Прикладная алгебра

Лекции для бакалавров группы 417
7-й семестр

Лектор — *Гуров Сергей Исаевич*

МГУ имени М.В. Ломоносова
Факультет Вычислительной математики и кибернетики

Кафедра Математических методов прогнозирования

комн. 530, 537, 682

e-mail: *sgur@cs.msu.ru*

Литература I

- *Биркгоф Г.* Теория решёток. — М.: Наука, 1984.
- *Биркгоф Г., Барти Т.* Современная прикладная алгебра. — М.: Лань, 2005.
- *Гретцер Г.* Общая теория решёток. — М.: Мир, 1982.
- *Гуров С.И.* Булевы алгебры, упорядоченные множества, решетки: Определения, свойства, примеры. — М.: Либроком, 2013.
- *Кон П.* Универсальная алгебра. — М.: Мир, 1968.
- *Лидл Р., Пильц Г.* Прикладная абстрактная алгебра: Учебное пособие. — Екатеринбург: Издат-во Урал. ун.-та, 1996.
- *Мальцев А.И.* Алгебраические системы. — М.: Наука, 1970.

Литература II

- *Непейвода Н.Н.* Прикладная логика. — Новосибирск: НГУ, 2000.
- *Нефедов В.Н., Осипова В.А.* Курс дискретной математики. — М.: Изд-во МАИ, 1992.
- *Плоткин Б.И.* Универсальная алгебра, алгебраическая логика и базы данных. — М.: Наука, 1991.
- *Стенли Р.* Перечислительная комбинаторика (Volume I). — М.: Мир, 1990.
- *Шрейдер Ю.А.* Равенство, сходство, порядок. — М.: Наука, 1971.
- *Яглом И.М.* Булева структура и её модели. — М.: Сов. радио, 1980.

Тема I

Булевы алгебры

Разделы

Булева алгебра: определение

Определение

Булевой алгеброй $\mathfrak{B}$ называется множество B, содержащее по крайней мере два элемента — o (*нуль*) и ι (*единица*), с заданными на нём бинарными операциями $\sqcup$ (*объединения*), $\sqcap$ (*пересечения*) и унарной операцией $'$ (*дополнения*).

При этом для любых $x, y, z \in B$ выполняются следующие *законы* (*аксиомы*) *булевой алгебры*:

$$
\begin{array}{rlrl}
Com\sqcup: & x \sqcup y = y \sqcup x, & Com\sqcap: & x \sqcap y = y \sqcap x, \\
Dtr1: & (x \sqcup y) \sqcap z = (x \sqcap z) \sqcup (y \sqcap z), & & \\
Dtr2: & (x \sqcap y) \sqcup z = (x \sqcup z) \sqcap (y \sqcup z), & & \\
\sqcup o: & x \sqcup o = x, & \sqcap\iota: & x \sqcap \iota = x, \\
Cmp': & x \sqcup x' = \iota, & Isl': & x \sqcap x' = o, \\
Inv': & (x')' = x, & & \\
\iota': & \iota' = o, & o': & o' = \iota,
\end{array}
$$

(*дальше будет продолжение*)

Булева алгебра: определение...

Определение (продолжение)

$$\begin{array}{rlrl} DeM1: & (x \sqcup y)' = x' \sqcap y', & DeM2: & (x \sqcap y)' = x' \sqcup y', \\ \sqcup\iota: & x \sqcup \iota = \iota, & \sqcap o: & x \sqcap o = o, \\ Ass\sqcup: & x \sqcup (y \sqcup z) = (x \sqcup y) \sqcup z, & & \\ Ass\sqcap: & x \sqcap (y \sqcap z) = (x \sqcap y) \sqcap z, & & \\ Id\sqcup: & x \sqcup x = x, & Id\sqcap: & x \sqcap x = x, \\ Abs1: & x \sqcap (x \sqcup y) = x, & Abs2: & x \sqcup (x \sqcap y) = x. \end{array}$$

Множество B называется *носителем* булевой алгебры $\mathfrak{B}$, а o и ι — *выделенными элементами* или *универсальными гранями*.

Введённые операции называют *абстрактными*, поскольку ни они сами, ни носитель, на котором они определены, никак не конкретизируются и никаких иных требований, кроме удовлетворения данным законам, к ним не предъявляется.

Основные соотношения в булевой алгебре

Лемма (основные свойства элементов булевой алгебры)

Для любых элементов x и y булевой алгебры справедливы следующие утверждения:

1. $x \sqcup y = o \Leftrightarrow x = y = o$ и $x \sqcap y = \iota \Leftrightarrow x = y = \iota$;
2. *следующие четыре соотношения эквивалентны* — $x \sqcap y = x\,, \quad x \sqcup y = y\,, \quad x' \sqcup y = \iota\,, \quad x \sqcap y' = o$;
3. *лемма о единственности дополнения* —
$$\begin{cases} x \sqcap y = o \\ x \sqcup y = \iota \end{cases} \Leftrightarrow \; y = x'$$
(в некоторых аксиоматизациях дополнение вводится как элемент, удовлетворяющий условиям Cmp' и Isl', и тогда необходимо доказывать его единственность, чем и объясняется данное традиционное название леммы).

Булева алгебра: основные соотношения (доказательство)

Доказательство

1. $\underline{x \sqcup y = o \Leftrightarrow x = y = o \text{ и } x \sqcap y = \iota \Leftrightarrow x = y = \iota}$

$$x \sqcup y = o \Rightarrow x \sqcap (x \sqcup y) = x \sqcap o = o \overset{Abs1, \sqcap o}{\Rightarrow} x = o.$$

Для y — $\sqcap y$, для второго соотношения — $\sqcup x$, $\sqcup y$.
Обратные следования очевидны.

2. $\underline{x \sqcap y = x \Leftrightarrow x \sqcup y = y \Leftrightarrow x' \sqcup y = \iota \Leftrightarrow x \sqcap y' = o}$

   1. $x \sqcap y = x \Rightarrow y \sqcup (x \sqcap y) = y \sqcup x \overset{Abs2}{\Rightarrow} y = y \sqcup x;$
   2. $x' \sqcup y = x' \sqcup (y \sqcup x) \overset{Cmp'}{=} \iota;$
   3. $x' \sqcup y = \iota \overset{DeM1, Inv'}{\Rightarrow} x \sqcap y' = o;$
   4. $(x \sqcap y') \sqcup (x \sqcap y) = o \sqcup (x \sqcap y) \overset{Dtr1}{\Rightarrow} x \sqcap (\overbrace{y \sqcup y'}^{\iota}) = x = x \sqcap y$

— т.е. соотношения циклически выведены друг из друга.

Булева алгебра: основные соотношения (доказательство)...

(Лемма о единственности дополнения)

3. $(x \sqcap y = o) \,\&\, (x \sqcup y = \iota) \;\Leftrightarrow\; y = x'$

$\Rightarrow$ **(достаточность)**

$$y = y \sqcap \overbrace{(x \sqcup x')}^{\iota} \overset{Dtr1}{=} (\overbrace{y \sqcap x}^{o}) \sqcup (y \sqcap x') =$$

$$= (\underbrace{x \sqcap x'}_{o}) \sqcup (y \sqcap x') \overset{Dtr1, Abs, Com}{=} (\underbrace{x \sqcup y}_{\iota}) \sqcap x' = x'.$$

$\Leftarrow$ **(необходимость)** *очевидна — законы* Cmp' *и* Isl'.

Понятно, что в булевой алгебре определены объединения и пересечения любой конечной совокупности элементов.

Принцип двойственности для булевой алгебры

Пусть V — выражение или равенство булевой алгебры.

Обозначения для результата одновременной замены всех символов в V:

- $V^{\sharp}$ — $\sqcap \leftrightarrow \sqcup$ и $\iota \leftrightarrow o$;
- $V^{\flat}$ — $x \leftrightarrow x'$, где x — элемент носителя, не являющийся универсальной гранью;
- V^{*} — когда производятся обе указанные замены.

Принцип двойственности

Если V —

— булево равенство, истинное для любых входящих в него элементов, то равенства $V^{\sharp}$, $V^{\flat}$ и V^{*} также истинны.

— выражение булевой алгебры, то $V^{*} = V'$.

Принцип двойственности для булевой алгебры

Доказательство

1. $\underline{V \;\Rightarrow\; V^{\sharp}, V^{\flat}, V^{*}.}$
   Приведённые выше законы, кроме Inv', разбиваются на пары взаимодвойственных, переходящих друг в друга при замене $^{\sharp}$; а Inv' самодвойственен.
   Преобразование $^{\flat}$ переводит все законы, кроме Inv', или с точностью до обозначений в себя, или в двойственные, а Inv' — в тождество $x' = x'$.
   Поэтому и при замене * истинность булева равенства сохранится.

2. $\underline{V \;\Rightarrow\; V^{*} = (V)'.}$
   Справедливость этого утверждения следует из равенства $V = z$, где z — соответствующий элемент булевой алгебры: $V = z \Rightarrow V^{*} = z' \Rightarrow V^{*} = (V)'$.

Избыточность приведённой системы из 21-ой аксиомы

- Законы Id вытекают из законов Abs:
  для любого $x \in B$ —
  $Id\sqcup$: $\quad x \sqcup x \overset{Abs1}{=} x \sqcup (x \sqcap (x \sqcup x)) \overset{Abs2}{=} x.$
  $Id\sqcap$ — по принципу двойственности.

- Законы Abs влекут эквивалентность $Dtr1$ и $Dtr2$:
  для любых элементов $x, y, z \in B$ имеем

$$(x \sqcup z) \sqcap (y \sqcup z) \overset{Dtr1}{=} (x \sqcap (y \sqcup z)) \sqcup \overbrace{(z \sqcap (y \sqcup z))}^{z} \overset{Dtr1}{=}$$

$$= (x \sqcap y) \sqcup \underbrace{(x \sqcap z) \sqcup z}_{z} \overset{Abs2}{=} (x \sqcap y) \sqcup z.$$

т.е. $Dtr1 \Rightarrow Dtr2$.
Двойственно показывается, что $Dtr2 \Rightarrow Dtr1$.

Избыточность системы аксиом...

- Законы де Моргана выводимы из остальных:

1) используя законы Dtr, Ass, свойства дополнения и единицы показывается, что для любых $x, y \in B$ справедливы соотношения

$$(x \sqcap y) \sqcup (x' \sqcup y') = \iota \quad \text{и} \quad (x \sqcap y) \sqcap (x' \sqcup y') = o;$$

2) в соответствии с леммой о единственности дополнения это означает, что $x' \sqcup y'$ — дополнение к $x \sqcap y$, т.е. из указанных законов выведен закон $DeM1$;

3) аналогичная выводимость $DeM2$ следует из принципа двойственности.

Две «рабочие» системы аксиом для булевой алгебры

1. Пары аксиом Com, Dtr, вместе с $\sqcup o$, $\sqcap \iota$, Cmp' и Isl' (первые 8 из приведенных выше законов).
   Данная система не является независимой: например, каждый из законов $\sqcup o$ и $\sqcap \iota$ выводим из остальных семи.

2. Пары законов законов Dtr, Abs вместе с Cmp' и Isl'.
   Это единственная кратчайшая (6 аксиом) известная на сегодняшний день безызбыточная самодвойственная система аксиом булевой алгебры.

Такие и подобные им системы имеет более формальный характер по сравнению приведённой в определении выше.

Понятие об алгебраических системах

Булева алгебра — пример *алгебраической системы (АС)*, точнее, частного случая АС — *алгебры*.

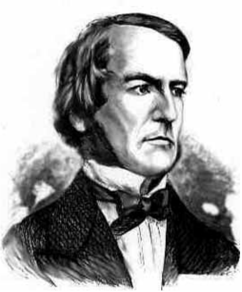
АС $\mathfrak{A}$ задается парой $\mathfrak{A} = \langle A, \sigma_A \rangle$, где

A — *носитель* или *базовое множество* $(A \neq \varnothing)$,

σ_A — *сигнатура* на A — упорядоченная совокупность символов операций, отношений и особых элементов на A.

- Если σ_1 и σ_2 — две сигнатуры на A и $\sigma_1 \subset \sigma_2$, то АС $\langle\, A, \sigma_1 \,\rangle$ является *редуктом* АС $\langle\, A, \sigma_2 \,\rangle$.
- Все операции АС должны быть *устойчивы* на её носителе.
- Явное указание местности и арности операций и отношений: $\langle\, \sqcup^2, \sqcap^2, {}'^1, o^0, \iota^0 \,\rangle$ — для булевой алгебры.
- Символ носителя = символ АС.

Дж. Буль и булева алгебра



Джорж Буль (George Boole, 1815–1864) — английский математик–самоучка. Самостоятельно выучил латынь, греческий, французский и немецкий языки, изучил обширные труды Лапласа и Лагранжа.

Основные законы, характеризующие булеву алгебру, сформулированы в его работе «*Исследование законов мысли, на которых основаны математические теории логики и вероятностей*» (1854).

Однако полного перечня аксиом и точного определения предложенной им алгебры Буль не дал.
АС, эквивалентная булевой алгебре в современном её понимании, впервые приведена в вышедшем в том же году 3-м томе трактата А. де Моргана «Формальная логика».

Разделы

Алгебры множеств: определение

- $A \neq \varnothing$ — множество, $\mathcal{P}(A)$ — множество всех подмножеств (*булеан*) A;
- $\mathcal{S}(A)$ — некоторая совокупность подмножеств A, устойчивая относительно объединения $\cup$, пересечения $\cap$ и дополнения до A ($^-$), а также содержащая $\varnothing$ и A.
- Понятно, что $\{\varnothing, A\} \subseteq \mathcal{S}(A) \subseteq \mathcal{P}(A)$.

АС $\langle \mathcal{S}(A), \cup, \cap, ^-, \varnothing, A \rangle$ — *алгебра множеств*.

Алгебра множеств с носителем $\mathcal{P}(A)$ — *тотальная (над A)*, а с двухэлементным носителем $\{\varnothing, A\}$ — *тривиальная*.

Утверждение

Всякая алгебра множеств $\mathcal{S}(A)$ есть булева алгебра с нулём $\varnothing$ и единицей A.

Алгебра множеств — булева алгебра: доказательство

Доказательство

Убедимся, что в алгебре множеств выполняются пары законов Com, Dtr, $\sqcup o$, $\sqcap \iota$, и Cmp', Isl', *в формулировке которых произведены подстановки*

$$\sqcup \mapsto \cap,\ \ \sqcap \mapsto \cap,\ \ {}' \mapsto {}^{-},\ \ \iota \mapsto A,\ \ o \mapsto \varnothing.$$

1. Законы Com, $\sqcup o$, $\sqcap \iota$ *и* Cmp', Isl', *очевидно, справедливы.*
2. В силу двойственности достаточно показать $Dtr1$:
для любых подмножеств $X, Y, Z \in \mathcal{S}(A)$ *справедливо*

$$(X \cup Y) \cap Z \ = \ (X \cap Z) \cup (Y \cap Z).$$

$\Rightarrow$ *Произвольный элемент* w *из* $(X \cup Y) \cap Z$ *принадлежит* Z, *а также либо* X, *либо* Y, *т.е. справедливо «либо* $w \in X \cap Z$, *либо* $w \in Y \cap Z$*» и, следовательно,* $w \in (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$.

$\Leftarrow$ *Если* $w \in (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$, *то* $w \in X \cap Z$ *или* $w \in Y \cap Z$, *т.е. «*$w \in Z$ *и либо* $w \in X$, *либо* $w \in Y$*»* $\Leftrightarrow$ $w \in (X \cup Y) \cap Z$.

σ- и полные булевы алгебры

Пример (из аксиоматики теории вероятностей)

σ-алгебра подмножеств пространства элементарных событий есть алгебра множеств и, следовательно, булева алгебра.

Булева алгебра, в которой операции $\sqcup$ и $\sqcap$ определены для произвольной совокупности её элементов называется *полной*.

Любая алгебра множеств — полная

$$\boxed{\text{полные булевы алгебры}}$$

$$\vdots$$

$$\boxed{\sigma\text{-алгебры}}$$

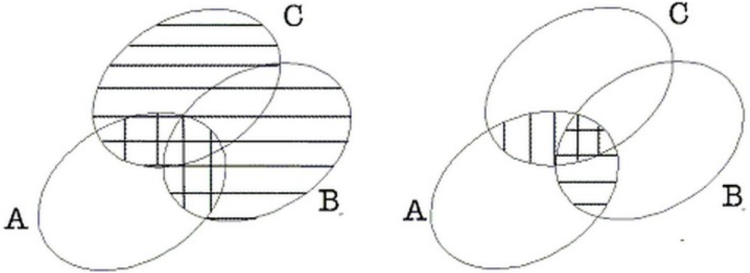
$$\vdots$$

$$\boxed{\text{булевы алгебры}}$$

Диаграммы Эйлера-Венна

Проверку равенств булевой алгебры $\mathcal{P}(A)$ легче всего проводить, используя известные *диаграммы Эйлера-Венна*.

Пример: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ —



Это будет являться доказательством, если такая диаграмма «правильно построена».

Формализуем данное понятие.

Составляющие системы множеств: определение

Определение

Пусть дано множество $U \neq \varnothing$ и система $\{X_1, \ldots, X_n\}$ его подмножеств.

Составляющие данной системы множеств задаются индуктивным определением:

1. составляющие одноэлементной системы $\{X_1\}$ суть X_1 и $\overline{X}_1$;
2. если s — составляющая системы $\{X_1, \ldots, X_{n-1}\}$, то $s \cap X_n$ и $s \cap \overline{X}_n$ — составляющие системы $\{X_1, \ldots, X_{n-1}, X_n\}$.

Система множеств X называется ***независимой***, если все её составляющие непусты.

Составляющие системы множеств: примеры

Рассмотрим множество $U = \{a, b, c, d\}$.

1. Найдём составляющие системы $X_1 = \{a, b\}$, $X_2 = \{b\}$:

Шаг 1. $X_1 = \{a, b\}$, $\overline{X}_1 = \{c, d\}$;

Шаг 2. $X_1 \cap X_2 = \{b\}$, $\overline{X}_1 \cap X_2 = \varnothing$,
$X_1 \cap \overline{X}_2 = \{a\}$, $\overline{X}_1 \cap \overline{X}_2 = \{c, d\}$,

и, следовательно, данная система множеств не является независимой.

2. Составляющие системы $X_1 = \{a, b\}$, $X_2 = \{b, c\}$ суть $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a\}$, $\{d\}$, и, следовательно, данная система множеств независима.

Составляющие системы множеств: свойства

Лемма

1. *Различные составляющие независимой системы множеств не пересекаются.*
2. *Независимая система из n множеств имеет 2^n различных составляющих.*
3. *Объединение всех составляющих совпадает со всем множеством U.*
4. *Из n подмножеств некоторого множества операциями $\cup$, $\cap$ и $\bar{}$ можно образовать всего не более, чем*

Составляющие системы множеств: свойства

Лемма

1. *Различные составляющие независимой системы множеств не пересекаются.*
2. *Независимая система из n множеств имеет 2^n различных составляющих.*
3. *Объединение всех составляющих совпадает со всем множеством U.*
4. *Из n подмножеств некоторого множества операциями $\cup$, $\cap$ и $\bar{\ }$ можно образовать всего не более, чем 2^{2^n} подмножеств.*

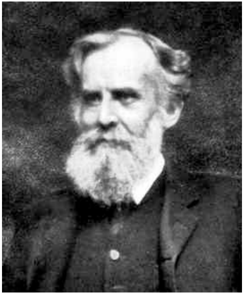
Доказательство

— пп. ❶ и ❸ легко проводятся по индукции, ❷ следует из ❶, а ❹ — из ❷.

Теорема Венна

Теорема (Венн)

Если в алгебре множеств булево равенство выполнено для некоторой независимой системы подмножеств, то оно справедливо для любой системы подмножеств.



Джон Венн (John Venn 1834–1923) — английский логик и философ. Введённые им диаграммы используется во многих научных областях (теория множеств, теория вероятностей, логика, статистика, информатика и др.).

Разделы

Примеры булевых алгебр

1. *Алгебра логики* или *алгебра высказываний* — АС $\mathbf{2} = \langle B, \sigma \rangle$, где $B = \{1, 0\}$ («истина» и «ложь»), а $\sigma = \langle \vee, \&, \neg, 0, 1 \rangle$ является булевой алгеброй; она играет фундаментальную роль в логике.

$$\begin{array}{rll} Cmp': & x \vee (\neg x) = 1 & \text{— закон исключенного третьего} \\ Isl': & x \& (\neg x) = 0 & \text{— закон противоречия} \end{array}$$

2. *Булева алгебра n-мерных двоичных векторов* — АС $\mathbf{2}^n = \langle B^n, \vee, \&, \neg, \widetilde{0}, \widetilde{1} \rangle$, где B^n — n-мерный единичный куб, $\widetilde{0} \stackrel{\text{def}}{=} (0, \ldots, 0)$ и $\widetilde{1} \stackrel{\text{def}}{=} (1, \ldots, 1)$, а сигнатурные операции применяются к булевым векторам покомпонентно (многомерный вариант алгебры $\mathbf{2}$).

Примеры булевых алгебр...

3. *Булева алгебра логических функций* — АС $\langle\, P_2,\, \vee,\, \&,\, \neg,\, \mathbf{0},\, \mathbf{1} \,\rangle$, где P_2 — множество всех двузначных булевых функций, а $\mathbf{0}$ и $\mathbf{1}$ — функции «тождественный нуль» и «тождественная единица».

4. Пусть N — *свободное от квадратов* натуральное число (т.е. справедливо *примарное разложение* $N = p_1 \cdot \ldots \cdot p_k$, где $p_1, \ldots, p_k$ — различные простые числа) и $D(N)$ — совокупность всех натуральных делителей N.
Например, для $N = 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ имеем $D(30) = \{\, 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30 \,\}$.
Обозначения: $m \vee n$ — наименьшее общее кратное чисел, $m \wedge n$ — наибольший общий делитель чисел m и n.
Положим $m' = \frac{N}{m}$. Тогда АС $\langle\, D(N),\, \vee,\, \wedge,\, ',\, 1,\, N \,\rangle$ — булева алгебра, широко используемая в теории чисел.

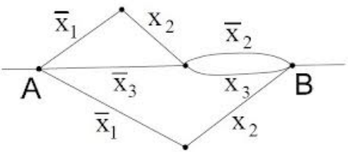
Алгебра контактных схем

5. Рассмотрим множество электрических выключателей, или контактов, которые могут находиться в одном из двух состояний — замкнутом (проводящем) или разомкнутом (не проводящем).
   У таких контактов различают входной и выходной полюсы, которые можно соединять с полюсами других контактов, строя электрические двухполюсные (один вход и один выход) цепи.

   Если соединять друг с другом только входные и выходные полюсы, то имеется только два способа объединения таких цепей: последовательное и параллельное.
   В результате получаем *π-схемы*.

Алгебра переключательных схем

Под произведением $A \cdot B$ будем понимать цепь, образованную последовательным, а под суммой $A + B$ — параллельным соединением цепей A и B.
Под цепью $\overline{A}$ понимаем цепь, полученную размыканием всех замкнутых контактов A и замыканием всех её разомкнутых контактов.



$$(\overline{x}_1 x_2 \vee \overline{x}_3)(\overline{x}_2 \vee x_3) \vee \overline{x}_1 x_2 = \\ = \overline{x}_1 x_2 \vee \overline{x}_2 \overline{x}_3$$

Проводимость двухполюсной цепи может быть описана формулой над множеством логических связок $\{\vee, \&, \neg\}$ ($\&$ опускают), в которой каждому контакту цепи соответствует пропозициональная переменная x (с отрицанием или без), выражающая его проводимость.

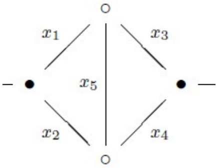
Алгебра переключательных схем...

Две цепи одинаковы, если можно так сопоставить контактам переменные, что при одном и том же состоянии контактов обе рассматриваемые цепи являются одновременно либо проводящими, либо не проводящими. Это — отношение эквивалентности на множестве цепей.
Обозначение: I постоянно замкнутый, O — постоянно разомкнутый цепи.
Если C — множество всех попарно неэквивалентных π-схем, то АС $\langle C, +, \cdot, ^{-}, O, I \rangle$ — булева *алгебра переключательных схем*.

Применение формульного аппарата булевых алгебр для анализа и синтеза электрических схем имеет огромное прикладное значение.

Алгебра переключательных схем...

Кроме параллельно-последовательных, существуют ещё т.н. *мостиковые схемы*:



Для описания подобных схем язык булевой алгебры оказывается недостаточным:
она не может быть построена указанными операциями последовательного и параллельного соединения цепей —

$$x_1 \,\&\, (x_3 \vee (x_4 \,\&\, x_5)) \;\vee\; x_2 \,\&\, (x_4 \vee (x_3 \,\&\, x_5)),$$

В 1960-х гг. российский логик и философ ***Е.К. Войшвилло*** построил алгебру для адекватного описания двухполюсных цепей общего вида.

Алгебра случайных событий

6. Пусть в ходе некоторых экспериментов могут наблюдаться или не наблюдаться определённые события. Такие события называют *случайными*.

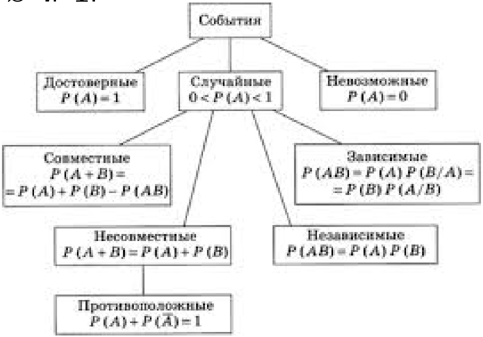
   Введём три операции на таких событиях в данном эксперименте:

   - умножение двух событий, означающее, что наблюдаются оба этих события;
   - сложение двух означающее, что наблюдается хотя бы одного из указанных событий;
   - отрицание события, означающее, что данное событие не наблюдалось.

   Зафиксируем также невозможное (никогда не наступающее) событие $\varnothing$ и достоверное (всегда наступающее) при проведении данного эксперимента событие $\mathbf{1}$.

Алгебра случайных событий...

Совокупность всех случайных событий, связанных с данным экспериментом, является булевой алгеброй относительно введённых операций и выделенных элементов $\varnothing$ и $\mathbf{1}$.



АС данного примера являются *представлениями* или *реализациями* булевой алгебры.

Максиминная алгебра

Для действительных чисел a, b из отрезка $[0, 1]$ положим

$$a \oplus b = \max\{a, b\}, \quad a \otimes b = \min\{a, b\}, \quad \ominus a = 1 - a.$$

АС $\langle [0, 1], \oplus, \otimes, \ominus, 0, 1 \rangle$ называют *максиминной алгеброй*.

Она не будет являться булевой алгеброй: в ней не выполняются аксиомы Cmp' и Isl' и причём только эти из приведённой выше системы из 21-ой аксиомы.

Это доказывает их независимость от остальных и необходимость присутствия этих законов в любой системе аксиом для булевой алгебры.
Дополнения в максиминной алгебре единственны.

Таким образом, максиминная алгебра чрезвычайно близка к булевой алгебре, но ей всё-таки не является.

Изоморфизм булевых алгебр

Определение

Пусть B_1 и B_2 — булевы алгебры и $\varphi\colon B_1 \to B_2$ — такая биекция, что для всех $x, y \in B_1$ справедливы равенства

1. $\varphi(x \sqcup y) = \varphi(x) \sqcup \varphi(y)$,
2. $\varphi(x \sqcap y) = \varphi(x) \sqcap \varphi(y)$,
3. $\varphi(x\,') = \varphi(x)\,'$.

Тогда говорят, что φ — *булев изоморфизм* между B_1 и B_2, а данные алгебры *булево изоморфны* (символически $B_1 \cong_b B_2$).

Замечание: из ❶–❸ следует ❹ $\varphi(o) = o$ и ❺ $\varphi(\iota) = \iota$.

Действительно:

$$\varphi(o) = \varphi(x \sqcap x\,') = \varphi(x) \sqcap \varphi(x\,') = \varphi(x) \sqcap \varphi(x)' = o$$

и аналогично для $\varphi(\iota)$.

Изоморфизмы булевых алгебр: примеры

1. Алгебра высказываний изоморфна тривиальной алгебре множеств: $\mathbf{2} \cong_b \{\varnothing, A\}$.

2. Тотальная алгебра над n-элементным множеством $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ изоморфна булевой алгебре n-мерных двоичных векторов B^n.
   Булев изоморфизм — отображение $\varphi\colon B^n \to \mathcal{P}(A)$,
   $\varphi((\alpha_1, \ldots, \alpha_n)) = \{ a_i \mid \alpha_i = 1,\ i = \overline{1, n} \} \subseteq A$.

3. Определим для булевой алгебры $\mathfrak{B} = \langle B, \sqcup, \sqcap, ', o, \iota \rangle$ двойственную к ней $\mathfrak{B}^* = \langle B^*, \sqcap^*, \sqcup^*, '^*, \iota^*, o^* \rangle$, положив
   $$B^* = B,\ \ \sqcap^* = \sqcup,\ \ \sqcup^* = \sqcap,\ \ '^* = ',\ \ \iota^* = o,\ \ o^* = \iota.$$
   В силу принципа двойственности будем иметь $\mathfrak{B}^* \cong_b \mathfrak{B}$.

Критерий изоморфности тотальных алгебр множеств

Теорема

Для того чтобы тотальные алгебры множеств $\mathcal{P}(A)$ и $\mathcal{P}(B)$ были изоморфны, необходимо и достаточно, чтобы A и B имели одинаковую мощность.

Доказательство

$\Leftarrow$ *(необходимость)*

Пусть существует изоморфизм φ между алгебрами $\mathcal{P}(A)$ и $\mathcal{P}(B)$.
Тогда φ — взаимно-однозначное соответствие между $\mathcal{P}(A)$ и $\mathcal{P}(B)$ и, следовательно, между множествами A и B, откуда следует их равномощность.

Критерий изоморфности тотальных алгебр множеств...

Доказательство (продолжение)

$\Rightarrow$ *(достаточность)*

Если множества A и B равномощны, то между их элементами можно установить взаимно-однозначное соответствие f.

Критерий изоморфности тотальных алгебр множеств...

Доказательство (продолжение)

$\Rightarrow$ *(достаточность)*

Если множества A и B равномощны, то между их элементами можно установить взаимно-однозначное соответствие f.

Однако элементами $\mathcal{P}(A)$ и $\mathcal{P}(B)$ служат подмножества A и B соответственно, и f не является искомым изоморфизмом. Поэтому распространим отображение f на подмножества данных множеств:

$$\varphi(X) = \bigcup_{a \in X} f(a) \subseteq B.$$

Простая проверка показывает, что φ является искомым булевым изоморфизмом между $\mathcal{P}(A)$ и $\mathcal{P}(B)$.

Разделы

Представление булевых алгебр алгебрами множеств. Атомы

Теорема (Стоун)

Всякая булева алгебра изоморфна подходящей алгебре множеств.

Мы докажем эту теорему для конечного случая, для чего введём новое понятие.

Определение

Ненулевой элемент a булевой алгебры B называется *атомом*, если для любого элемента $x \in B$ справедливо

$$\text{либо } a \sqcap x = o, \text{ либо } a \sqcap x = a \neq o.$$

В последнем случае говорят, что *элемент x содержит атом a*.

В B^n атомы — двоичные наборы единичного веса.

В $\mathcal{P}(A)$ атомы — одноэлементные подмножества A.

Основное свойство атомов

Маршал Стоун
(Marshall Harvey Stone, 1903–1989) — американский математик. Занимался теорией операторов, теорией групп, теорией булевых алгебр.

Утверждение (основное свойство атомов)

Если a_1 и a_2 — различные атомы булевой алгебры, то

$$a_1 \sqcap a_2 = o.$$

Доказательство

Если $a_1 \sqcap a_2 = b \neq o$, то согласно определению должно быть и $b = a_1$, и $b = a_2$.

Атомы конечной булевой алгебры

Лемма

В конечной булевой алгебре каждый ненулевой элемент содержит хотя бы один атом.

Доказательство (алгоритм нахождения атома, содержащегося в элементе $x \in B$)

Для $x \neq o$ берём сначала $a = x$; затем, последовательно перебирая все элементы $b_1, b_2, \ldots, b_m$ носителя B, вычисляем $z = a \sqcap b_k$, полагая $a = z$, если $z \neq o$ (и $z \neq a$).

После окончания работы данного алгоритма получим

$$a = x \sqcap \prod_{b \in B' \subset B} b \neq o,$$

причём $a \sqcap b$ для любого $b \in B$ равно либо o, либо (в частности, для $b = x$) a, т.е. a — искомый атом.

Атомные и безатомные булевы алгебры

Булева алгебра называется

- *атомной* (или *дискретной*), если каждый её ненулевой элемент содержит атом,
- *безатомной* (или *непрерывной*) если она не содержит ни одного атома.

Пример (безатомной булевой алгебры)

Пусть S — совокупность всех конечных объединений всевозможных полуинтервалов вида $(x, y]$ из промежутка $I = (0, 1]$: $0 < x \leqslant y \leqslant 1$. S устойчива относительно теоретико-множественных операций $\cup$, $\cap$ и дополнения до I, и в ней выполняются все законы булевой алгебры. Единица в S — весь интервал I, нуль — пустое множество $(x, x]$. Алгебра S является безатомной: любой интервал $(x, y] \neq \varnothing$ содержит в себе ненулевой подынтервал.

Основное свойство атомных булевых алгебр

Обозначения для булевой алгебры B:

$At(x)$ — совокупность всех атомов, содержащихся в элементе $x \in B$ (и формально $At(o) = \varnothing$);

$At(B)$ — совокупность всех атомов B.

Лемма (о разложении ненулевого элемента на атомы)

Всякий ненулевой элемент атомной булевой алгебры может быть представлен в виде объединения содержащихся в нём атомов:

$$x = \bigsqcup_{a \in At(x)} a.$$

Пример.
В $\mathcal{P}(\{a, b, c, d\})$ элемент $x = \{a, b, c\}$ содержит атомы $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$ и равен их объединению: $x = \{a\} \cup \{b\} \cup \{c\}$.

Основное свойство атомных булевых алгебр...

При $At(x) = \{a\}$ формально полагают $x = \bigsqcup\limits_{a} a$.

Доказательство леммы будет дано далее.

Единица ι есть объединение всех атомов булевой алгебры: действительно, пусть $b = \bigsqcup\limits_{a \in At(B)} a$, тогда

$$o = b' \sqcap b = b' \sqcap \left(\bigsqcup_{a \in At(B)} a \right) \stackrel{Dtr1}{=} \bigsqcup_{a \in At(B)} (b' \sqcap a),$$

и, следовательно, по основному свойству элементов булевой алгебры, $b' \sqcap a = o$ для любого атома a, т.е. b' не содержит ни одного атома $\Leftrightarrow b' = o \Leftrightarrow b = \iota \Leftrightarrow At(\iota) = At(B)$.

Усиление теоремы Стоуна для конечного случая

Теорема

Всякая конечная булева алгебра изоморфна некоторой тотальной алгебре множеств.

Доказательство

Пусть B *— конечная булева алгебра.*
Покажем, что тотальная алгебра множеств над $At(B)$ *изоморфна* B*, т.е.* $\mathcal{P}(At(B)) \cong_b B$.

Рассмотрим функцию φ*, сопоставляющую каждому элементу* x *из* B *множество* $At(x)$ *содержащихся в нём атомов и покажем, что она является искомым изоморфизмом.*
Убедимся сначала, что $\varphi(x) = At(x)$ *— биекция между* B *и* $\mathcal{P}(At(B))$.

Теорема Стоуна для конечного случая: доказательство

Доказательство (продолжение)

Из разложения элемента на атомы следует, что

1) *элемент x однозначно определяется множеством $At(x)$ своих атомов и наоборот, т.е. отображение $\varphi(x)$ инъективно;*

2) *для произвольного подмножества $A \subseteq At(B)$ можно определить элемент x соотношением $x = \bigsqcup\limits_{a \in A} a$, тогда $\varphi(x) = A$ и φ — сюръективно.*

Таким образом, биективность отображения φ показана.

Теорема Стоуна для конечного случая: доказательство...

Доказательство (продолжение)

Теперь удостоверимся, что для φ выполнены свойства ❶–❸ *изоморфизма булевых алгебр.*

1. Очевидно, что

$$x \sqcup y = \bigsqcup_{a_1 \in At(x)} a_1 \sqcup \bigsqcup_{a_2 \in At(y)} a_2 = \bigsqcup_{a \in At(x) \cup At(y)} a,$$

откуда $\varphi(x \sqcup y) = \varphi(x) \cup \varphi(y)$.

2. Покажем, что $\varphi(x \sqcap y) = \varphi(x) \cap \varphi(y)$

$$x \sqcap y = \bigsqcup_{a_1 \in At(x)} a_1 \sqcap \bigsqcup_{a_2 \in At(y)} a_2 \overset{Dtr1}{=}$$

$$= \bigsqcup_{\substack{a_1 \in At(x) \\ a_2 \in At(y)}} (a_1 \sqcap a_2) = \bigsqcup_{a \in At(x) \cap At(y)} a\,.$$

Теорема Стоуна для конечного случая: доказательство...

Доказательство (продолжение)

3. Подставляя в полученные выше равенства $y = x'$ с учётом $At(\iota) = At(B)$ получим

$$At(x) \cup At(x') = At(B) \quad \text{и} \quad At(x) \cap At(x') = \varnothing,$$

откуда по лемме о единственности дополнения —

$$At(x') = At(B) \setminus At(x) \text{ и } \varphi(x') = \overline{\varphi(x)}.$$

Теорема Стоуна для конечного случая: следствия

Следствия

1. *Если конечная булева алгебра имеет n атомов, то общее число её элементов равно 2^n.*
2. *Любая конечная булева алгебра изоморфна подходящей алгебре n-мерных двоичных векторов.*

Первое следует из того, что мощность множества всех подмножеств совокупности из атомов n есть 2^n, а второе — из ранее указанного $\mathcal{P}(A) \cong_b B^n$, если $|A| = n$.

Теорема Стоуна показывает, что элементы любой булевой алгебры можно представлять подмножествами некоторого множества, а булевы операции отождествлять с одноимёнными теоретико-множественными.

Разделы

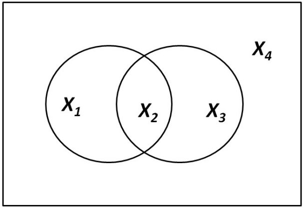
Задача БА-1

Определить максимальное количество подмножеств, которые можно образовать из n различных подмножеств некоторого универсального множества с помощью теоретико-множественных операций объединения, пересечения и дополнения?
А для случая, когда подмножества образуют разбиение исходного множества?

Задача БА-1

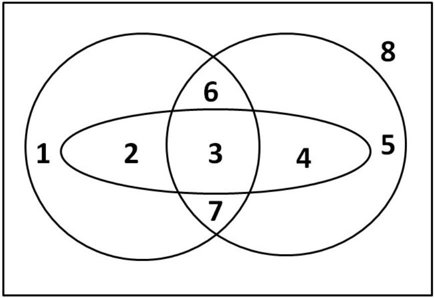
Определить максимальное количество подмножеств, которые можно образовать из n различных подмножеств некоторого универсального множества с помощью теоретико-множественных операций объединения, пересечения и дополнения?
А для случая, когда подмножества образуют разбиение исходного множества?

Решение. ❶ 2^{2^n} множеств:
если система множеств $\{X_1, \ldots, X_n\}$ независима, она порождает 2^n непустых составляющих — атомов.
Они попарно не пересекаются и их объединение совпадает с U.
Существует 2^{2^n} различных объединений составляющих (включая пустое).



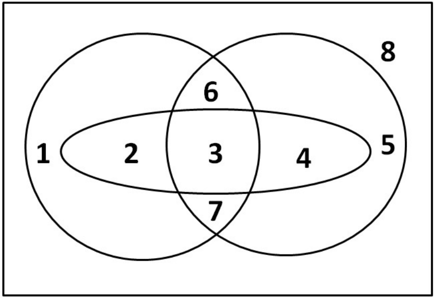
Задача БА-2

Являются ли множества, изображённые на рисунке множествами общего положения?



Задача БА-2

Являются ли множества, изображённые на рисунке множествами общего положения?



Решение. Нет: области 6 и 7 — одно множество (и 2 и 4 — тоже одно).

Задача БА-3

Рассмотрим АС $\langle \{0, 1\}, \oplus, \&, \neg, 0, 1 \rangle$.
Является ли она булевой алгеброй?

Задача БА-3

Рассмотрим АС $\langle \{0, 1\}, \oplus, \&, \neg, 0, 1 \rangle$.
Является ли она булевой алгеброй?

Решение. Проверкой убеждаемся, что эта АС удовлетворяет всем аксиомам булевой алгебры в аксиоматике Э. Хантингтона, кроме второго дистрибутивного закона $Dtr2$:

$$(x \,\&\, y) \oplus z \neq (x \oplus z) \,\&\, (y \oplus z),$$

т.к. при $x = 0$, $y = z = 1$ имеем

$$(0 \,\&\, 1) \oplus 1 = 0 \oplus 1 = 1 \neq 0 = 1\&0 = (0 \oplus 1) \,\&\, (1 \oplus 1).$$

Рассматриваемая АС — кольцо с единицей, а не булева алгебра.

Дополнительно показана независимость аксиомы $Dtr2$ от остальных.

Задача БА-4

Показать выводимости законов Де Моргана из законов Dtr, Ass, Id *и основных свойств дополнения.*

Задача БА-4

Показать выводимости законов Де Моргана из законов Dtr, Ass, Id *и основных свойств дополнения.*

Решение. Для любых x, $y \in B$ справедливо

$$(x \sqcap y) \sqcup (x' \sqcup y') = \iota \quad \text{и} \quad (x \sqcap y) \sqcap (x' \sqcup y') = o.$$

Покажем это: $(x \sqcap y) \sqcup (x' \sqcup y') \overset{Dtr}{=}$

$$= (x \sqcup x' \sqcup y') \sqcap (y \sqcup x' \sqcup y') = \iota \sqcap \iota = \iota,$$

и $(x \sqcap y) \sqcap (x' \sqcup y') = o$ по двойственности.

По лемме о единственности дополнения это означает, что $x' \sqcup y'$ — дополнение к $x \sqcap y$, т.е. из указанных законов выведен закон $DeM1$.

Аналогичная выводимость $DeM2$ следует из принципа двойственности.

Задача БА-5

Пусть $D(N)$ *— совокупность всех делителей натурального* N. *Будут ли АС с носителями*

1. $D(18)$,
2. $D(110)$

и операциями НОК и НОД как $\sqcap$ *и* $\sqcup$ *соответственно булевыми алгебрами?*

Задача БА-5

Пусть $D(N)$ *— совокупность всех делителей натурального* N*. Будут ли АС с носителями*

1. $D(18)$,
2. $D(110)$

и операциями НОК и НОД как $\sqcap$ *и* $\sqcup$ *соответственно булевыми алгебрами?*

Решение.

1. **Нет**, т.к., например, не существует дополнения $6'$ для 6.
   Должно быть: $6 \vee 6' = 18$, $6 \wedge 6' = 1$.
   Только $6 \vee 9 = 18$, но $6 \wedge 9 = 3$.
   Причина: 18 не есть число, свободное от квадратов.

Задача БА-5

Пусть $D(N)$ *— совокупность всех делителей натурального* N. *Будут ли АС с носителями*

1. $D(18)$,
2. $D(110)$

и операциями НОК и НОД как $\sqcap$ *и* $\sqcup$ *соответственно булевыми алгебрами?*

Решение.

1. **Нет**, т.к., например, не существует дополнения $6'$ для 6.
   Должно быть: $6 \vee 6' = 18$, $6 \wedge 6' = 1$.
   Только $6 \vee 9 = 18$, но $6 \wedge 9 = 3$.
   Причина: 18 не есть число, свободное от квадратов.
2. **Да**, т.к. $110 = 2 \cdot 5 \cdot 11$ — число, свободное от квадратов, и для каждого $a \in B = \{1, 2, 5, 10, 11, 22, 55, 110\}$ можно единственным образом определить дополнение $a' = \dfrac{110}{a}$.

Задача БА-6

Справедливо основное свойства атомов булевой алгебры: если a_1 и a_2 — различные атомы, то $a_1 \sqcap a_2 = o$.
Равенство, двойственное к данному $a_1 \sqcup a_2 = \iota$ в булевой алгебре с более, чем 4 элементами, очевидно, неверно. Почему?

Задача БА-6

Справедливо основное свойства атомов булевой алгебры: если a_1 и a_2 — различные атомы, то $a_1 \sqcap a_2 = o$.
Равенство, двойственное к данному $a_1 \sqcup a_2 = \iota$ в булевой алгебре с более, чем 4 элементами, очевидно, неверно. Почему?

Решение. Здесь существенно, что a_1 и a_2 не произвольные элементы булевой алгебры, а именно атомы.

Обозначим через V выражение

$$((a_1 \sqcap x = a_1) \vee (a_1 \sqcap x = o))\,\&((a_2 \sqcap x = a_2) \vee (a_2 \sqcap x = o))\,\& \\ \&\,(a_1 \neq a_2) \;\Rightarrow\; a_1 \sqcap a_2 = o\,.$$

Тогда $V^\natural$ будет истинное выражение

$$((a_1 \sqcup x = a_1) \vee (a_1 \sqcup x = \iota))\,\&((a_2 \sqcup x = a_2) \vee (a_2 \sqcup x = \iota))\,\& \\ \&\,(a_1 \neq a_2) \;\Rightarrow\; a_1 \sqcup a_2 = \iota\,.$$

Здесь a_1 и a_2 — *коатомы*.

Задача БА-7

Показать, что в булевой алгебре $\mathbf{2}$ *для* $x, y, z \in B$ *справедливы соотношения (приоритет* $\cdot$ *выше* $\vee$*, символ* $\cdot$ *будем иногда опускать):*

1. $(x \vee y)(\overline{x} \vee y) = y$;
2. $(z \vee x)(\overline{z} \vee y) = zy \vee \overline{z}x$;

Задача БА-7

Показать, что в булевой алгебре $\mathbf{2}$ *для* $x, y, z \in B$ *справедливы соотношения (приоритет* $\cdot$ *выше* $\vee$*, символ* $\cdot$ *будем иногда опускать):*

❶ $(x \vee y)(\overline{x} \vee y) = y$; ❷ $(z \vee x)(\overline{z} \vee y) = zy \vee \overline{z}x$;

Решение. ❶ $(x \vee y)(\overline{x} \vee y) = x\overline{x} \vee xy \vee y\overline{x} \vee yy =$

$$= 0 \vee xy \vee y\overline{x} \vee y \cdot 1 = y \cdot (x \vee \overline{x} \vee 1) = y \cdot 1 = y\,.$$

❷ Для выяснения справедливости равенства $A = B$ можно:

А). Показать, что
$$\begin{cases} A \vee B' = 1, \\ A \cdot B' = 0 \end{cases}$$
и воспользоваться леммой о единственности дополнения (приведённые равенства проверить легче, чем исходное $A = B$).

Имеем $A = (z \vee x)(\overline{z} \vee y)$, $B = zy \vee \overline{z}x$.
Далее $B' = (\overline{z} \vee \overline{y})\&(z \vee \overline{x})$.

Задача БА-7...

Б). Привести A и B в некоторую единую форму.

- Приведение к виду «полином Желалкина». Введём операцию $x+y \overset{\text{def}}{=} x\overline{y} \vee \overline{x}y$. Тогда $\overline{x} = x+1$, $\overline{x}+x=0$, операция $\cdot$ ассоциативна, коммутативна и для $\cdot$ и $+$ выполняется первый дистрибутивный закон. Получаем

$$(z \vee x)(\overline{z} \vee y) = (x \vee z)(y \vee (z+1)) =$$
$$= (xz+x+y)(y(z+1)+y+z+1) =$$
$$= (xz+x+y)(yz+z+1) =$$
$$= xyz+xz+xz+xyz+xz+x+yz+z+z =$$
$$= xz+yz+x\,.$$

С другой стороны, $zy \vee \overline{z}x = yz \vee (z+1)x =$

$$= yz \vee (xz+x) = yz(xz+x)yz+xz+x =$$
$$= xyz+xyz+yz+xz+x = yz+xz+x\,.$$

Задача БА-7...

- Приведение к виду ДНФ (крайний случай - СДНФ).

$$
\begin{aligned}
(z \vee x)(x \vee \overline{z}) &= zy \vee x\overline{z} \vee xy = \\
&= zy \vee x\overline{z} \vee xy(z \vee \overline{z}) = \\
&= yz \vee x\overline{z} \vee xyz \vee xy\overline{z} \overset{\text{поглощение}}{=} yz \vee x\overline{z}\,.
\end{aligned}
$$

Задача БА-8

Показать, что следующие утверждения о подмножествах A и B универсального множества U равносильны:

1. $A \cup B = U$;
2. $\overline{A} \cap \overline{B} = \varnothing$;
3. $\overline{A} \subseteq B$.

Задача БА-8

Показать, что следующие утверждения о подмножествах A и B универсального множества U равносильны:

❶ $A \cup B = U$; ❷ $\overline{A} \cap \overline{B} = \varnothing$; ❸ $\overline{A} \subseteq B$.

Решение. $X \subseteq Y \overset{?}{\Leftrightarrow} X \cap Y = X \Leftrightarrow X \cup Y = Y$

$1) \Rightarrow 2)$ По правилу Де Моргана.

$2) \Rightarrow 3)$ $(\cup B)$

$$\overline{A} \cap \overline{B} = \varnothing \Leftrightarrow (\overline{A} \cap \overline{B}) \cup B = B \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow (\overline{A} \cup B) \cap (B \cup \overline{B}) = B \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow (\overline{A} \cup B) \cap U = (\overline{A} \cup B = B) \Rightarrow \overline{A} \subseteq B.$$

$3) \Rightarrow 1)$ $(\cup A)$

$$\overline{A} \cup B = B \Rightarrow \overline{A} \cup B \cup A = B \cup A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U = A \cup B.$$

Задача БА-9

Введём в булевой алгебре отношение $\sqsubseteq$ по правилу

$$a \sqsubseteq b = a \sqcap b = a.$$

Показать, что следующие утверждения об элементах a и b булевой алгебры равносильны:

❶ $a \sqsubseteq b$; ❷ $a \sqcap b' = o$; ❸ $a' \sqcup b = \iota$; ❹ $a \sqcup b = b$.

Задача БА-9

Введём в булевой алгебре отношение $\sqsubseteq$ по правилу

$$a \sqsubseteq b \;=\; a \sqcap b \;=\; a.$$

Показать, что следующие утверждения об элементах a и b булевой алгебры равносильны:

❶ $a \sqsubseteq b\,;$ ❷ $a \sqcap b' \;=\; o\,;$ ❸ $a' \sqcup b \;=\; \iota;$ ❹ $a \sqcup b \;=\; b.$

Решение.

❶ $\Rightarrow$ ❷:

$$a \sqsubseteq b \;\stackrel{\text{def}}{=}\; (a = a \sqcap b) \;\stackrel{\sqcap b'}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow\; (a \sqcap b' = a \sqcap b \sqcap b') \;\Rightarrow\; (a \sqcap b' = o)\,.$$

❷ $\Rightarrow$ ❸: по двойственности: $a \sqcap b' = o \;\Leftrightarrow\; a' \sqcup b = \iota.$

Задача БА-9...

❸ $\Rightarrow$ ❹ — пересекаем с $(a \sqcup b)$:

$$(a' \sqcup b = \iota) \;\Rightarrow\; (a \sqcup b) \sqcap (a' \sqcup b) = a \sqcup b \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \underbrace{(a \sqcap a')}_{\iota} \sqcup b = a \sqcup b \;\Rightarrow\; a \sqcup b = b\,.$$

❹ $\Rightarrow$ ❶ — пересекаем с a:

$$(a \sqcup b = b) \;\Leftrightarrow\; a \sqcap (a \sqcup b) = a \sqcap b \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; a = a \sqcap b \;\Rightarrow\; a \sqsubseteq b\,.$$

Разделы

- Булева алгебра; **основные соотношения в булевой алгебре**.
- **Принцип двойственности для булевой алгебры**. Системы аксиом булевой алгебры.
- **Алгебра множеств как булева алгебра**. Диаграммы Эйлера-Венна и свойства составляющих системы множеств. Теорема Венна.
- Примеры булевых алгебр. Изоморфизм булевых алгебр. **Критерий изоморфности тотальных алгебр множеств**.
- Теорема Стоуна для общего и **конечного** случаев. Атомы булевой алгебры их свойства, атомные и безатомные булевы алгебры.