

Графические модели: Скрытые марковские модели

Александр Адуенко

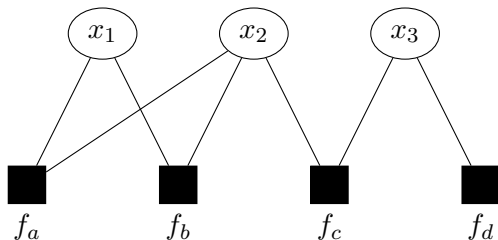
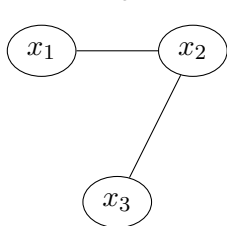
8е апреля 2025

- EM-алгоритм. Использование EM-алгоритма для отбора признаков в байесовской линейной регрессии.
- Вариационный EM-алгоритм и его использование для вывода в смеси моделей линейной регрессии.
- Ориентированные графические модели и их представление plate notation. Критерий условной независимости d-separation.
- Неориентированные графические модели и их связь с ориентированными.
- Факторные графы и алгоритм Sum-Product для вывода в ациклических графических моделях.

Фактор-графы и их построение по графической модели

Идея: Построить общее представление для ориентированных и неориентированных моделей.

$$p(\mathbf{x}) = \prod_s f_s(\mathbf{x}_s).$$



Вопрос: Задаёт ли граф справа другой набор условных независимостей, чем граф слева?

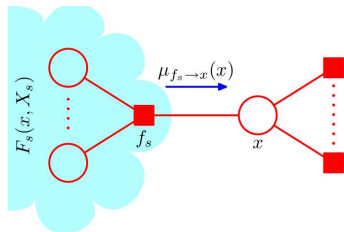
Алгоритм Sum-Product вывода в ациклических ГМ

Утверждение: Если исходная графическая модель есть направленное или ненаправленное дерево, то для нее можно построить ациклический фактор-граф.

$$\text{Найти: } p(x) = \sum_{\mathbf{x} \setminus x} p(\mathbf{x}).$$

$$p(\mathbf{x}) = \frac{1}{Z} \prod_s f_s(\mathbf{x}_s) =$$

$$\prod_{s \in N(x)} F_s(x, X_s) = \frac{1}{Z} \tilde{p}(x).$$



Фактор-граф в окрестности
вершины x [Bishop, 2006]

$$\tilde{p}(x) = \sum_{\mathbf{x} \setminus x} \tilde{p}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{x} \setminus x} \prod_{s \in N(x)} F_s(x, X_s) = \prod_{s \in N(x)} \sum_{\mathbf{x} \setminus x} F_s(x, X_s) =$$

$$\prod_{s \in N(x)} \sum_{X_s} F_s(x, X_s) = \prod_{s \in N(x)} \mu_{f_s \rightarrow x}(x).$$

Алгоритм Sum-Product вывода в ациклических ГМ

Получаем следующие формулы пересчета сообщений:

- $\mu_{x_m \rightarrow f_s}(x_m) = \prod_{l \in N(x_m) \setminus f_s} \mu_{f_l \rightarrow x_m}(x_m);$
- $\mu_{f_s \rightarrow x}(x) = \sum_{x_{1:M}} f_s(x, x_{1:M}) \prod_{m \in N(f_s) \setminus x} \mu_{x_m \rightarrow f_s}(x_m).$

Алгоритм:

- 1 Объявляем вершину x корнем;
- 2 От листьев фактор-графа движемся к корню, пересылая сообщения по правилам выше;
- 3 По достижении корня имеем: $p(x) = \frac{1}{Z} \prod_{s \in N(x)} \mu_{f_s \rightarrow x}(x).$

База рекурсии (сообщения от листьев): $\mu_{x \rightarrow f} = 1, \mu_{f \rightarrow x} = f(x).$

Вопрос 1: Как показать, что процедура работает, то есть все вершины получают достаточно сообщений, чтобы отправить своё?

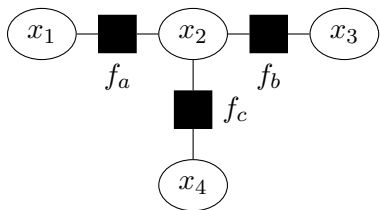
Вопрос 2: Как получить $p(x_l) \forall x_l \neq x$?

Вопрос 3: Как определить нормировочную постоянную Z ?

Вопрос 4: Как получить $p(x_s)$?

Пример работы алгоритма Sum-Product

Прямой проход (x_3 – корень):



$$\mu_{x_1 \rightarrow f_a}(x_1) = 1, \mu_{x_4 \rightarrow f_c}(x_4) = 1,$$
$$\mu_{f_a \rightarrow x_2}(x_2) = \sum_{x_1} f_a(x_1, x_2) \mu_{x_1 \rightarrow f_a}(x_1) =$$

$$\sum_{x_1} f_a(x_1, x_2),$$

$$\mu_{f_c \rightarrow x_2}(x_2) = \sum_{x_4} f_c(x_2, x_4),$$

$$\mu_{x_2 \rightarrow f_b}(x_2) = \mu_{f_a \rightarrow x_2}(x_2) \mu_{f_c \rightarrow x_2}(x_2),$$

$$\mu_{f_b \rightarrow x_3}(x_3) = \sum_{x_2} f_b(x_2, x_3) \mu_{x_2 \rightarrow f_b}(x_2).$$

$p(\mathbf{x}) =$

$$f_a(x_1, x_2) f_b(x_2, x_3) f_c(x_2, x_4).$$

Обратный проход:

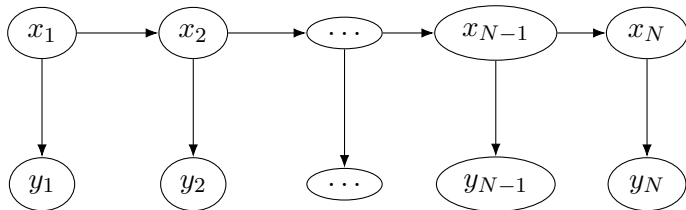
$$\mu_{x_3 \rightarrow f_b}(x_3) = 1, \mu_{f_b \rightarrow x_2}(x_2) = \sum_{x_3} f_b(x_2, x_3),$$

$$\mu_{x_2 \rightarrow f_a}(x_2) = \mu_{f_b \rightarrow x_2}(x_2) \mu_{f_c \rightarrow x_2}(x_2), \mu_{x_2 \rightarrow f_c}(x_2) = \mu_{f_a \rightarrow x_2}(x_2) \mu_{f_b \rightarrow x_2}(x_2),$$

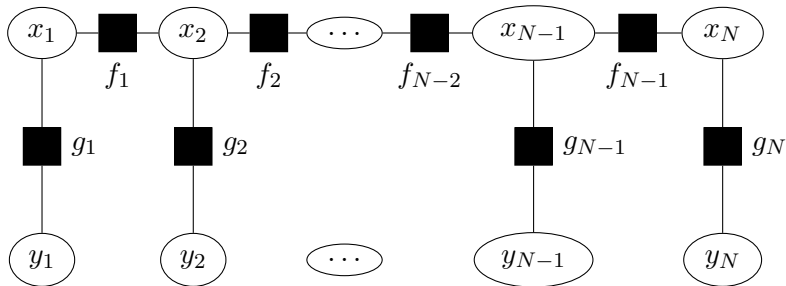
$$\mu_{f_a \rightarrow x_1}(x_1) = \sum_{x_2} f_a(x_1, x_2) \mu_{x_2 \rightarrow f_a}(x_2),$$

$$\mu_{f_c \rightarrow x_4}(x_4) = \sum_{x_2} f_c(x_2, x_4) \mu_{x_2 \rightarrow f_c}(x_2).$$

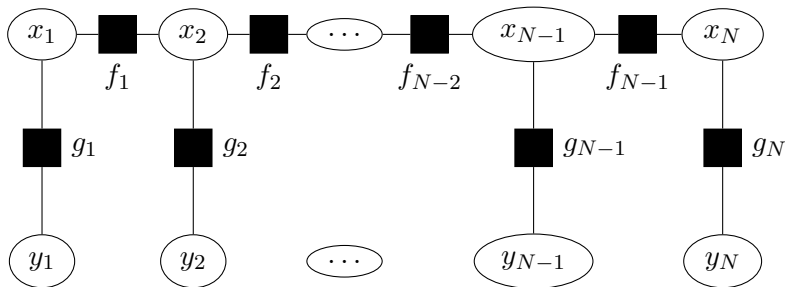
Скрытые марковские модели



$$p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \prod_{i=1}^N p(x_i | x_{i-1}) \prod_{i=1}^N p(y_i | x_i), x_0 = \emptyset.$$



Скрытые марковские модели 2



$$p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \prod_{i=1}^N p(x_i | x_{i-1}) \prod_{i=1}^N p(y_i | x_i), x_0 = \emptyset.$$

Замечание: С помощью алгоритма Sum-Product можем найти $p(x_i | \mathbf{y}) \forall i$.

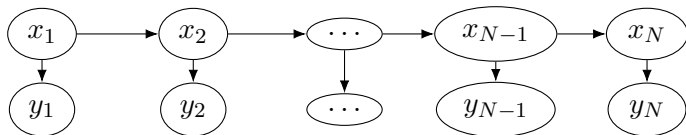
Вопрос 1: Как найти $\mathbf{x}^* = \arg \max_{\mathbf{x}} p(\mathbf{x} | \mathbf{y})$?

Идея: $\tilde{x}_i^* = \arg \max_{x_i} p(x_i | \mathbf{y})$.

Вопрос 2: Верно ли, что $\mathbf{x}^* = \tilde{\mathbf{x}}^*$?

Пример скрытой марковской модели

Пусть $x_t \in [\text{Подъем, Зависание, Спуск}]$ есть состояние воздушного шара, а $\sqrt{y_t}$ полная скорость.



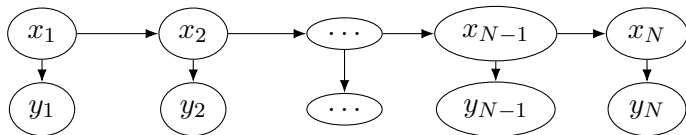
$$p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \prod_{i=1}^N p(x_i|x_{i-1}) \prod_{i=1}^N p(y_i|x_i), x_0 = \emptyset.$$

$$p(x_1) = \boldsymbol{\pi} = [1, 0, 0]^T, p(x_t|x_{t-1}) = \mathbf{A} = \begin{pmatrix} & \text{П} & \text{З} & \text{С} \\ \text{П} & 0.98 & 0.02 & 0 \\ \text{З} & 0 & 0.8 & 0.2 \\ \text{С} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$y_t|x_t = v_{\text{ветер}}^2 + v_{\text{вертик.}}^2 = \underbrace{\varepsilon_t}_{\sim \mathcal{N}(5, 3^2)^2} + \underbrace{v_{\text{вертик.}}^2|x_t}_{\text{П: 1, З: 0, С: 4}}.$$

Вопрос: Что можно сказать про $x_t^* = \arg \max_{x_t} p(x_t|\mathbf{y})$?

Алгоритм Витерби



$$p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \prod_{i=1}^N p(x_i | x_{i-1}) \prod_{i=1}^N p(y_i | x_i), x_0 = \emptyset.$$

Задача: $p(\mathbf{x} | \mathbf{y}) \rightarrow \max_{\mathbf{x}} \equiv p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow \max_{\mathbf{x}}$.

$$V_{1,k} = \pi_k p(y_1 | x_1 = k),$$

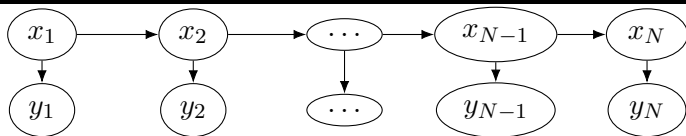
$$V_{t,k} = \max_{j \in S} V_{t-1,j} a_{jk} p(y_t | x_t = k).$$

Вопрос 1: Что показывает $V_{t,k}$?

Вопрос 2: Как изменятся формулы для $V_{t,k}$, если y_t ненаблюдаемо?

Вопрос 3: Что мы получим в $V_{N,k}$?

Алгоритм Витерби 2



$$p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \prod_{i=1}^N p(x_i | x_{i-1}) \prod_{i=1}^N p(y_i | x_i), x_0 = \emptyset.$$

Задача: $p(\mathbf{x}|\mathbf{y}) \rightarrow \max_{\mathbf{x}} \equiv p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = p(\mathbf{y}|\mathbf{x})p(\mathbf{x}) \rightarrow \max_{\mathbf{x}}$.

$$V_{1,k} = \pi_k p(y_1 | x_1 = k),$$

$$V_{t,k} = \max_{j \in S} V_{t-1,j} a_{jk} p(y_t | x_t = k).$$

$V_{N,k}$ – вероятность наиболее вероятной последовательности состояний, оканчивающейся в $x_N = k$, то есть $V_{N,k} = \max_{\mathbf{x} \setminus x_N} p(\mathbf{x}, \mathbf{y} | x_N = k)$.

Замечание: $x_N^* = \arg \max_k V_{N,k}$.

Вопрос: Как получить x_{N-1}^* из $\mathbf{x}^* = \arg \max_{\mathbf{x}} p(\mathbf{x}, \mathbf{y})$?

Идея: Запомнить j^* из $V_{N,k} = \max_{j \in S} V_{N-1,j} a_{jk} p(y_N | x_N = k)$.

Задача Sum-Product

$$p(\mathbf{x}) = \frac{1}{Z} \prod_s f_s(\mathbf{x}_s)$$

Найти: $p(x) = \sum_{\mathbf{x} \setminus x} p(\mathbf{x})$.

Свойство:

$$ab + ac = a(b + c).$$

Формулы пересчета сообщений для Sum-Product:

- $\mu_{x_m \rightarrow f_s}(x_m) = \prod_{l \in N(x_m) \setminus f_s} \mu_{f_l \rightarrow x_m}(x_m)$;

- $\mu_{f_s \rightarrow x}(x) = \sum_{x_{1:M}} f_s(x, x_{1:M}) \prod_{m \in N(f_s) \setminus x} \mu_{x_m \rightarrow f_s}(x_m)$.

Формулы пересчета сообщений для Max-Sum:

- $\mu_{x_m \rightarrow f_s}(x_m) = \sum_{l \in N(x_m) \setminus f_s} \mu_{f_l \rightarrow x_m}(x_m)$;

- $\mu_{f_s \rightarrow x}(x) = \max_{x_{1:M}} \log f_s(x, x_{1:M}) + \sum_{m \in N(f_s) \setminus x} \mu_{x_m \rightarrow f_s}(x_m)$.

Задача Max-Sum

$$g(\mathbf{x}) = \log p(\mathbf{x}) = C + \sum_s \log f_s(\mathbf{x}_s)$$

Найти: $g(x) = \max_{\mathbf{x} \setminus x} g(\mathbf{x})$.

Свойство:

$$\max(a + b, a + c) = a + \max(b, c).$$

$$g(\mathbf{x}) = \log p(\mathbf{x}) = C + \sum_s \log f_s(\mathbf{x}_s)$$

Найти: $g(x) = \max_{\mathbf{x} \setminus x} g(\mathbf{x})$.

Формулы пересчета сообщений для Max-Sum:

$$\blacksquare \mu_{x_m \rightarrow f_s}(x_m) = \sum_{l \in N(x_m) \setminus f_s} \mu_{f_l \rightarrow x_m}(x_m);$$

$$\blacksquare \mu_{f_s \rightarrow x}(x) = \max_{x_{1:M}} \log f_s(x, x_{1:M}) + \sum_{m \in N(f_s) \setminus x} \mu_{x_m \rightarrow f_s}(x_m).$$

Сообщения из листьев: $\mu_{x \rightarrow f} = 0$, $\mu_{f \rightarrow x} = \log f(x)$.

Вопрос 1: Как получить $p(\mathbf{x}^*) = \max_{\mathbf{x}} p(\mathbf{x})$?

Вопрос 2: Как получить $\mathbf{x}^* = \arg \max_{\mathbf{x}} \log p(\mathbf{x})$?

Алгоритм Max-Sum 3

$$g(\mathbf{x}) = \log p(\mathbf{x}) = C + \sum_s \log f_s(\mathbf{x}_s)$$

Найти: $g(x) = \max_{\mathbf{x} \setminus x} g(\mathbf{x})$.

Формулы пересчета сообщений для Max-Sum:

$$\blacksquare \mu_{x_m \rightarrow f_s}(x_m) = \sum_{l \in N(x_m) \setminus f_s} \mu_{f_l \rightarrow x_m}(x_m);$$

$$\blacksquare \mu_{f_s \rightarrow x}(x) = \max_{x_{1:M}} \left[\log f_s(x, x_{1:M}) + \sum_{m \in N(f_s) \setminus x} \mu_{x_m \rightarrow f_s}(x_m) \right].$$

Сообщения из листьев: $\mu_{x \rightarrow f} = 0$, $\mu_{f \rightarrow x} = \log f(x)$.

$\max_{\mathbf{x}} g(\mathbf{x}) = \max_{x_R} g(x_R)$, $x_R^* = \arg \max_{x_R} g(x_R)$, где x_R – корень ф-дерева.

Вопрос 1: $x_i^* = \arg \max_{x_i} g(x_i)$ для всех вершин для получения \mathbf{x}^* ?

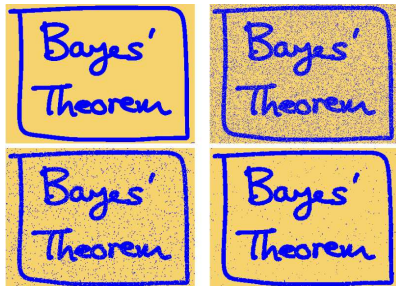
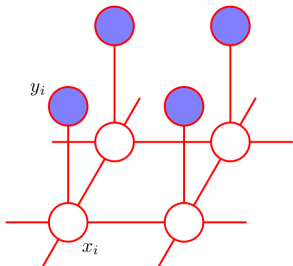
Идея: Хранить **конфигурацию** $x_{1:M}$, доставляющую максимум в $\mu_{f_s \rightarrow x}$.

Вопрос 2: Сколько потребуется памяти для хранения таких конфигураций?

Иллюстрация работы алгоритма Max-Sum

Пример: Пусть имеется бинарное изображение y , $y_i \in \{-1, 1\}$, которое зашумлено. Требуется восстановить исходное изображение x .

$$E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = h \sum_i x_i - \beta \sum_{(i,j) \in \epsilon} x_i x_j - \eta \sum_i x_i y_i.$$



Графическая модель $p(\mathbf{x}, \mathbf{y})$
[Bishop, 2006]

Иллюстрация шумоподавления [Bishop,
2006]

- 1 Bishop, Christopher M. "Pattern recognition and machine learning". Springer, New York (2006). Pp. 394-418.
- 2 Material on HMMs: <https://web.stanford.edu/~jurafsky/slp3/A.pdf>
- 3 Koller, Daphne, and Nir Friedman. Probabilistic graphical models: principles and techniques. MIT press, 2009.
- 4 Bacchus, Fahiem, and Adam J. Grove. "Graphical models for preference and utility." arXiv preprint arXiv:1302.4928 (2013).
- 5 Mor, Bhavya, Sunita Garhwal, and Ajay Kumar. "A systematic review of hidden markov models and their applications." Archives of computational methods in engineering 28.3 (2021): 1429-1448.
- 6 Pearl, Judea. Probabilistic reasoning in intelligent systems: networks of plausible inference. Morgan kaufmann, 1988.
- 7 Pearl, Judea. "Graphical models for probabilistic and causal reasoning." Quantified representation of uncertainty and imprecision (1998): 367-389.