ВМК

Семинар 7. Вариационный вывод

Курс: Байесовские методы в машинном обучении, 2015

1. Рассмотрим распределение Гаусса-Уишарта:

$$\mathcal{NW}(\boldsymbol{\mu}, \Lambda|\boldsymbol{m}_0, \beta_0, W_0, \nu_0) = \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}|\boldsymbol{m}_0, (\beta_0\Lambda)^{-1})\mathcal{W}(\Lambda|W_0, \nu_0),$$
$$\mathcal{W}(\Lambda|W_0, \nu_0) \propto |\Lambda|^{(\nu_0-d-1)/2} \exp\left(-\frac{1}{2}\operatorname{tr}\Lambda W_0^{-1}\right).$$

   Здесь $\nu_0 > d-1$. Требуется найти
$$\mathbb{E}_{\mathcal{NW}(\boldsymbol{\mu},\Lambda)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^T\Lambda(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}),$$
   если известно, что $\mathbb{E}_{\mathcal{W}(\Lambda|W_0,\nu_0)}\Lambda = \nu_0 W_0$.

2. Рассмотрим следующую вероятностную модель:

$$p(X, \mu, \lambda) = \left[\prod_{n=1}^{N} p(x_n|\mu, \lambda)\right] p(\mu, \lambda),$$
$$p(x_n|\mu, \lambda) = \mathcal{N}(x_n|\mu, \lambda^{-1}),$$
$$p(\mu, \lambda) = \mathcal{NG}(\mu, \lambda|m_0, \beta_0, a_0, b_0) = \mathcal{N}(\mu|m_0, (\beta_0\lambda)^{-1})\mathcal{G}(\lambda|a_0, b_0).$$

   Для поиска в рамках вариационного подхода факторизованного приближения вида
$$q(\mu)q(\lambda) \simeq p(\mu, \lambda|X)$$
   требуется выписать формулы для итерационного пересчёта факторов $q(\mu)$, $q(\lambda)$, а также значение функционала $\mathcal{L}(q)$.

3. Рассмотрим байесовскую модель смеси гауссиан:

$$p(X, Z, \boldsymbol{\pi}, \{\boldsymbol{\mu}_k, \Lambda_k\}_{k=1}^K) = \left[\prod_{n,k=1}^{N,K} \mathcal{N}(\boldsymbol{x}_n|\boldsymbol{\mu}_k, \Lambda_k)^{z_{nk}}\pi_k^{z_{nk}}\right] p(\boldsymbol{\pi}) \prod_{k=1}^{K} p(\boldsymbol{\mu}_k, \Lambda_k),$$
$$p(\boldsymbol{\pi}|\alpha_0) = \operatorname{Dir}(\boldsymbol{\pi}|\alpha_0) \propto \pi_1^{\alpha_0-1}\dots\pi_K^{\alpha_0-1},$$
$$p(\boldsymbol{\mu}_k, \Lambda_k) = \mathcal{GW}(\boldsymbol{\mu}_k, \Lambda_k|\boldsymbol{m}_0, \beta_0, W_0, \nu_0).$$

   Здесь $z_{nk} \in \{0, 1\}$ и $\sum_k z_{nk} = 1$. В рамках вариационного подхода будем искать факторизованное приближение вида
$$q(Z)q(\boldsymbol{\pi}, \{\boldsymbol{\mu}_k, \Lambda_k\}_{k=1}^K) \simeq p(Z, \boldsymbol{\pi}, \{\boldsymbol{\mu}_k, \Lambda_k\}_{k=1}^K|X).$$
   Требуется выписать формулы пересчёта отдельных факторов q, а также значение функционала $\mathcal{L}(q)$.