	$\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} g_{ij}\beta_i\beta_j \to \min(\beta_1,\ldots,\beta_n), \\ \sum_{i=1}^{n}\beta_i = 1, \quad \beta_i \geq 0, i = 1,\ldots,n,\end{cases}$	Задача квадратичного программирования.

Доходности биржевых активов, как правило, очень сильно коррелированы. Как следствие, наименее рискованный портфель содержит лишь небольшое число наименее рискованных и наименее коррелированных активов. Жестокая реальность – эти активы наименее доходны.

Желание минимизировать дисперсию доходности портфеля (риск потери капитала)

Средниеч значения случайных доходностей как отдельных активов, так и портфеля в целом, много меньше их среднеквадратичныых отклонений от нуля.



Чем меньше дисперсия, тем ментше риск отрицательной доходности.

$\begin{cases} \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}\boldsymbol{\beta} \to \min(\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^n), \\ \mathbf{1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} = 1,\ \boldsymbol{\beta} \geq \mathbf{0}, \end{cases}$ или, в скалярном виде,	$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} g_{ij}\beta_i\beta_j \to \min(\beta_1,\ldots,\beta_n), \\ \sum_{i=1}^{n}\beta_i = 1, \quad \beta_i \geq 0, i = 1,\ldots,n, \end{cases}$	Задача квадратичного программирования.

Доходности биржевых активов, как правило, очень сильно коррелированы. Как следствие, наименее рискованный портфель содержит лишь небольшое число наименее рискованных и наименее коррелированных активов. Жестокая реальность – эти активы наименее доходны.

Это плохое решение.

Желание максимизировать доходность портфеля

Желание максимизировать доходность портфеля

Нам будет удобно записать соответствующий критерий с обратным знаком – как задачу минимизации:

$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \beta_i \overline{x}_i \to \max(\beta_1, \dots, \beta_n), \\ \sum_{i=1}^{n} \beta_i = 1, \quad \beta_i \geq 0, i = 1, \dots, n. \end{cases}$	С формальной точки зрения это задача линейного программирования. Однако ее решение очевидно и тривиально: $j = \arg\max_{i=1,\dots,n} \overline{x}_i, \quad \beta_j = 1, \quad \beta_i = 0, i \neq j, \quad n_\beta = 1$

Желание максимизировать доходность портфеля

Нам будет удобно записать соответствующий критерий с обратным знаком – как задачу минимизации:

$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \beta_i \overline{x}_i \to \max(\beta_1,...,\beta_n), \\ \sum_{i=1}^{n} \beta_i = 1, \quad \beta_i \geq 0, i = 1,...,n. \end{cases}$	С формальной точки зрения это задача линейного программирования. Однако ее решение очевидно и тривиально: $j = \arg\max_{i=1,...,n} \overline{x}_i, \quad \beta_j = 1, \quad \beta_i = 0, i \neq j, \quad n_{\boldsymbol{\beta}} = 1$

Так же как критерий минимального риска, этот критерий максимальной доходости тоже является вырожденным, но в противоположном сиысле. Наиболее доходный портфель оказывается, как правило, и наиболее рискованным.

Желание максимизировать доходность портфеля

Нам будет удобно записать соответствующий критерий с обратным знаком – как задачу минимизации:

$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \beta_i \overline{x}_i \to \max(\beta_1, ..., \beta_n), \\ \sum_{i=1}^{n} \beta_i = 1, \quad \beta_i \geq 0, i = 1, ..., n. \end{cases}$	С формальной точки зрения это задача линейного программирования. Однако ее решение очевидно и тривиально: $j = \arg\max_{i=1,...,n} \overline{x}_i, \quad \beta_j = 1, \quad \beta_i = 0, i \neq j, \quad n_{\beta} = 1$

Так же как критерий минимального риска, этот критерий максимальной доходости тоже является вырожденным, но в ,противоположном сиысле. Наиболее доходный портфель оказывается, как правило, и наиболее рискованным.

Опять плохое решение. Нет в жизни счастья?

Желание максимизировать доходность портфеля

Нам будет удобно записать соответствующий критерий с обратным знаком – как задачу минимизации:

$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i \bar{x}_i \to \max(\beta_1,...,\beta_n), \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i = 1, \quad \beta_i \ge 0, i = 1,...,n. \end{cases}$	С формальной точки зрения это задача линейного программирования. Однако ее решение очевидно и тривиально: $j = \arg\max\limits_{i=1,...,n} \bar{x}_i, \; \beta_j = 1, \quad \beta_i = 0, i \ne j, \quad n_\beta = 1$

Так же как критерий минимального риска, этот критерий максимальной доходости тоже является вырожденным, но в ,противоположном сиысле. Наиболее доходный портфель оказывается, как правило, и наиболее рискованным.

Опять плохое решение. Нет в жизни счастья?

Есть. Счастье посередине.

Регуляризация 1.
Баланс между риском и доходностью

Harry M. Markowitz, Лауреат Нобелевской премии по экономике в 1990 г. (совместно с William Sharpe).

Theory of portfolio composition.

Портфель Марковица: Максимальная доходность при фиксированном риске, и наоборот – минимальный писк при фиксированной доходности.

Эффективный портфель.

Регуляризация 1.
Баланс между риском и доходностью

Harry M. Markowitz, Лауреат Нобелевской премии по экономике в 1990 г. (совместно с William Sharpe).

Theory of portfolio composition.

Портфель Марковица: Максимальная доходность при фиксированном риске, и наоборот – минимальный писк при фиксированной доходности.

Эффективный портфель.

Семейство портфелей Маруовица – множество Парето для двух взаимно противоречащих критериев

$\begin{cases} \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}\boldsymbol{\beta} \to \min(\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^n), \\ \mathbf{1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} = 1,\ \boldsymbol{\beta} \geq \mathbf{0}, \bar{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} = const \end{cases}$	$\begin{cases} \bar{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} \to \max(\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^n), \\ \mathbf{1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} = 1,\ \boldsymbol{\beta} \geq \mathbf{0}, \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}\boldsymbol{\beta} = const \end{cases}$

Регуляризация 1. Баланс между риском и доходностью

	**Harry M. Markowitz**, Лауреат Нобелевской премии по экономике в 1990 г. (совместно с William Sharpe). ***Theory of portfolio composition.*** Портфель Марковица: Максимальная доходность при фиксированном риске, и наоборот – минимальный писк при фиксированной доходности. **Эффективный портфель.**

Семейство портфелей Маруовица – множество Парето для двух взаимно противоречащих критериев

$\begin{cases} \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}\boldsymbol{\beta} \to \min(\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^n), \\ \mathbf{1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} = 1,\ \boldsymbol{\beta} \geq \mathbf{0}, \bar{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} = const \end{cases}$	$\begin{cases} \bar{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} \to \max(\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^n), \\ \mathbf{1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} = 1,\ \boldsymbol{\beta} \geq \mathbf{0}, \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}\boldsymbol{\beta} = const \end{cases}$

Объединенный критерий Марковица – функция полезности портфеля $f(\boldsymbol{\beta}|\alpha)$

$\begin{cases} \boldsymbol{\beta}_\alpha = \arg\min\left\{(1-\alpha)\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}\boldsymbol{\beta} - \alpha\bar{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}\right\}, \\ \mathbf{1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} = 1,\ \boldsymbol{\beta} \geq \mathbf{0},\ 0 \leq \alpha \leq 1. \end{cases}$	Risk Tolerance α, Risk Aversion $1-\alpha$. Индивидуальная психологическая характеристика инвестра.

Регуляризация 1. Баланс между риском и доходностью

	**Harry M. Markowitz**, Лауреат Нобелевской премии по экономике в 1990 г. (совместно с William Sharpe). ***Theory of portfolio composition.*** Портфель Марковица: Максимальная доходность при фиксированном риске, и наоборот – минимальный писк при фиксированной доходности. **Эффективный портфель.**

Семейство портфелей Маруовица – множество Парето для двух взаимно противоречащих критериев

$\begin{cases} \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}\boldsymbol{\beta} \to \min(\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^n), \\ \mathbf{1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} = 1,\ \boldsymbol{\beta} \geq \mathbf{0}, \overline{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} = const \end{cases}$	$\begin{cases} \overline{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} \to \max(\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^n), \\ \mathbf{1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} = 1,\ \boldsymbol{\beta} \geq \mathbf{0}, \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}\boldsymbol{\beta} = const \end{cases}$

Объединенный критерий Марковица – функция полезности портфеля $f(\boldsymbol{\beta}|\alpha)$

$\begin{cases} \boldsymbol{\beta}_{\alpha} = \arg\min\left\{(1-\alpha)\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}\boldsymbol{\beta} - \alpha\overline{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}\right\}, \\ \mathbf{1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} = 1,\ \boldsymbol{\beta} \geq \mathbf{0},\ 0 \leq \alpha \leq 1. \end{cases}$	Risk Tolerance α, Risk Aversion $1-\alpha$. Индивидуальная психологическая характеристика инвестра.

Однопараметрическое семейство эффективных портфелей.
Нет смысла рассматривать другие портфели.

Пример

Реальный массив временных рядов месячных доходностей $\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^n$ для $n = 650$ биржевых индексов за более, чем 20 лет $t = 1,\ldots,T = 251$.

Пример

Реальный массив временных рядов месячных доходностей $\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^n$ для $n = 650$ биржевых индексов за более, чем 20 лет $t = 1,\ldots,T = 251$.

Вектор средних значений и ковариационная матрица	$\hat{\bar{\mathbf{x}}} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\mathbf{x}_t\,, \qquad \hat{\mathbf{G}} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(\mathbf{x}_t - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x}_t - \bar{\mathbf{x}})^{\mathrm{T}}$

Пример Пример

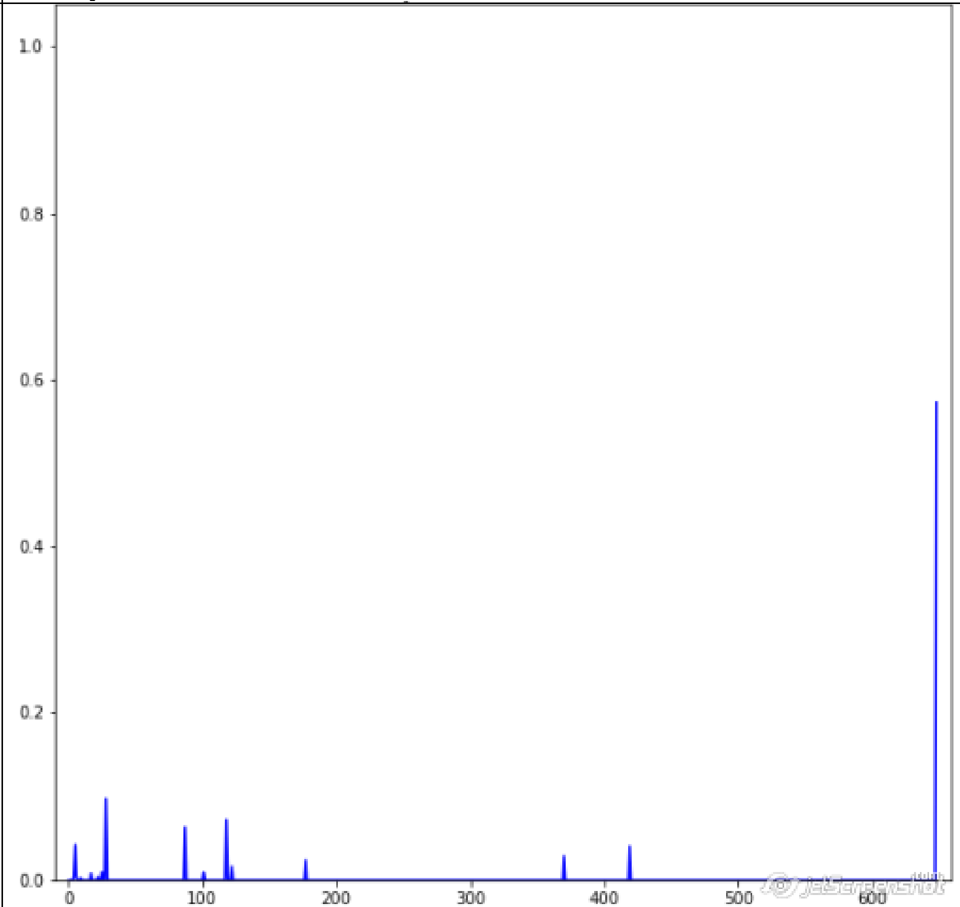
Реальный массив временных рядов месячных доходностей $\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^n$ для $n = 650$ биржевых индексов за более, чем 20 лет $t = 1,\ldots,T = 251$.

Вектор средних значений и ковариационная матрица	$\hat{\bar{\mathbf{x}}} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\mathbf{x}_t, \quad \hat{\mathbf{G}} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(\mathbf{x}_t - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x}_t - \bar{\mathbf{x}})^{\mathrm{T}}$
	Capital shares $\alpha = 0$

Численное решение задачи Марковица Risk Tolerance $0 \to \alpha \to 1$

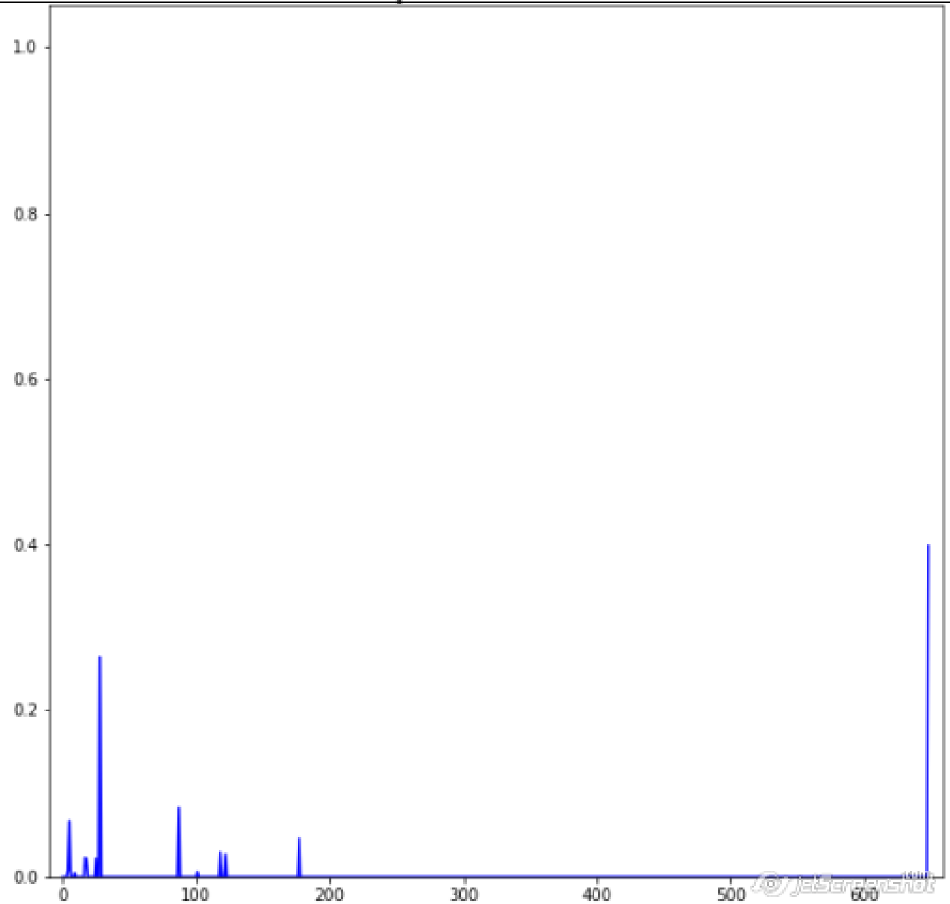
$$\begin{cases} \boldsymbol{\beta}_\alpha = \arg\min\left\{(1-\alpha)\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}\boldsymbol{\beta} - \alpha\bar{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}\right\}, \\ \mathbf{1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} = 1,\ \boldsymbol{\beta} \geq \mathbf{0}, = const. \end{cases}$$

This one-parametric family exhaust all the effective portfolios



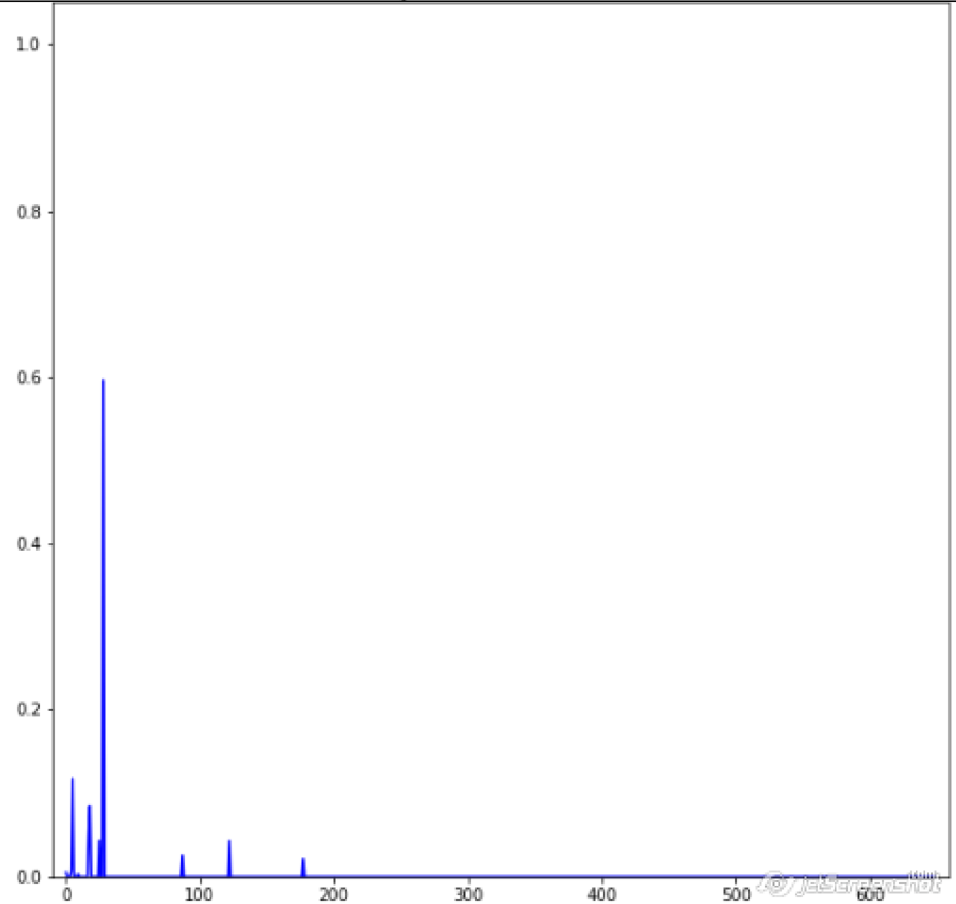
Пример

Реальный массив временных рядов месячных доходностей $\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^n$ для $n = 650$ биржевых индексов за более, чем 20 лет $t = 1,\ldots,T = 251$.

Вектор средних значений и ковариационная матрица	$\hat{\bar{\mathbf{x}}} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\mathbf{x}_t\,, \qquad \hat{\mathbf{G}} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(\mathbf{x}_t - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x}_t - \bar{\mathbf{x}})^{\mathrm{T}}$
	Capital shares $\alpha = 0$
Численное решение задачи Марковица Risk Tolerance $0 \to \alpha \to 1$ $\begin{cases} \boldsymbol{\beta}_\alpha = \arg\min\left\{(1-\alpha)\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}\boldsymbol{\beta} - \alpha\bar{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}\right\}, \\ \mathbf{1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} = 1,\ \boldsymbol{\beta} \geq \mathbf{0}, = const. \end{cases}$ This one-parametric family exhaust all the effective portfolios	

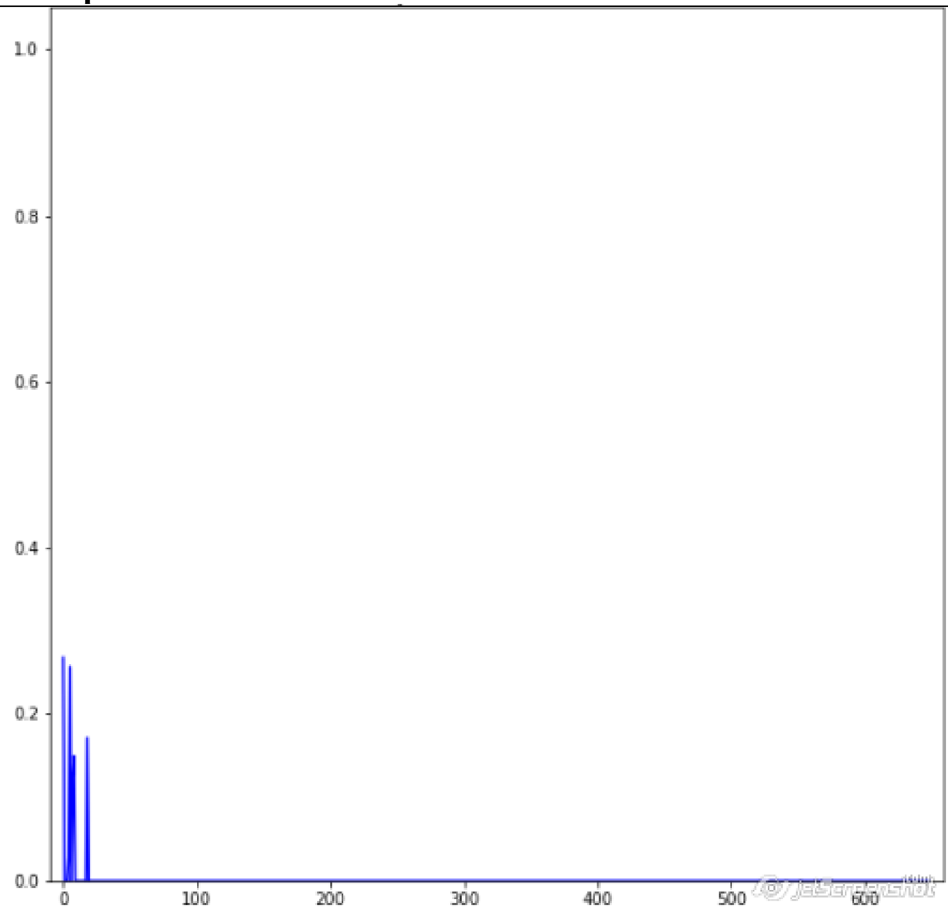
Пример

Реальный массив временных рядов месячных доходностей $\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^n$ для $n = 650$ биржевых индексов за более, чем 20 лет $t = 1,\dots,T = 251$.

Вектор средних значений и ковариационная матрица	$\hat{\bar{\mathbf{x}}} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\mathbf{x}_t, \qquad \hat{\mathbf{G}} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(\mathbf{x}_t - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x}_t - \bar{\mathbf{x}})^{\mathrm{T}}$
	Capital shares $\alpha = 0$
Численное решение задачи Марковица Risk Tolerance $0 \to \alpha \to 1$ $\begin{cases} \boldsymbol{\beta}_\alpha = \arg\min\left\{(1-\alpha)\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}\boldsymbol{\beta} - \alpha\bar{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}\right\}, \\ \mathbf{1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} = 1,\ \boldsymbol{\beta} \geq \mathbf{0}, = const. \end{cases}$ This one-parametric family exhaust all the effective portfolios	

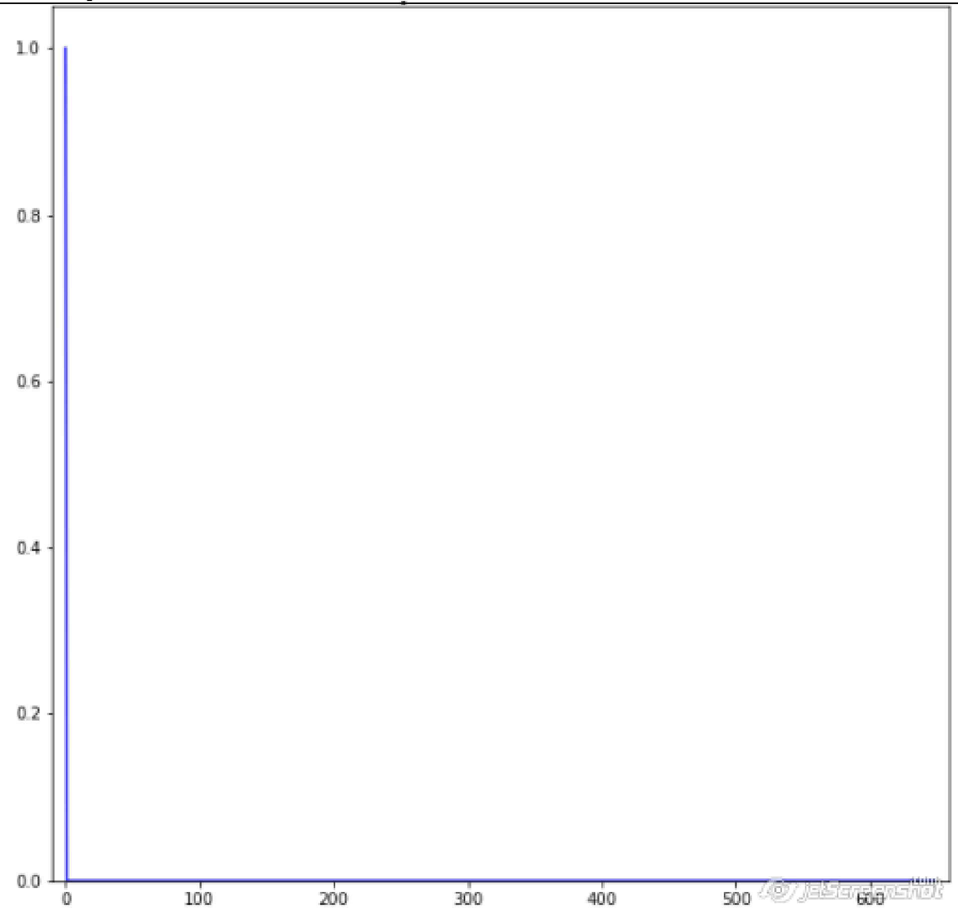
Пример

Реальный массив временных рядов месячных доходностей $\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^n$ для $n = 650$ биржевых индексов за более, чем 20 лет $t = 1,\ldots,T = 251$.

Вектор средних значений и ковариационная матрица	$\hat{\bar{\mathbf{x}}} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\mathbf{x}_t, \quad \hat{\mathbf{G}} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(\mathbf{x}_t - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x}_t - \bar{\mathbf{x}})^{\mathrm{T}}$
	Capital shares $\alpha = 0$
Численное решение задачи Марковица Risk Tolerance $0 \to \alpha \to 1$ $\begin{cases} \boldsymbol{\beta}_\alpha = \arg\min\left\{(1-\alpha)\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}\boldsymbol{\beta} - \alpha\bar{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}\right\}, \\ \mathbf{1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} = 1,\ \boldsymbol{\beta} \geq \mathbf{0}, = const. \end{cases}$ This one-parametric family exhaust all the effective portfolios	

Пример

Реальный массив временных рядов месячных доходностей $\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^n$ для $n = 650$ биржевых индексов за более, чем 20 лет $t = 1,\dots,T = 251$.

Вектор средних значений и ковариационная матрица	$\hat{\bar{\mathbf{x}}} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\mathbf{x}_t\,, \qquad \hat{\mathbf{G}} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(\mathbf{x}_t - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x}_t - \bar{\mathbf{x}})^{\mathrm{T}}$
	Capital shares $\alpha = 0$
Численное решение задачи Марковица Risk Tolerance $0 \to \alpha \to 1$ $\begin{cases} \boldsymbol{\beta}_\alpha = \arg\min\left\{(1-\alpha)\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}\boldsymbol{\beta} - \alpha\bar{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}\right\}, \\ \mathbf{1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} = 1,\ \boldsymbol{\beta} \ge \mathbf{0}, = const. \end{cases}$ This one-parametric family exhaust all the effective portfolios	

Диверсификация

Как мы видели, портфели Марковица состоят из малого числа активов.
Но это очень опасно.

Диверсификация

Как мы видели, портфели Марковица состоят из малого числа активов.
Но это очень опасно. Все суждения о доходности либо рискованности портфеля основаны на ожидаемых средних значениях и ковариациях доходностей активов $(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{G})$.

Диверсификация

Как мы видели, портфели Марковица состоят из малого числа активов.
Но это очень опасно. Все суждения о доходности либо рискованности портфеля основаны на ожидаемых средних значениях и ковариациях доходностей активов $(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{G})$. Если эти доходности в реальности будут другими, или будут по-другому зависеть между собой, мы можем получить портфель с противоположными свойствами.

Диверсификация

Как мы видели, портфели Марковица состоят из малого числа активов.
Но это очень опасно. Все суждения о доходности либо рискованности портфеля основаны на ожидаемых средних значениях и ковариациях доходностей активов $(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{G})$. Если эти доходности в реальности будут другими, или будут по-другому зависеть между собой, мы можем получить портфель с противо-положными свойствами.

Выход: Диверсификация – распределение капитала таким образом, чтобы уменьшить зависимость доходности портфеля от доходности каждого отдельного актива и каждого отдельного вида риска.

Диверсификация

Как мы видели, портфели Марковица состоят из малого числа активов.
Но это очень опасно. Все суждения о доходности либо рискованности портфеля основаны на ожидаемых средних значениях и ковариациях доходностей активов $(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{G})$. Если эти доходности в реальности будут другими, или будут по-другому зависеть между собой, мы можем получить портфель с противо-положными свойствами.

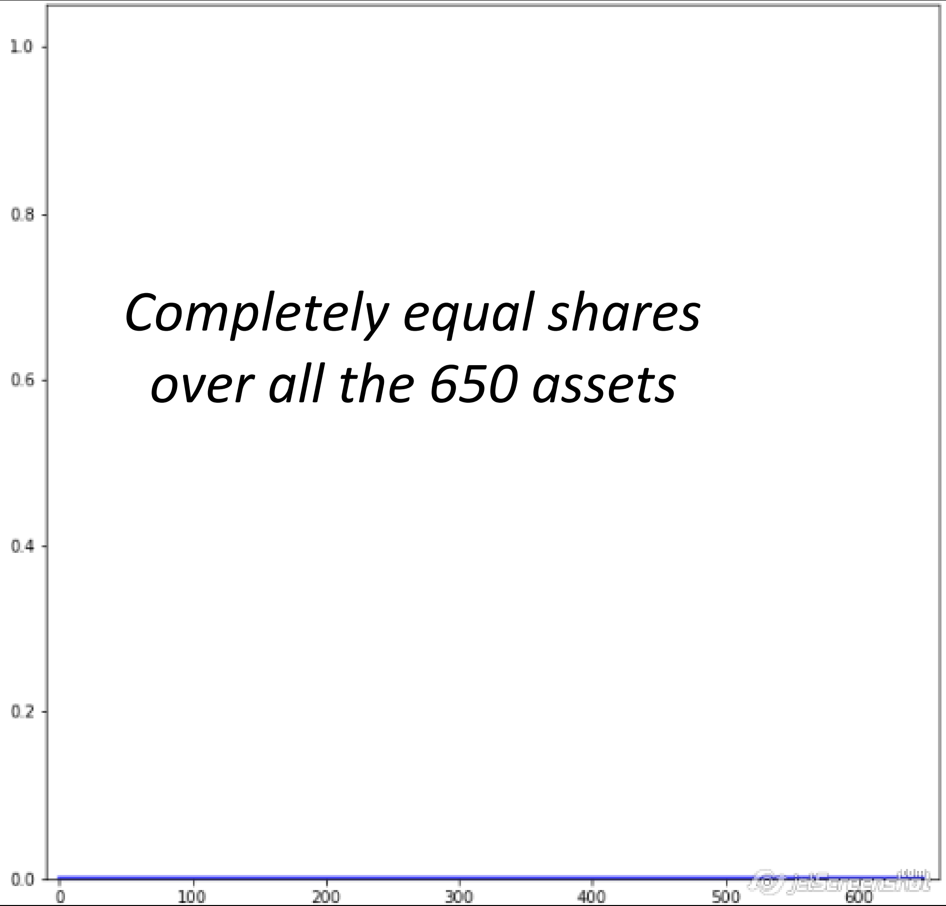
Выход: Диверсификация – распределение капитала таким образом, чтобы уменьшить зависимость доходности портфеля от доходности каждого отдельного актива и каждого отдельного вида риска.

Мы рассмотрим два разных простейших способа диверсификации.

Регуляризация 2. Непосредственная диверсификация распределения капитала (Beta Parity)

Одинаковые доли в выбранном подмножестве активов $\hat{\mathbb{I}} \subseteq \mathbb{I} = \{1,\ldots,n\}$, $\hat{n} = |\hat{\mathbb{I}}| < n$:

$$\boldsymbol{\beta} = (\beta_i,\, i \in \mathbb{I}),\ \ \beta_i = 1/\hat{n},\, i \in \hat{\mathbb{I}},\ \ \beta_i = 0,\, i \notin \hat{\mathbb{I}},\ \ \sum\nolimits_{i \in \hat{\mathbb{I}}} \beta_i = \sum\nolimits_{i=1}^{n} \beta_i = 1$$

	Доли капитала α_1
1) задача квадратичного программирования для возрастающих значений риска (селеективность α) $\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \beta_i^{\,2} \to \min(\beta_1,\ldots,\beta_n), \\ \sum_{i=1}^{n} \beta_i = 1,\ \beta_i \geq 0,\, i = 1,\ldots,n,\ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} g_{ij}\beta_i\beta_j = \alpha. \end{cases}$ 2) Фактическое подмножество активов $\hat{\mathbb{I}} = \{i : \beta_i > 0\}$ 3) Вычисление коэффициентов Beta Parity $\hat{\beta}_i = 1/\hat{n},\ i \in \hat{\mathbb{I}}$ Это одно-параметрическое семейство исчерпываеи все аортфели Beta Parity	

Регуляризация 2. Непосредственная диверси-фикация распределения капитала (Beta Parity)

Одинаковые доли в выбранном подмножестве активов $\hat{\mathbb{I}} \subseteq \mathbb{I} = \{1,\dots,n\}$, $\hat{n} = |\hat{\mathbb{I}}| < n$:

$\boldsymbol{\beta} = (\beta_i, i \in \mathbb{I})$, $\beta_i = 1/\hat{n}, i \in \hat{\mathbb{I}}$, $\beta_i = 0, i \notin \hat{\mathbb{I}}$, $\sum_{i\in\hat{\mathbb{I}}} \beta_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i = 1$

	Доли капитала α_1
4) задача квадратичного программирования для возрастающих значений риска (селеективность α) $\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i^{\,2} \to \min(\beta_1,\dots,\beta_n), \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i = 1,\ \beta_i \ge 0, i = 1,\dots,n,\ \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} g_{ij}\beta_i\beta_j = \alpha. \end{cases}$ 5) Фактическое подмножество активов $\hat{\mathbb{I}} = \{i : \beta_i > 0\}$ 6) Вычисление коэффициентов Beta Parity $\hat{\beta}_i = 1/\hat{n},\ i \in \hat{\mathbb{I}}$ Это одно-параметрическое семейство исчерпываеи все аортфели Beta Parity	

Регуляризация 2. Непосредственная диверсификация распределения капитала (Beta Parity)

Одинаковые доли в выбранном подмножестве активов $\hat{\mathbb{I}} \subseteq \mathbb{I} = \{1,\dots,n\}$, $\hat{n} = |\hat{\mathbb{I}}| < n$:

$$\boldsymbol{\beta} = (\beta_i,\, i \in \mathbb{I}),\ \ \beta_i = 1/\hat{n},\, i \in \hat{\mathbb{I}},\ \ \beta_i = 0,\, i \notin \hat{\mathbb{I}},\ \ \sum\nolimits_{i\in\hat{\mathbb{I}}} \beta_i = \sum\nolimits_{i=1}^{n} \beta_i = 1$$

7) задача квадратичного программирования для возрастающих значений риска (селеективность α)

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i^{\,2} \to \min(\beta_1,\dots,\beta_n), \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i = 1,\ \ \beta_i \ge 0,\, i = 1,\dots,n,\ \ \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} g_{ij}\beta_i\beta_j = \alpha. \end{cases}$$

8) Фактическое подмножество активов

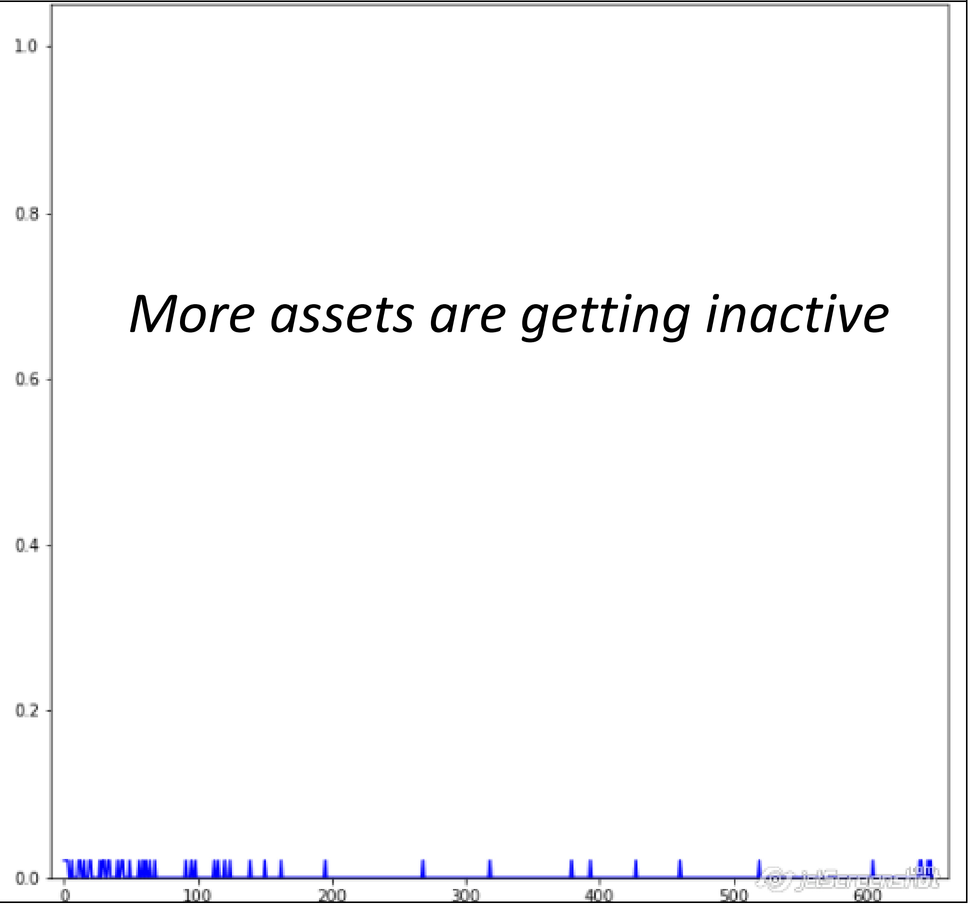
$$\hat{\mathbb{I}} = \{i : \beta_i > 0\}$$

9) Вычисление коэффициентов Beta Parity

$$\hat{\beta}_i = 1/\hat{n},\ \ i \in \hat{\mathbb{I}}$$

Это одно-параметрическое семейство исчерпываеи все аортфели Beta Parity

Доли капитала α_1



Регуляризация 2. Непосредственная диверсификация распределения капитала (Beta Parity)

Одинаковые доли в выбранном подмножестве активов $\hat{\mathbb{I}} \subseteq \mathbb{I} = \{1,\dots,n\}$, $\hat{n} = |\hat{\mathbb{I}}| < n$:

$$\boldsymbol{\beta} = (\beta_i, i \in \mathbb{I}),\ \beta_i = 1/\hat{n}, i \in \hat{\mathbb{I}},\ \beta_i = 0, i \notin \hat{\mathbb{I}},\ \sum_{i\in\hat{\mathbb{I}}} \beta_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i = 1$$

Доли капитала α_1

10) задача квадратичного программирования для возрастающих значений риска (селеективность α)

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \beta_i^{\,2} \to \min(\beta_1,\dots,\beta_n), \\ \sum_{i=1}^{n} \beta_i = 1,\ \beta_i \ge 0, i = 1,\dots,n,\ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} g_{ij}\beta_i\beta_j = \alpha. \end{cases}$$

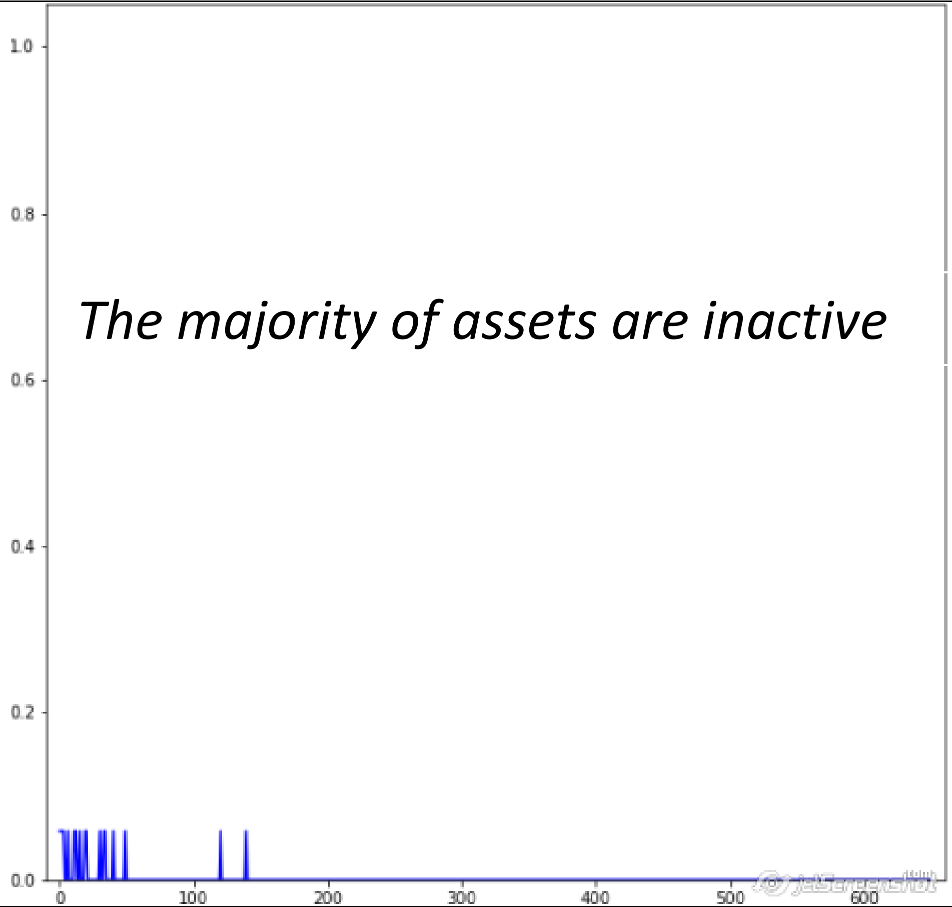
11) Фактическое подмножество активов

$$\hat{\mathbb{I}} = \{i : \beta_i > 0\}$$

12)Вычисление коэффициентов Beta Parity

$$\hat{\beta}_i = 1/\hat{n},\ i \in \hat{\mathbb{I}}$$

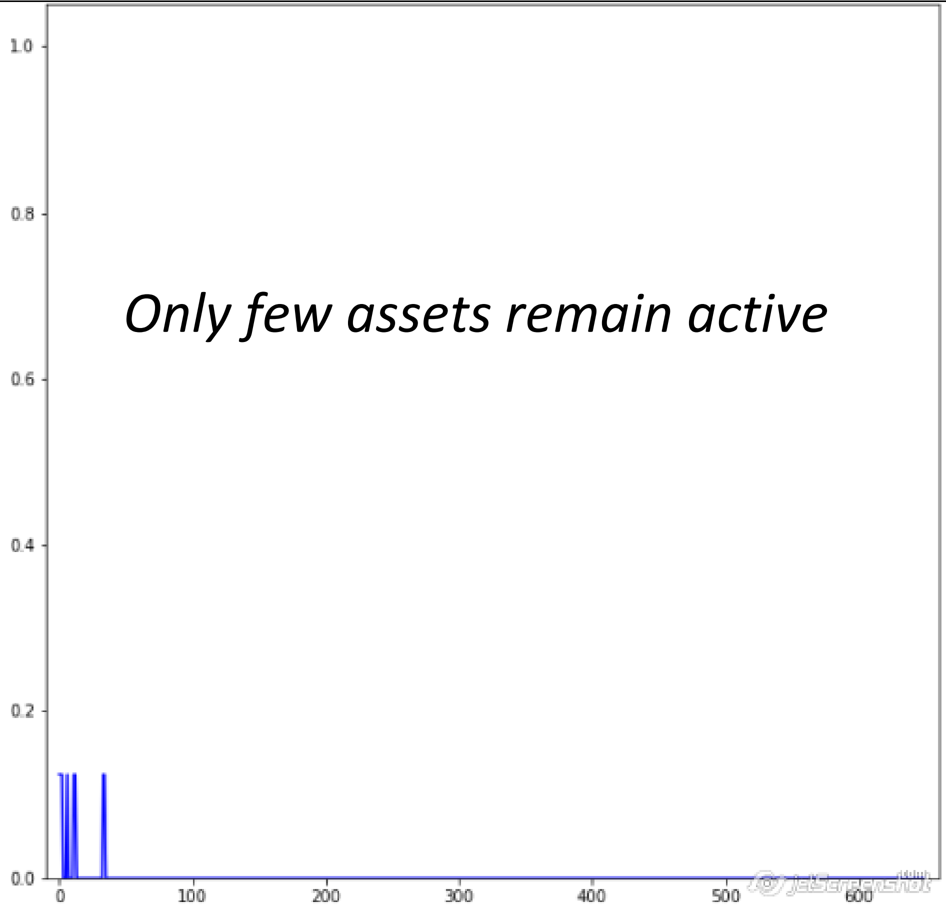
Это одно-параметрическое семейство исчерпываеи все аортфели Beta Parity



Регуляризация 2. Непосредственная диверси-фикация распределения капитала (Beta Parity)

Одинаковые доли в выбранном подмножестве активов $\hat{\mathbb{I}} \subseteq \mathbb{I} = \{1,\dots,n\}$, $\hat{n} = |\hat{\mathbb{I}}| < n$:

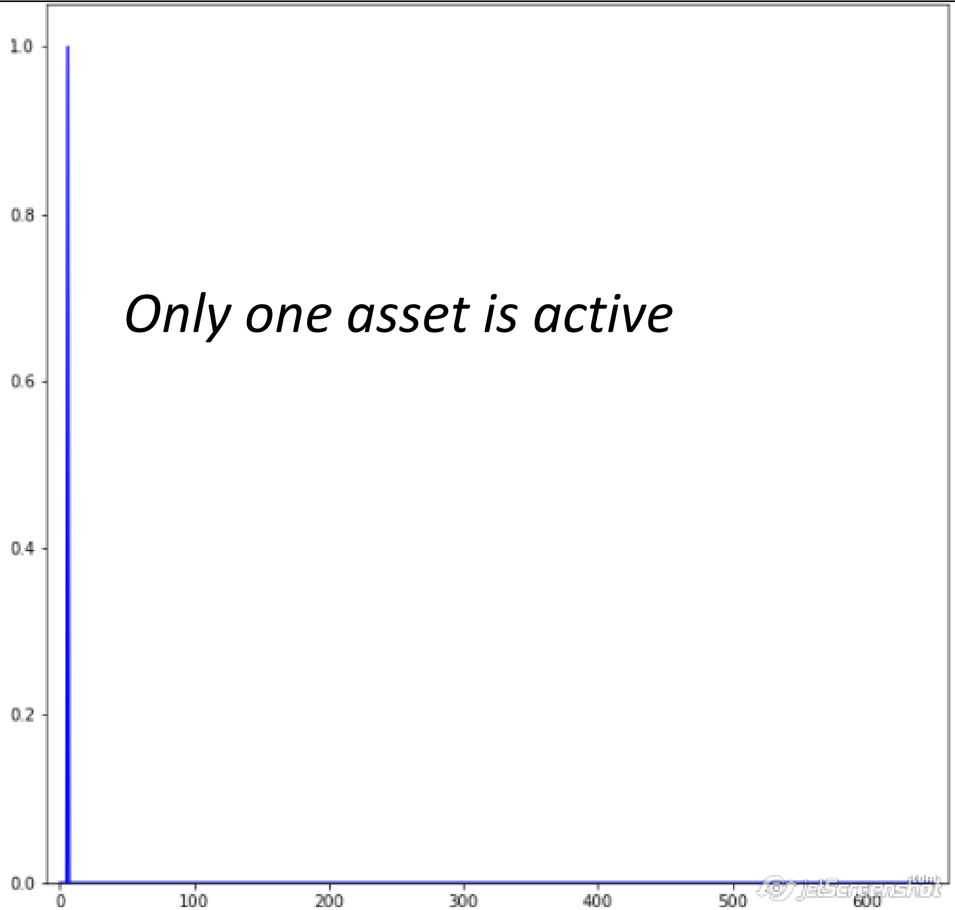
$$\boldsymbol{\beta} = (\beta_i, i \in \mathbb{I}),\ \beta_i = 1/\hat{n}, i \in \hat{\mathbb{I}},\ \beta_i = 0, i \notin \hat{\mathbb{I}},\ \sum\nolimits_{i \in \hat{\mathbb{I}}} \beta_i = \sum\nolimits_{i=1}^{n} \beta_i = 1$$

	Доли капитала α_1
13) задача квадратичного программирования для возрастающих значений риска (селеективность α) $\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \beta_i^{\,2} \to \min(\beta_1,\dots,\beta_n), \\ \sum_{i=1}^{n} \beta_i = 1,\ \beta_i \ge 0, i = 1,\dots,n,\ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} g_{ij}\beta_i\beta_j = \alpha. \end{cases}$ 14) Фактическое подмножество активов $\hat{\mathbb{I}} = \{i : \beta_i > 0\}$ 15)Вычисление коэффициентов Beta Parity $\hat{\beta}_i = 1/\hat{n},\ i \in \hat{\mathbb{I}}$ Это одно-параметрическое семейство исчерпываеи все аортфели Beta Parity	

Регуляризация 2. Непосредственная диверсификация распределения капитала (Beta Parity)

Одинаковые доли в выбранном подмножестве активов $\hat{\mathbb{I}} \subseteq \mathbb{I} = \{1,\dots,n\}$, $\hat{n} = |\hat{\mathbb{I}}| < n$:

$\boldsymbol{\beta} = (\beta_i, i \in \mathbb{I})$, $\beta_i = 1/\hat{n}, i \in \hat{\mathbb{I}}$, $\beta_i = 0, i \notin \hat{\mathbb{I}}$, $\sum_{i \in \hat{\mathbb{I}}} \beta_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i = 1$

	Доли капитала α_1
16) задача квадратичного программирования для возрастающих значений риска (селеективность α) $\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \beta_i^{\ 2} \to \min(\beta_1,\dots,\beta_n), \\ \sum_{i=1}^{n} \beta_i = 1,\ \beta_i \ge 0, i = 1,\dots,n,\ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} g_{ij} \beta_i \beta_j = \alpha. \end{cases}$ 17) Фактическое подмножество активов $\hat{\mathbb{I}} = \{i : \beta_i > 0\}$ 18)Вычисление коэффициентов Beta Parity $\hat{\beta}_i = 1/\hat{n},\ i \in \hat{\mathbb{I}}$ Это одно-параметрическое семейство исчерпываеи все аортфели Beta Parity	

Регуляризация 3. Более сложная диверсификация – Selective Risk Parity

Равномерное распраcраcределение риска $\sum_{i\in\hat{\mathbb{I}}}\sum_{j\in\hat{\mathbb{I}}} g_{ij}\beta_i\beta_j = \sum_{i\in\hat{\mathbb{I}}}\left[\left(\sum_{j\in\hat{\mathbb{I}}} g_{ij}\beta_j\right)\beta_i\right]$, вместо распреде-ления капитала $\sum_{i\in\hat{\mathbb{I}}}\left[\beta_i\right]$ в выбранном подмножестве активов $\hat{\mathbb{I}} \subset \mathbb{I} = \{1,\ldots,n\}$

Об этом в следующем докладе расскажет Алексей Морозов

Задача определения фактического состава портфеля (Factor search)

$\mathbf{y} = (y_1 \cdots y_T)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^T$ – временной рял $y_t \in \mathbb{R}$ доходностей портфеля

$\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1 \cdots \mathbf{x}_T)$ – векторный временной ряд $\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^n$ доходностей n биржевых активов

Задача определения фактического состава портфеля (Factor search)

$\mathbf{y}=(y_1\cdots y_T)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^T$ – временной рял $y_t\in\mathbb{R}$ доходностей портфеля

$\mathbf{X}=(\mathbf{x}_1\cdots\mathbf{x}_T)$ – векторный временной ряд $\mathbf{x}_t\in\mathbb{R}^n$ доходностей n биржевых активов

Предполагается, что:

Капитал портфеля распределен $\beta=(\beta_1\geq 0,\ldots,\beta_n\geq 0)$, $\sum_{i=1}^{n}\beta_i^*=1$ на подмножестве активов

$\mathbb{I}^*\subset\mathbb{I}=\{1,\ldots,n\}$, $\quad n^*=|\mathbb{I}^*|$ – число активных регрессоров, $\beta_i^*\genfrac{}{}{0pt}{}{\geq}{=}0$, $i\genfrac{}{}{0pt}{}{\in}{\notin}\mathbb{I}^*$.

Задача определения фактического состава портфеля (Factor search)

$\mathbf{y}=(y_1 \cdots y_T)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^T$ – временной рял $y_t \in \mathbb{R}$ доходностей портфеля

$\mathbf{X}=(\mathbf{x}_1 \cdots \mathbf{x}_T)$ – векторный временной ряд $\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^n$ доходностей n биржевых активов

Предполагается, что:

Капитал портфеля распределен $\beta=(\beta_1 \geq 0,\ldots,\beta_n \geq 0)$, $\sum_{i=1}^{n} \beta_i^* = 1$ на подмножестве активов

$\mathbb{I}^* \subset \mathbb{I} = \{1,\ldots,n\}$, $\quad n^* = |\mathbb{I}^*|$ – число активных регрессоров, $\beta_i^* \underset{=}{\geq} 0,\ i \underset{\notin}{\in} \mathbb{I}^*$.

Рассматриваются три гипотезы о возможной структуре портфеля:

(1) Портфель Марковица с неизвестным значением Risk Tolerance	(2) Портфель Beta Parity неизвестного размера	(3) Портфель Risk Parity неизвестного размера

Задача определения фактического состава портфеля (Factor search)

$\mathbf{y} = (y_1 \cdots y_T)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^T$ – временной рял $y_t \in \mathbb{R}$ доходностей портфеля

$\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1 \cdots \mathbf{x}_T)$ – векторный временной ряд $\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^n$ доходностей n биржевых активов

Предполагается, что:

Капитал портфеля распределен $\beta = (\beta_1 \geq 0, \ldots, \beta_n \geq 0)$, $\sum_{i=1}^{n} \beta_i^* = 1$ на подмножестве активов

$\mathbb{I}^* \subset \mathbb{I} = \{1, \ldots, n\}$, $\quad n^* = |\mathbb{I}^*|$ – число активных регрессоров, $\beta_i^* \substack{> \\ =} 0$, $i \substack{\in \\ \notin} \mathbb{I}^*$.

Рассматриваются три гипотезы о возможной структуре портфеля:

(1) Портфель Марковица с неизвестным значением Risk Tolerance	(2) Портфель Beta Parity неизвестного размера	(3) Портфель Risk Parity неизвестного размера

Требуется: Оценить распределение капитала $\hat{\beta} = (\hat{\beta}_1, \ldots, \hat{\beta}_n)$, решив задачу

Factor Search: $\quad \hat{\mathbb{I}} = \{i : \hat{\beta}_i > 0\}$.

Суть задачи Factor Search

Сравнительное количественное оценивание качества модели портфеля среди этих трех гипотез.

Валидация вариантов модели.

Общая схема валидации вариантов модели

Независимо для каждого из трех предположений MP, BP и RP:

Многократное решение задачи оценивания портфеля (Factor Search) $(\hat{\beta}_{i.\alpha,c}, i = 1,\dots,n)$ на сетке двух гиперпараметров (α, c).

Общая схема валидации вариантов модели

Независимо для каждого из трех предположений MP, BP и RP:

Многократное решение задачи оценивания портфеля (Factor Search) $(\hat{\beta}_{i.\alpha,c}, i=1,...,n)$ на сетке двух гиперпараметров (α, c).

$$\mathrm{MP}\begin{cases}(1-\alpha)\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} g_{ij}\beta_i\beta_j - \alpha\sum_{i=1}^{n}\bar{x}_i\beta_i + c\sum_{t=1}^{T}\left(y_t - \sum_{i=1}^{n} x_{t,i}\beta_i\right)^2 \to \min(\beta_1,...,\beta_n),\\ \sum_{i=1}^{n}\beta_i = 1,\ \beta_i \geq 0, i=1,...,n.\end{cases}$$

Общая схема валидации вариантов модели

Независимо для каждого из трех предположений MP, BP и RP:

Многократное решение задачи оценивания портфеля (Factor Search) $(\hat{\beta}_{i.\alpha,c}, i=1,...,n)$ на сетке двух гиперпараметров (α, c).

$$\text{MP}\begin{cases}(1-\alpha)\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} g_{ij}\beta_i\beta_j - \alpha\sum_{i=1}^{n}\bar{x}_i\beta_i + c\sum_{t=1}^{T}\left(y_t - \sum_{i=1}^{n}x_{t,i}\beta_i\right)^2 \to \min(\beta_1,...,\beta_n),\\ \sum_{i=1}^{n}\beta_i=1,\ \beta_i\geq 0, i=1,...,n.\end{cases}$$

$$\text{BP}\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}\beta_i^2 + c\sum_{t=1}^{T}\left(y_t - \sum_{i=1}^{n}x_{t,i}\beta_i\right)^2 \to \min(\beta_1,...,\beta_n),\\ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} g_{ij}\beta_i\beta_j=\alpha,\ \sum_{i=1}^{n}\beta_i=1,\ \beta_i\geq 0, i=1,...,n.\end{cases}$$

Общая схема валидации вариантов модели

Независимо для каждого из трех предположений MP, BP и RP:

Многократное решение задачи оценивания портфеля (Factor Search) $(\hat{\beta}_{i.\alpha,c}, i=1,...,n)$ на сетке двух гиперпараметров (α, c).

$$\mathrm{MP}\begin{cases}(1-\alpha)\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} g_{ij}\beta_i\beta_j - \alpha\sum_{i=1}^{n}\bar{x}_i\beta_i + c\sum_{t=1}^{T}\left(y_t - \sum_{i=1}^{n} x_{t,i}\beta_i\right)^2 \to \min(\beta_1,...,\beta_n),\\ \sum_{i=1}^{n}\beta_i = 1,\ \beta_i \geq 0, i=1,...,n.\end{cases}$$

$$\mathrm{BP}\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}\beta_i^2 + c\sum_{t=1}^{T}\left(y_t - \sum_{i=1}^{n} x_{t,i}\beta_i\right)^2 \to \min(\beta_1,...,\beta_n),\\ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} g_{ij}\beta_i\beta_j = \alpha,\ \sum_{i=1}^{n}\beta_i = 1,\ \beta_i \geq 0, i=1,...,n.\end{cases}$$

$$\mathrm{RP}\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} g_{ij}\beta_j\right)^2\beta_i^2 + c\sum_{t=1}^{T}\left(y_t - \sum_{i=1}^{n} x_{t,i}\beta_i\right)^2 \to \min(\beta_1,...,\beta_n),\\ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} g_{ij}\beta_i\beta_j = \alpha,\ \sum_{i=1}^{n}\beta_i = 1,\ \beta_i \geq 0, i=1,...,n.\end{cases}$$

Общая схема валидации вариантов модели

Независимо для каждого из трех предположений MP, BP и RP:

Многократное решение задачи оценивания портфеля (Factor Search) $(\hat{\beta}_{i.\alpha,c}, i=1,...,n)$ на сетке двух гиперпараметров (α, c).

$$\text{MP}\begin{cases}(1-\alpha)\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} g_{ij}\beta_i\beta_j - \alpha\sum_{i=1}^{n}\bar{x}_i\beta_i + c\sum_{t=1}^{T}\left(y_t - \sum_{i=1}^{n} x_{t,i}\beta_i\right)^2 \to \min(\beta_1,...,\beta_n),\\ \sum_{i=1}^{n}\beta_i = 1,\ \beta_i \geq 0, i=1,...,n.\end{cases}$$

$$\text{BP}\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}\beta_i^2 + c\sum_{t=1}^{T}\left(y_t - \sum_{i=1}^{n} x_{t,i}\beta_i\right)^2 \to \min(\beta_1,...,\beta_n),\\ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} g_{ij}\beta_i\beta_j = \alpha,\ \sum_{i=1}^{n}\beta_i = 1,\ \beta_i \geq 0, i=1,...,n.\end{cases}$$

$$\text{RP}\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} g_{ij}\beta_j\right)^2\beta_i^2 + c\sum_{t=1}^{T}\left(y_t - \sum_{i=1}^{n} x_{t,i}\beta_i\right)^2 \to \min(\beta_1,...,\beta_n),\\ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} g_{ij}\beta_i\beta_j = \alpha,\ \sum_{i=1}^{n}\beta_i = 1,\ \beta_i \geq 0, i=1,...,n.\end{cases}$$

Вычисление критериев Leave-One-Out на сетке (α, c).

$$LOO_{MP,BP,RP}(\alpha,c) = \sum_{t=1}^{T}\left(y_t - \sum_{i=1}^{n} x_{t,i}\beta_{i,\alpha,c}^{(t)}\right)^2, \quad \underbrace{LOO_{MP,BP,RP}}_{LOO\ scores} = \min_{\alpha,c} LOO_{MP,BP,RP}(\alpha,c)$$

Общая схема валидации вариантов модели

Независимо для каждого из трех предположений MP, BP и RP:

Многократное решение задачи оценивания портфеля (Factor Search) $(\hat{\beta}_{i.\alpha,c},\, i=1,\dots,n)$ на сетке двух гиперпараметров (α,c).

$$\text{MP}\begin{cases}(1-\alpha)\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} g_{ij}\beta_i\beta_j - \alpha\sum_{i=1}^{n}\bar{x}_i\beta_i + c\sum_{t=1}^{T}\left(y_t - \sum_{i=1}^{n}x_{t,i}\beta_i\right)^2 \to \min(\beta_1,\dots,\beta_n),\\ \sum_{i=1}^{n}\beta_i = 1,\ \beta_i \ge 0,\ i=1,\dots,n.\end{cases}$$

$$\text{BP}\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}\beta_i^2 + c\sum_{t=1}^{T}\left(y_t - \sum_{i=1}^{n}x_{t,i}\beta_i\right)^2 \to \min(\beta_1,\dots,\beta_n),\\ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} g_{ij}\beta_i\beta_j = \alpha,\ \sum_{i=1}^{n}\beta_i = 1,\ \beta_i \ge 0,\ i=1,\dots,n.\end{cases}$$

$$\text{RP}\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} g_{ij}\beta_j\right)^2\beta_i^2 + c\sum_{t=1}^{T}\left(y_t - \sum_{i=1}^{n}x_{t,i}\beta_i\right)^2 \to \min(\beta_1,\dots,\beta_n),\\ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} g_{ij}\beta_i\beta_j = \alpha,\ \sum_{i=1}^{n}\beta_i = 1,\ \beta_i \ge 0,\ i=1,\dots,n.\end{cases}$$

Вычисление критериев Leave-One-Out на сетке (α,c).

$$LOO_{MP,BP,RP}(\alpha,c) = \sum_{t=1}^{T}\left(y_t - \sum_{i=1}^{n}x_{t,i}\beta^{(t)}_{i,\alpha,c}\right)^2, \quad \underbrace{LOO_{MP,BP,RP}}_{LOO\ scores} = \min_{\alpha,c} LOO_{MP,BP,RP}(\alpha,c)$$

LOO Technique: E. Chernousova, N. Razin, O. Krasotkina, V. Mottl, D. Windridge. Linear Regression via Elastic Net: Non-enumerative Leave-One-Out Verification of Feature Selection. Clusters, Orders, and Trees: Methods and Applications, Springer, 2014, pp. 377-390.

Алгоритмическая реализация задачи Factor Search

Несколько обобщенная задача Factor Search

$$\begin{cases} \underbrace{\gamma \sum_{i=1}^{n} \begin{pmatrix} 2\mu\beta_i, & \beta_i \le \mu \\ \mu^2 + \beta_i^2, & \beta_i > \mu \end{pmatrix}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} g_{ij}\beta_i\beta_j - \alpha \sum_{i=1}^{b} \overline{x}_i \beta_i}_{\textit{полезность портфеля по Марковицу}} + \underbrace{c \sum_{t=1}^{T} \left(y_t - \sum_{i=1}^{b} x_{t,i}\beta_i \right)^2}_{\textit{факторная модель портфеля}} \to \min(\beta_1, \dots, \beta_n), \\ \sum_{i=1}^{n} \beta_i = 1, \;\; \beta_i \ge 0, \;\; i = 1, \dots, n \end{cases}$$

Алгоритмическая реализация задачи Factor Search

Несколько обобщенная задача Factor Search

$$\begin{cases} \underbrace{\gamma\sum_{i=1}^{n}\begin{pmatrix} 2\mu\beta_i, & \beta_i \le \mu \\ \mu^2+\beta_i^2, & \beta_i > \mu \end{pmatrix}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} g_{ij}\beta_i\beta_j - \alpha\sum_{i=1}^{b}\overline{x}_i\beta_i}_{\textit{полезность портфеля по Марковицу}} + \underbrace{c\sum_{t=1}^{T}\left(y_t - \sum_{i=1}^{b} x_{t,i}\beta_i\right)^2}_{\textit{факторная модель портфеля}} \to \min(\beta_1,\ldots,\beta_n), \\ \sum_{i=1}^{n}\beta_i = 1,\ \ \beta_i \ge 0,\ \ i = 1,\ldots,n \end{cases}$$

$$\gamma\sum_{i=1}^{n}\begin{pmatrix} 2\mu\beta_i, & \beta_i \le \mu \\ \mu^2+\beta_i^2, & \beta_i > \mu \end{pmatrix} \to \min$$

– селективная регуляризация Modulus Quadratic А.И. Татарчук, 2007г.

Алгоритмическая реализация задачи Factor Search

Несколько обобщенная задача Factor Search

$$\begin{cases} \underbrace{\gamma\sum_{i=1}^{n}\begin{pmatrix} 2\mu\beta_i, & \beta_i \le \mu \\ \mu^2+\beta_i^2, & \beta_i > \mu \end{pmatrix}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} g_{ij}\beta_i\beta_j - \alpha\sum_{i=1}^{b}\overline{x}_i\beta_i}_{\textit{полезность портфеля по Марковицу}} + \underbrace{c\sum_{t=1}^{T}\left(y_t - \sum_{i=1}^{b} x_{t,i}\beta_i\right)^2}_{\textit{факторная модель портфеля}} \to \min(\beta_1,\dots,\beta_n), \\ \sum_{i=1}^{n}\beta_i = 1,\ \ \beta_i \ge 0,\ \ i = 1,\dots,n \end{cases}$$

$$\gamma\sum_{i=1}^{n}\begin{pmatrix} 2\mu\beta_i, & \beta_i \le \mu \\ \mu^2+\beta_i^2, & \beta_i > \mu \end{pmatrix} \to \min$$

– селективная регуляризация Modulus Quadratic А.И. Татарчук, 2007г.

Управление селективностью отбора активов в модели портфеля

Алгоритмическая реализация задачи Factor Search

Несколько обобщенная задача Factor Search

$$\begin{cases} \underbrace{\gamma\sum_{i=1}^{n}\begin{pmatrix} 2\mu\beta_i, & \beta_i \le \mu \\ \mu^2+\beta_i^2, & \beta_i > \mu \end{pmatrix}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} g_{ij}\beta_i\beta_j - \alpha\sum_{i=1}^{b}\overline{x}_i\beta_i}_{\textit{полезность портфеля по Марковицу}} + \underbrace{c\sum_{t=1}^{T}\left(y_t - \sum_{i=1}^{b} x_{t,i}\beta_i \right)^2}_{\textit{факторная модель портфеля}} \to \min(\beta_1,\ldots,\beta_n), \\ \sum_{i=1}^{n}\beta_i = 1,\ \ \beta_i \ge 0,\ \ i = 1,\ldots,n \end{cases}$$

$$\gamma\sum_{i=1}^{n}\begin{pmatrix} 2\mu\beta_i, & \beta_i \le \mu \\ \mu^2+\beta_i^2, & \beta_i > \mu \end{pmatrix} \to \min$$

– селективная регуляризация Modulus Quadratic

А.И. Татарчук, 2007г.

Управление селективностью отбора активов в модели портфеля

В следующем докладе Алексей Морозов расскажет, как преодолеть полиномиальную вычислительную сложность этой задачи выпуклого программирования.

Публикация

V. Mottl, O. Krasotkina, M. Markov, D. Babichev, I. Pugach, A. Morozov. Constrained Regularized Regression Model Search in Large Sets of Regressors. *Lecture Notes in Artificial Intelligence, Vol. 1035*, Springer, 2018, pp. 1-15.

Благодарность

Мы благодарим Российский фонд фундаментальных исследований за поддержку данной работы.

Гранты РФФИ 17-07-00436, 17-07-00993 и 18-07-01087.

Спасибо за внимание!

Вопросы?