Как бороться с пробками?

Гасников А.В.

Факультет управления и прикладной математики МФТИ
Кафедра математических основ управления ФУПМ МФТИ
Лаборатория структурных методов анализа данных
в предсказательном моделировании МФТИ
Институт проблем передачи информации РАН
gasnikov@yandex.ru

Опыт преподавания

С 2008 г. читаем курс по транспортным потокам в МФТИ: https://mipt.ru/dcam/science/seminars/matematicheskoe-modelirovanie-transportnykh-potokov-2015.php

В 2011 г. в Независимом московском университете: http://ium.mccme.ru/s11/gasnikov-speckurs.html

Гасников А.В., Кленов С.Л., Нурминский Е.А., Холодов Я.А., Шамрай Н.Б. Введение в математическое моделирование транспортных потоков. Под ред. А.В. Гасникова с приложениями М.Л. Бланка, К.В. Воронцова и Ю.В. Чеховича, Е.В. Гасниковой, А.А. Замятина и В.А. Малышева, А.В. Колесникова, Ю.Е. Нестерова и С.В. Шпирко, А.М. Райгородского, практическим приложением от “А+С Консалт” А.В. Прохорова и В.Л. Швецова, с предисловием руководителя департамента транспорта г. Москвы М.С. Ликсутова. М.: МЦНМО, 2013. 427 стр.

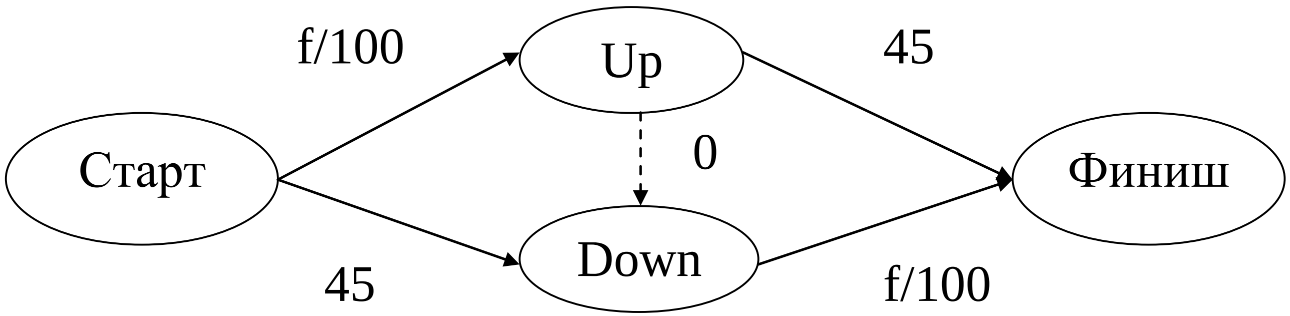
Опыт преподавания

Миникурс в ЛШСМ-2011: http://www.mccme.ru/dubna/2011/

Гасников А., Дорн Ю., Прохоров А., Швецов В. Как бороться с пробками ? // Троицкий вариант наука, 20 ноября 2012. http://elementy.ru/lib/431798

Гасников А.В., Дорн Ю.В., Нурминский Е.А., Шамрай Н.Б. Автомобильные пробки: когда рациональность ведет к коллапсу // Квант, № 1. 2013. С. 13-18.

Парадокс Браеса (модель Бэкмана)



Корреспонденция: $d = 4000\ \text{авт}/\text{час},\ x_{up} + x_{down} = d.$

Равновесие: $x_{up} = 2000\ \text{авт}/\text{час},\ x_{down} = 2000\ \text{авт}/\text{час},$

$$T_{up}(x) = T_{down}(x) = 65\ \text{мин.}$$

Равновесие (если есть ребро Up->Down): $x_{up,down} = 4000\ \text{авт}/\text{час},$

$$T_{up,down}(x) = 80\ \text{мин.}$$

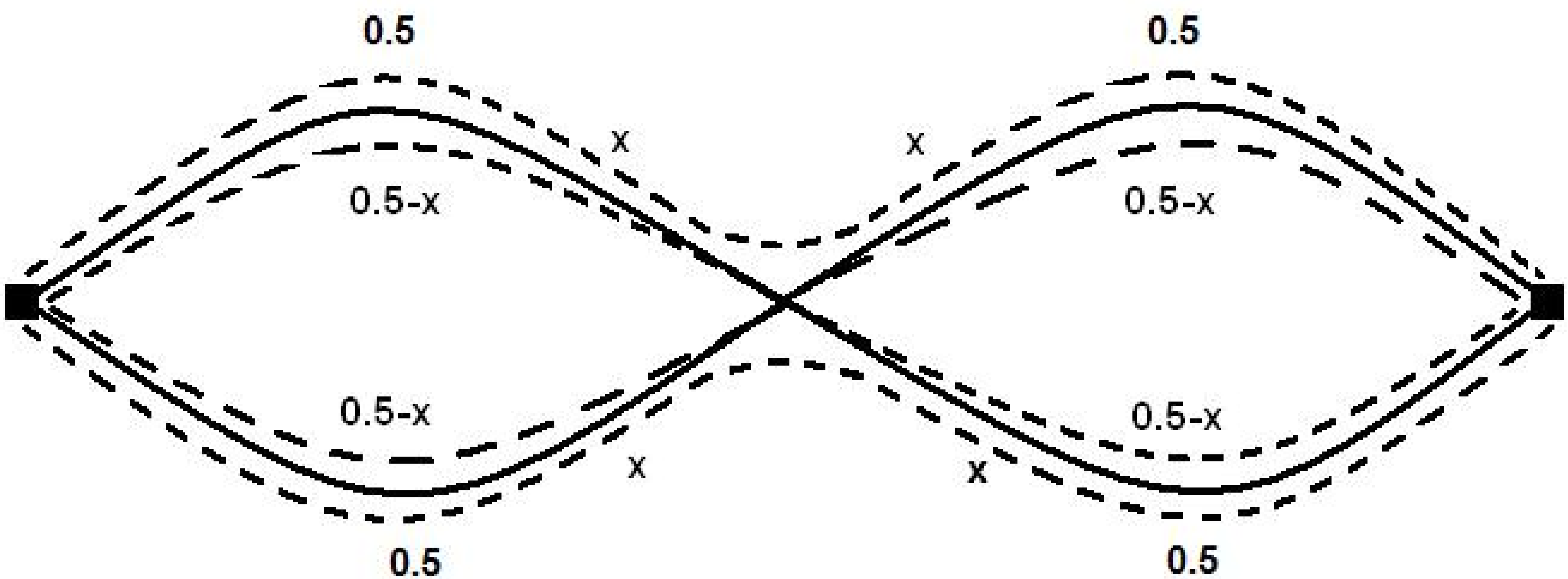
$$\boxed{\Psi(x) = \sum_{e\in E} \sigma_e(f_e) \to \min_{f=\Theta x,\ x\in X}},\ \sigma_e(f_e) = \int_0^{f_e} \tau_e(z)\,dz. \qquad (1)$$

Платные дороги: $\bar{\tau}(f) = \tau(f) + \underbrace{f\tau'(f)}_{\text{штраф}}$. (VCG – механизм);

$$x_{up} = x_{down} = 1750\ \text{авт}/\text{час},\ x_{up,down} = 500\ \text{авт}/\text{час}.$$

Неединственное равновесие

Гасникова Е.В. Диссертация к.ф.-м.н., МФТИ, 2012.



Какое реализуется равновесие? Ответ: 0.25, 0.25, 0.25, 0.25.

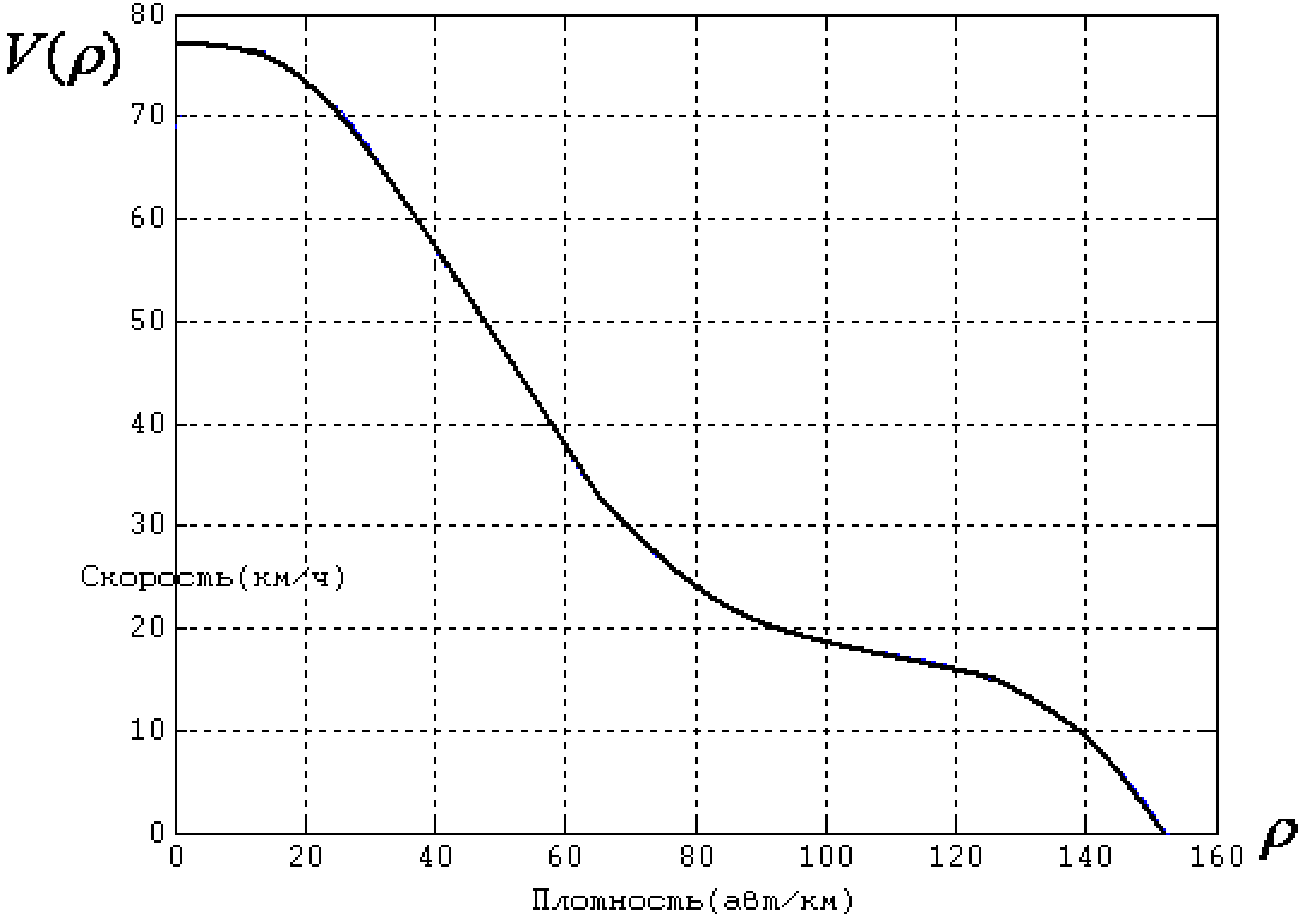
Модель Бобкова–Буслаева–Танака

Зависимость $\tau(f)$ можно попробовать вывести, например, из следующих соображений. Рассматривается одна полоса длины L и транспортный поток, характеризующийся максимальной скоростью $\mathrm{v}_{\max}$ и следующей зависимостью безопасного расстояния (“комфортного” расстояния до впереди идущего транспортного средства) от скорости: $\boxed{d(\mathrm{v}) = l + \tilde{\tau}\mathrm{v} + c\mathrm{v}^2}$ – динамический габарит, где l – средняя длина автомобиля в “стоячей” пробке (эта длина немного больше средней “физической” длины автомобиля ≈ 6.5 м), $\tilde{\tau}$ – время реакции водителей (эксперименты показывают, что для европейских водителей эта величина обычно равна одной секунде, для российских водителей она, как правило, не превышает полсекунды.

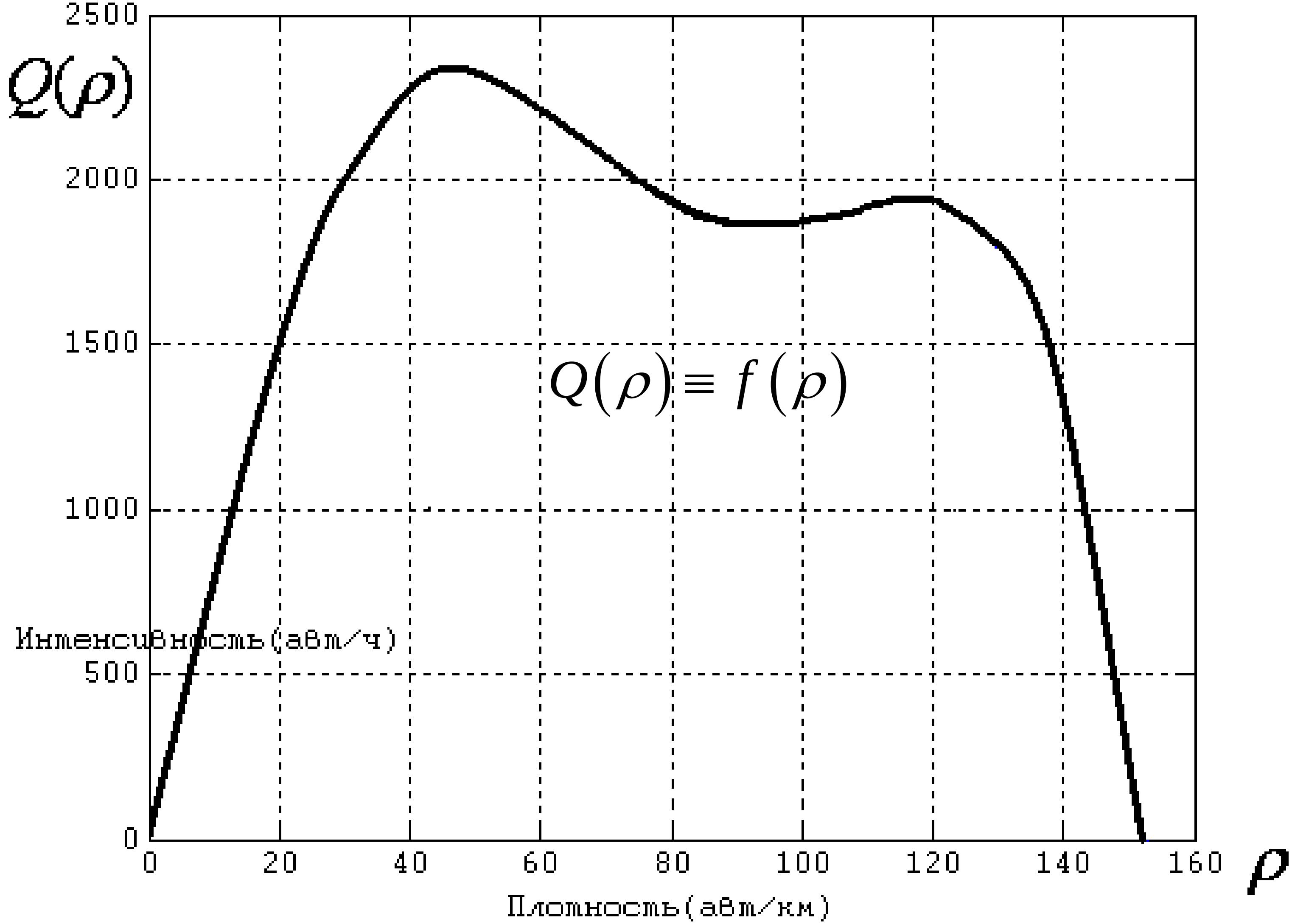
$$\boxed{d(\mathrm{v}) = l + \tilde{\tau}\mathrm{v} + c\mathrm{v}^2}$$

c – характеризует коэффициент трения шин о поверхность дороги, поскольку слагаемое $c\mathrm{v}^2$ характеризует в $d(\mathrm{v})$ тормозной путь. Действительно, пока водитель среагирует на ситуацию он в среднем проедет (не изменяя своей скорости) путь $\tilde{\tau}v$. Когда уже реакция произошла, водитель начинает тормозить и кинетическая энергия автомобиля $m\mathrm{v}^2/2$ должна быть “погашена” работой силой трения на участке h тормозного пути μmgh (μ – коэффициент трения, g – ускорение свободного падения). Отсюда можно найти $c = 1/(2\mu g)$. Имея зависимость $d(\mathrm{v})$, можно ввести зависимость $\rho(\mathrm{v}) = 1/d(\mathrm{v})$, которая порождает зависимость потока от скорости $f(\mathrm{v}) = \mathrm{v}\rho(\mathrm{v})$. Используя то, что $\tau(f(\mathrm{v})) = L/\mathrm{v}$ и $0 \le \mathrm{v} \le \mathrm{v}_{\max}$ можно явно выписать искомую зависимость $\tau(f)$.

Уравнение состояния

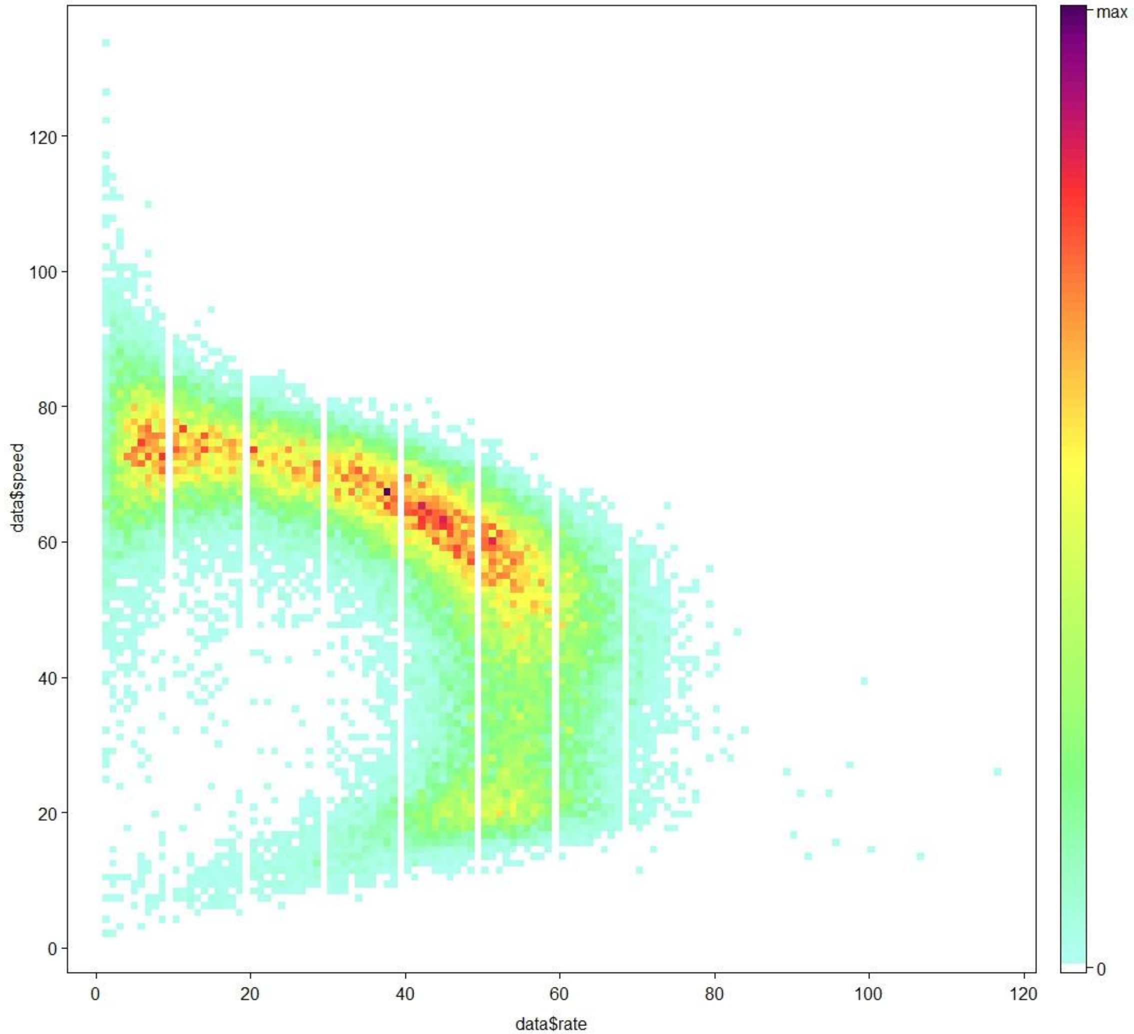


Уравнение состояния



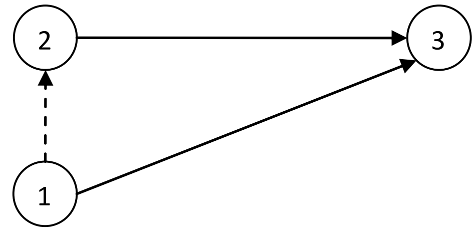
Пример данных с датчиков

Как согласовать фундаментальную диаграмму с моделью Бэкмана равновесного распределения потоков?



По оси абсцисс – поток по двум полосам (авт/мин), а по оси ординат – скорость (км/час)

Парадокс Браеса (модель Стабильной Динамики)



Корреспонденции: $d_{13} = d_{23} = 1500 \; авт/час, \; d_{12} = 0;$

$$\tau^{\mu}(f) \xrightarrow[\mu \to 0+]{} \begin{cases} \bar{t}, & 0 \le f < \bar{f} \\ [\bar{t}, \infty), & f = \bar{f} \end{cases}, \text{ BPR}: \; \tau^{\mu}(f) = \bar{t} \cdot \left(1 + \eta \cdot \left(f / \bar{f}\right)^{\frac{1}{\mu}}\right),$$

$$(\bar{f}_{12} = \bar{f}_{13}) = \bar{f}_{23} = 2000 \; авт/час, \; \bar{t}_{13} = 1 \; час, \; \bar{t}_{23} = 30 \; мин, \; \bar{t}_{12} = 15 \; мин.$$

Равновесие (без 1-2): $x_{13} = x_{23} = 1500 \; авт/час, T_{13} = 1 \; час, T_{23} = 30 \; мин.$

Равновесие (с 1-2): $x_{13} = 1000 \; авт/час, \; x_{123} = 500 \; авт/час,$

$x_{23} = 1500 \; авт/час, \; T_{13} = 1 \; час, \; T_{23} = 45 \; мин.$

Если в (1) перейти к пределу $\mu \to 0+$, то:

$$\boxed{\sum_{e \in E} f_e \bar{t}_e \to \min_{f = \Theta x, \; f \le \bar{f}, \; x \in X}.}$$

Платные дороги: Штраф за проезд по ребру (23) = 45 – 30 = 15 мин.

Как эффективно численно решать задачи поиска равновесий в транспортных сетях?

Классические подходы

Метод условного градиента Франк–Вульфа

Метод балансировки Брэгмана–Шелейховского–Синхорна

Новые подходы

Гасников А.В. Эффективные численные методы поиска равновесий в транспортных сетях. Диссертация на соискание степени доктора физико-математических наук. МФТИ, 2016. 500 стр.
https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1606/1606.03560.pdf

Открытые проблемы близко

Типичная задача (Нестеров–деПальма); предлагается студентам на сдаче.

Из жилого района в рабочий район утром должны отправляться $N = 10^4$ автомобилей. Водитель каждого автомобиля хочет приехать ровно к 9 часам утра в рабочий район. При этом каждая минута опоздания штрафуется в $\alpha = 10$ рублей, а каждая потерянная минута в пути стоит в $\gamma = 5$ рублей, а в ожидании начала рабочего дня, если водитель приехал раньше времени, стоит $\beta = 3$ рубля. Время в пути по свободной дороге занимает $T = 60$ минут. Но на середине дороги есть узкое место, пропускная способность которого ограничена 3 000 автомобилей в час. Покажите, что равновесное распределение водителей по времени выезда из жилого района $n(t)$ представимо в виде:

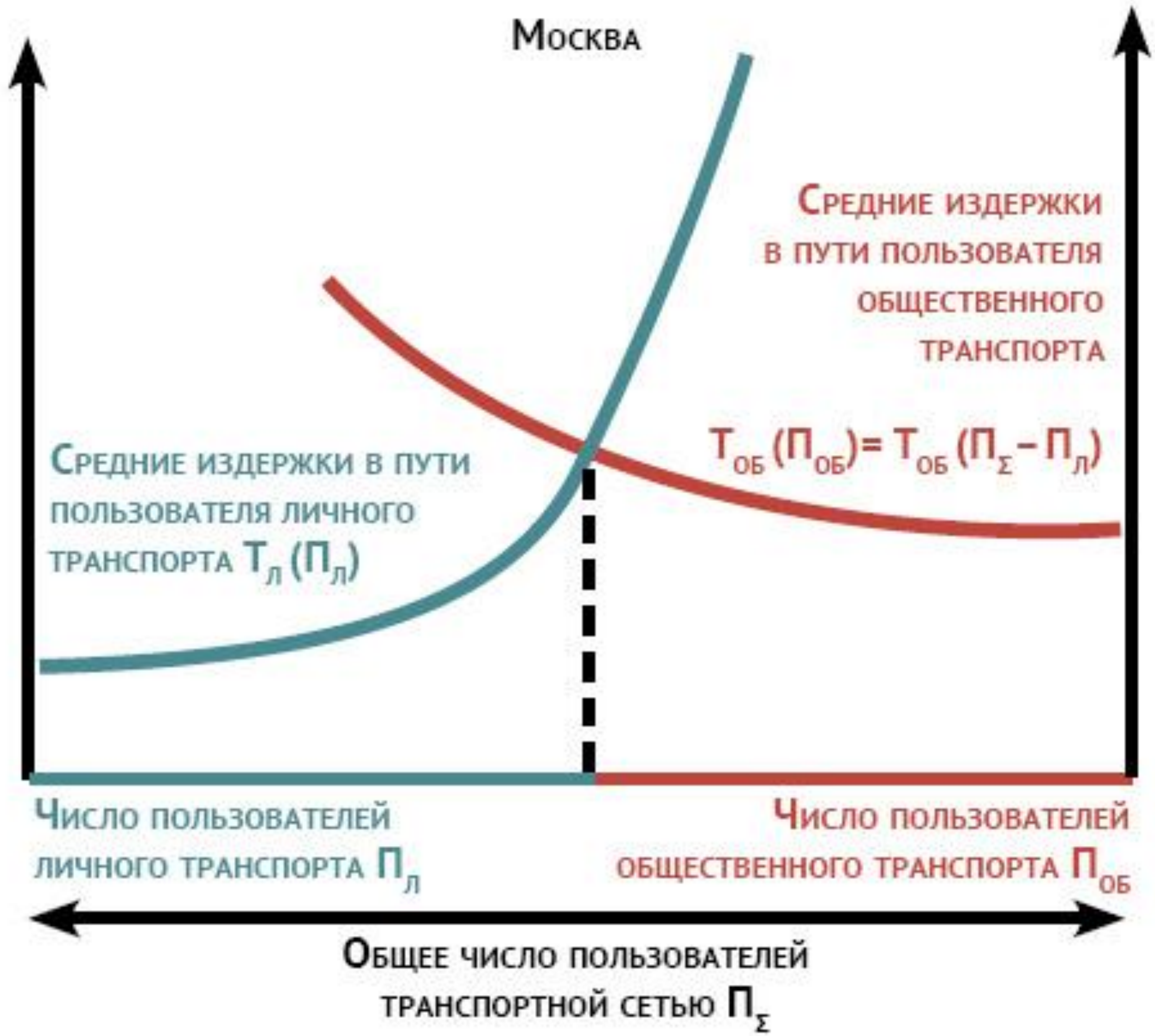
$$n(t) = \begin{cases} 0, & t < t_1 \\ n_1, & t_1 \le t < t_2 \\ n_2, & t_2 \le t < t_3 \\ 0, & t \ge t_3 \end{cases}. \text{ (Ответ: } n(t) = \begin{cases} 0, & t < 5:26 \\ 7500 \text{ авт / час}, & 5:26 \le t < 6:28 \\ 1000 \text{ авт / час}, & 6:28 \le t < 8:46 \\ 0, & t \ge 8:46 \end{cases} \text{)}$$

Найдите n_1, n_2, t_1, t_2, t_3. Попробуйте обобщить эту задачу.

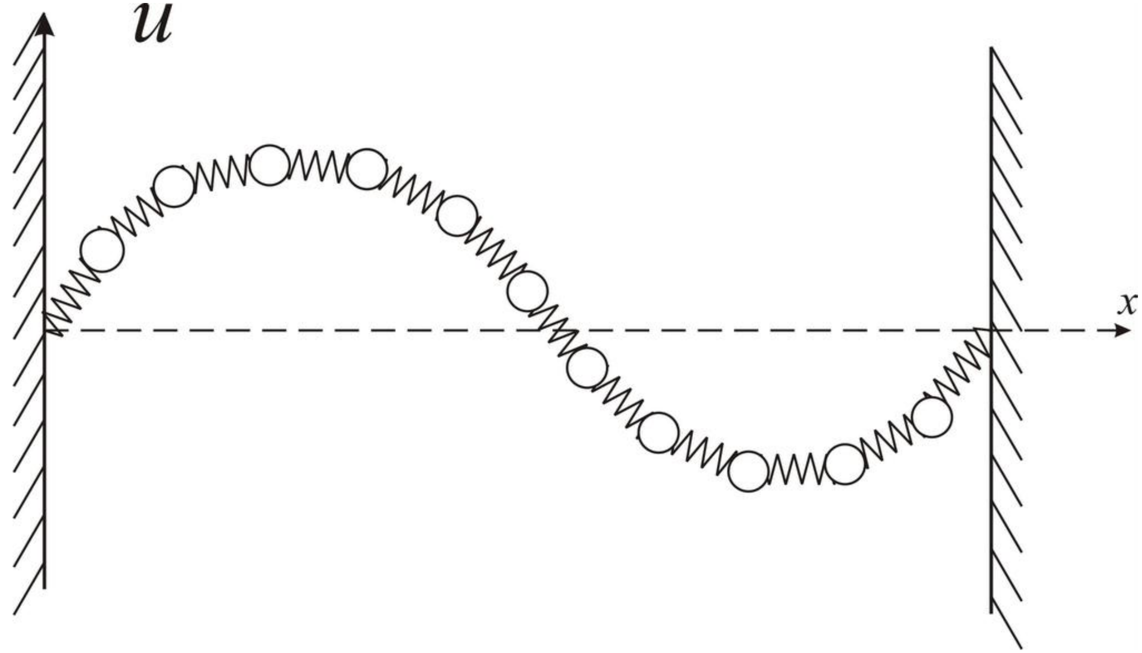
Фазовый переход

Было обнаружено, что при весьма общих условиях, существует такое критическое число автомобилей, которые курсируют по транспортному графу, небольшое превышение которого ведет к резкому росту загруженности транспортной сети, к образованию пробок. По мнению В.П. Мартынова (ЦОДД) для Москвы (на момент весны 2013 г.) это значение лежало в диапазоне 450 000 – 500 000 автомобилей. В действительности, многие крупные города как раз находятся где-то на границе этого "фазового перехода". Причина проста и имеет в своей основе принцип неподвижной точки. Если рассматривать эволюцию города с точки зрения появления новых жителей, новых рабочих мест, строительства новых дорог, то можно условно считать, что новый водитель будет пользоваться автомобилем в городе, если "комфортность" такого пользования не ниже некоторого уровня. Поскольку, в малой окрестности критического значения происходит резкое падение этой комфортности, то у большинства новых потенциальных пользователей этой транспортной сети пропадает желание ими быть (и они выбирают себе альтернативы: "переходят" на общественный транспорт, выбирают соответствующим образом место работы и т.п.). Аналогично можно провести рассуждения и в обратную сторону.

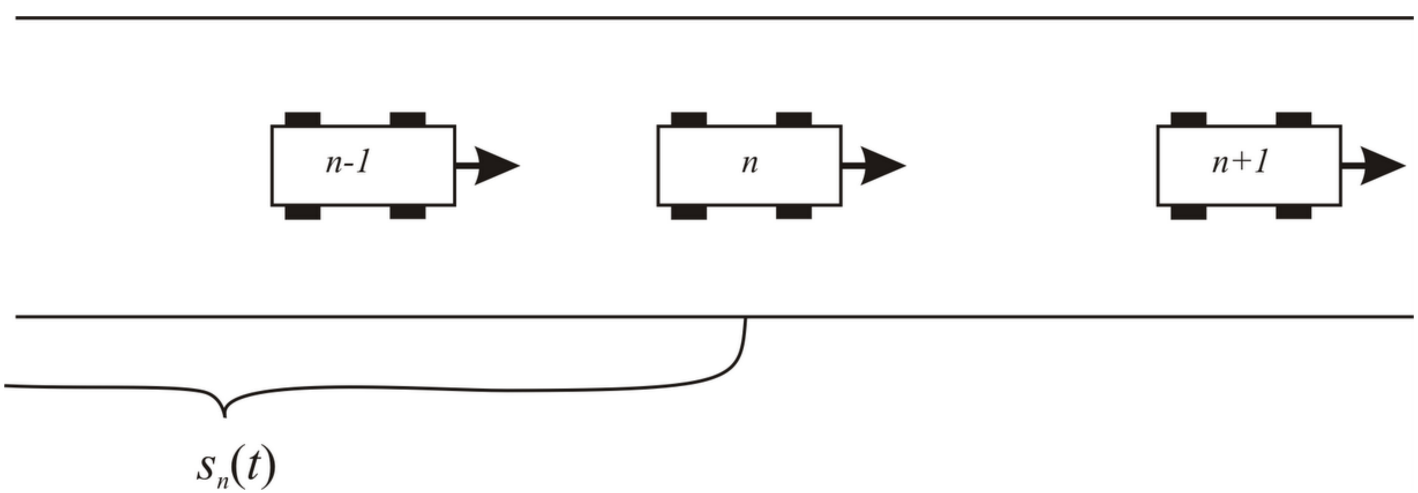
Принцип неподвижной точки



Микроскопические модели



аналогия



Модель разумного водителя Трайбера

Модели оптимальной скорости и следования за лидером можно объединить в одну общую *микроскопическую модель разумного водителя* (*Intelligent Driver Model* (*IDM*)):

$$s_n''(t) = F\left(s_{n+1}(t) - s_n(t),\, s_{n+1}'(t) - s_n'(t),\, s_n'(t)\right).$$

Как показали численные эксперименты, наиболее «удачной» моделью этого класса является *модель М. Трайбера* (1999):

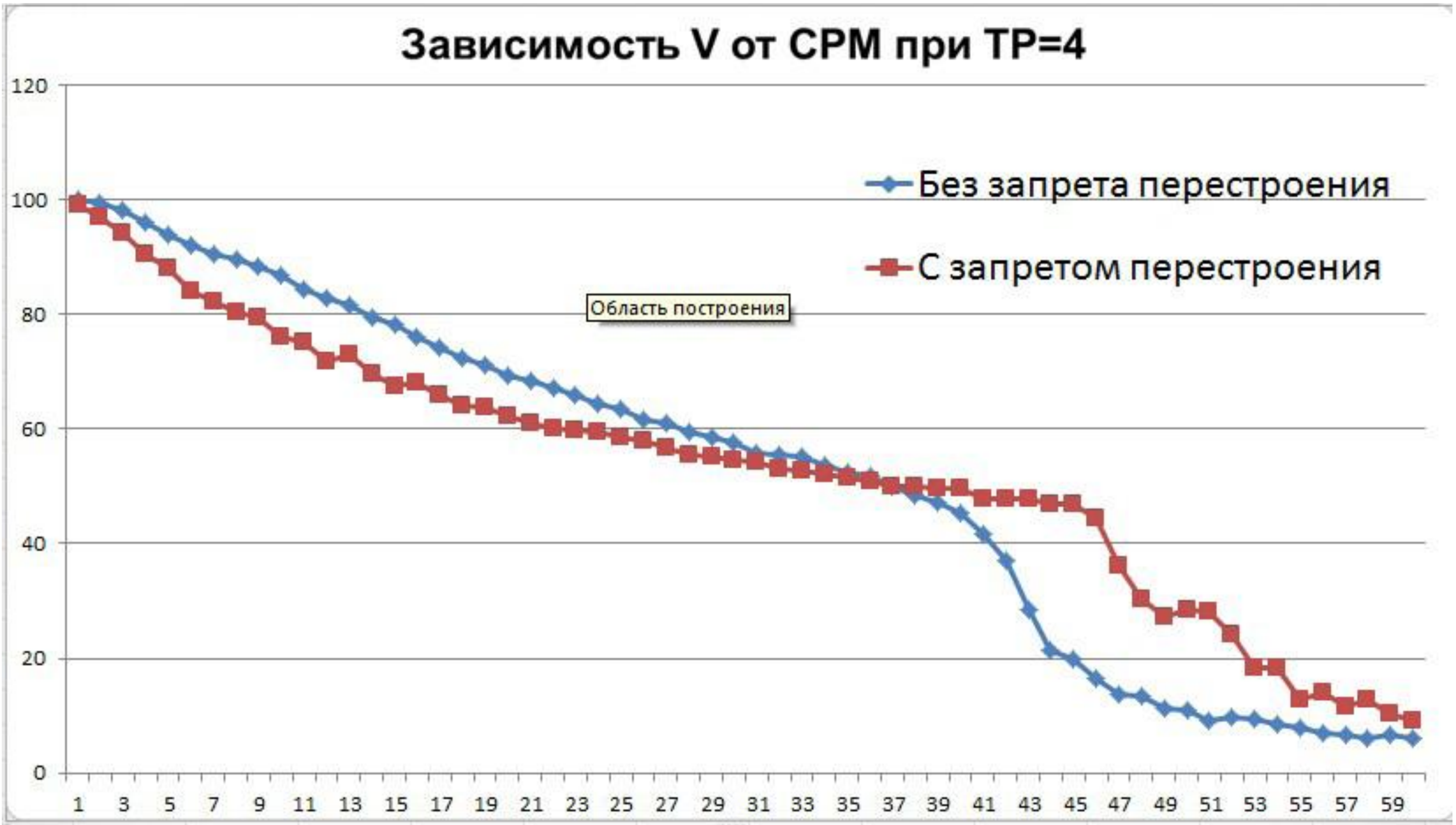
$$s_n''(t) = a_n \cdot \left[1 - \left(\frac{s_n'(t)}{V_n^0}\right)^{\delta} - \left(\frac{d_n^*\left(s_n'(t),\, s_{n+1}'(t) - s_n'(t)\right)}{s_{n+1}(t) - s_n(t)}\right)^2\right].$$

$$d_n^*\left(s_n'(t),\, s_{n+1}'(t) - s_n'(t)\right) = l + \tilde{\tau} s_n'(t) - \frac{s_n'(t)\left(s_{n+1}'(t) - s_n'(t)\right)}{2\sqrt{a_n b_n}}.$$

Эксперименты (Т.С. Бабичева)

Было обнаружено существование критической плотности (числа автомобилей на единицу длины дороги), начиная с которой имеет смысл запрещать любые перестроения с полосы на полосу вдалеке от перекрестков. Точнее говоря, до этого критического значения – возможность перестроения в целом выгодна, но выгода не очень большая; после критического значения происходит довольно резкое (по наклону) и большое (по амплитуде) ухудшение средней скорости по сравнению со случаем, когда перестроения запретили.

Эксперименты(Т.С. Бабичева)



Модель Лайтхилла–Уизема

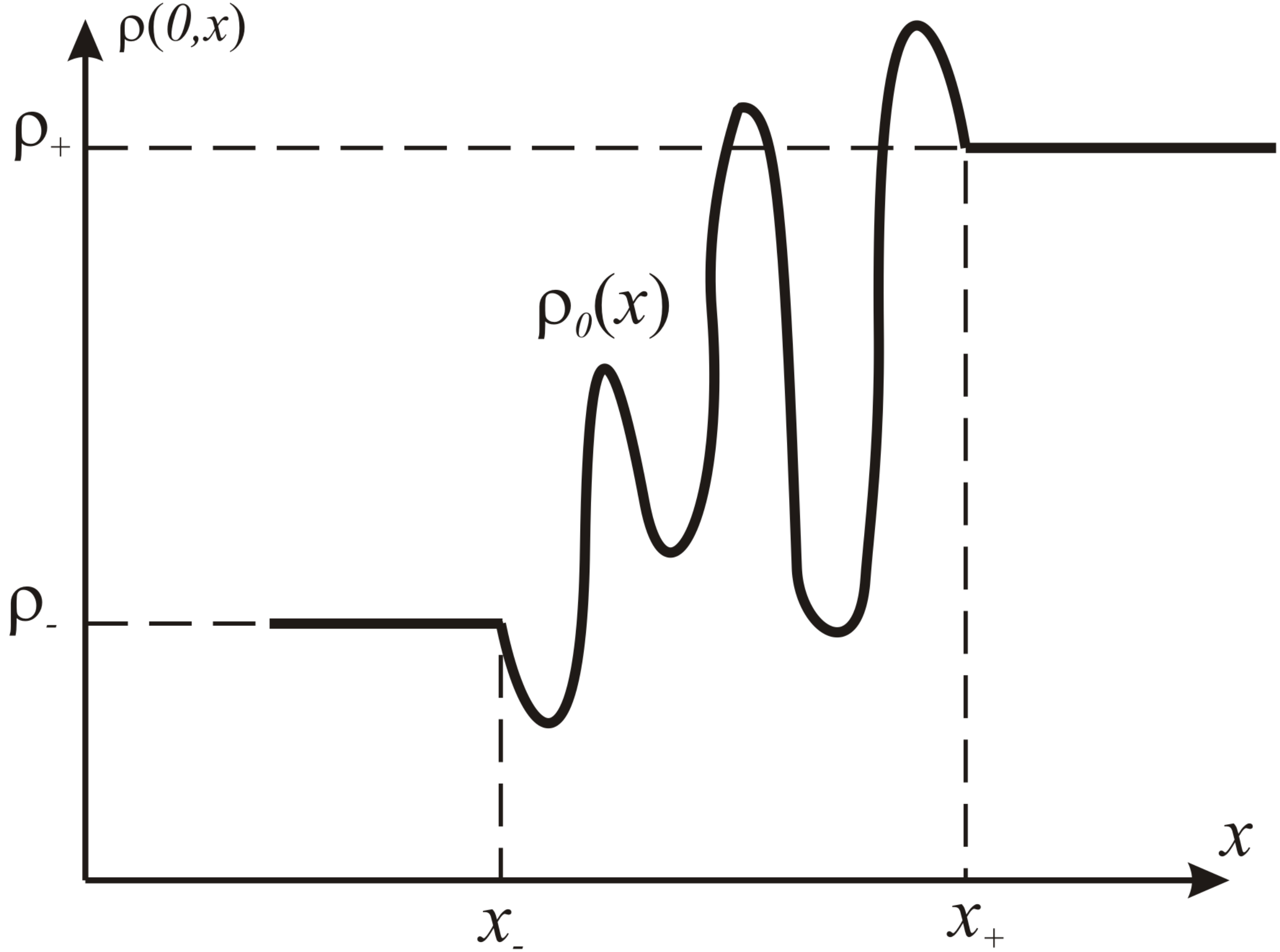
Закон сохранения автомобилей + уравнение состояния

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial Q(\rho)}{\partial x}=0}$$

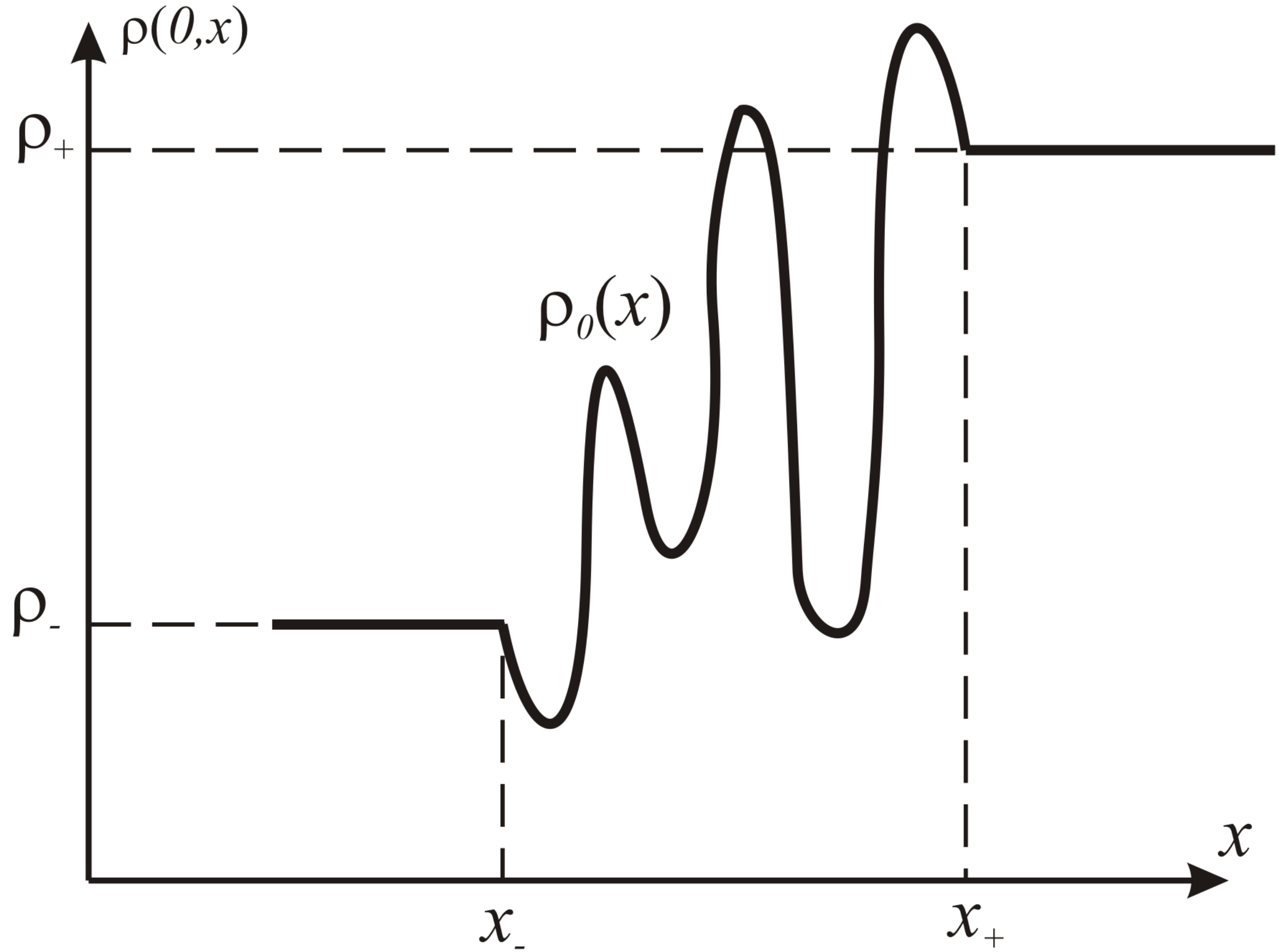
$$\rho(0,x)=\begin{cases}\rho_-, & x<x_-\\ \rho_0(x), & x_-\le x<x_+\\ \rho_+, & x\ge x_+\end{cases}$$

начальное условие типа Римана

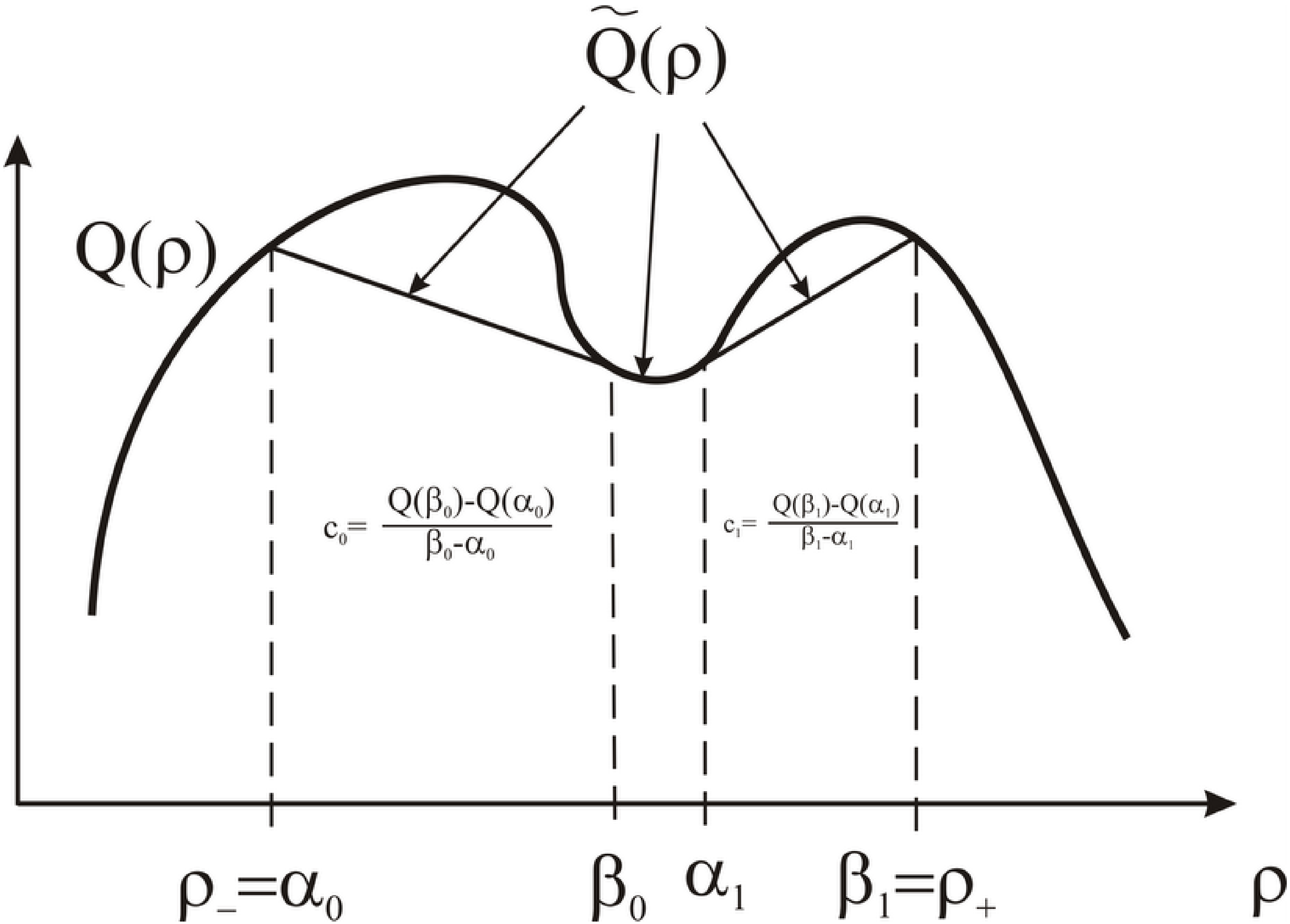
Начальное условие типа Римана



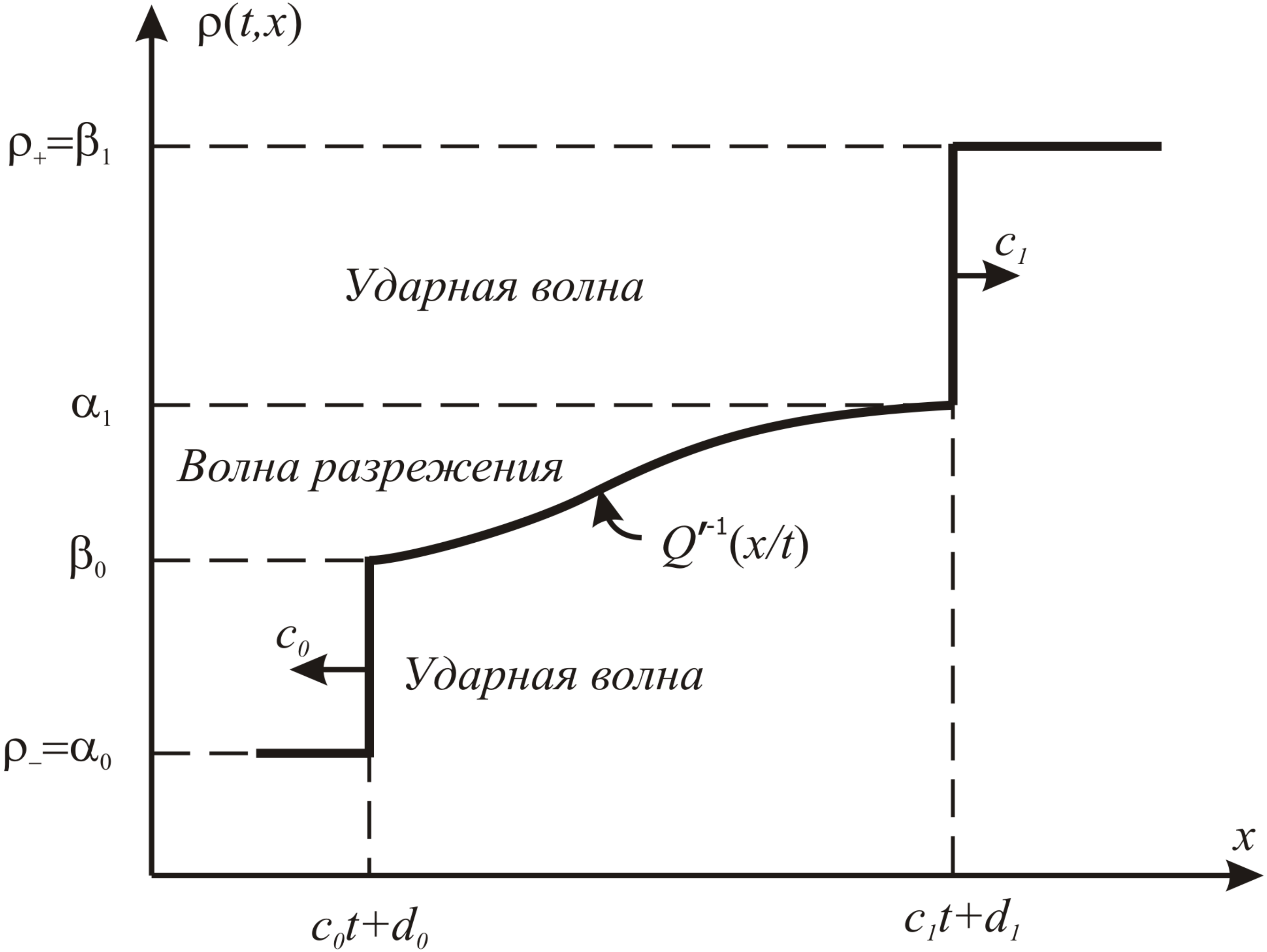
Начальное условие типа Римана



Ударные и бегущие волны



Решение И.М. Гельфанда (1958)



Задача о светофоре

В 1955 г М. Лайтхиллом и Дж. Уиземом была поставлена и решена следующая задача:

Найти такое число $k > 0$, *что перед светофором* (*работающим в двух режимах: зеленый и красный*) *не будет скапливаться очередь, если*

$$T_{зел}/T_{кр} \geq k.$$

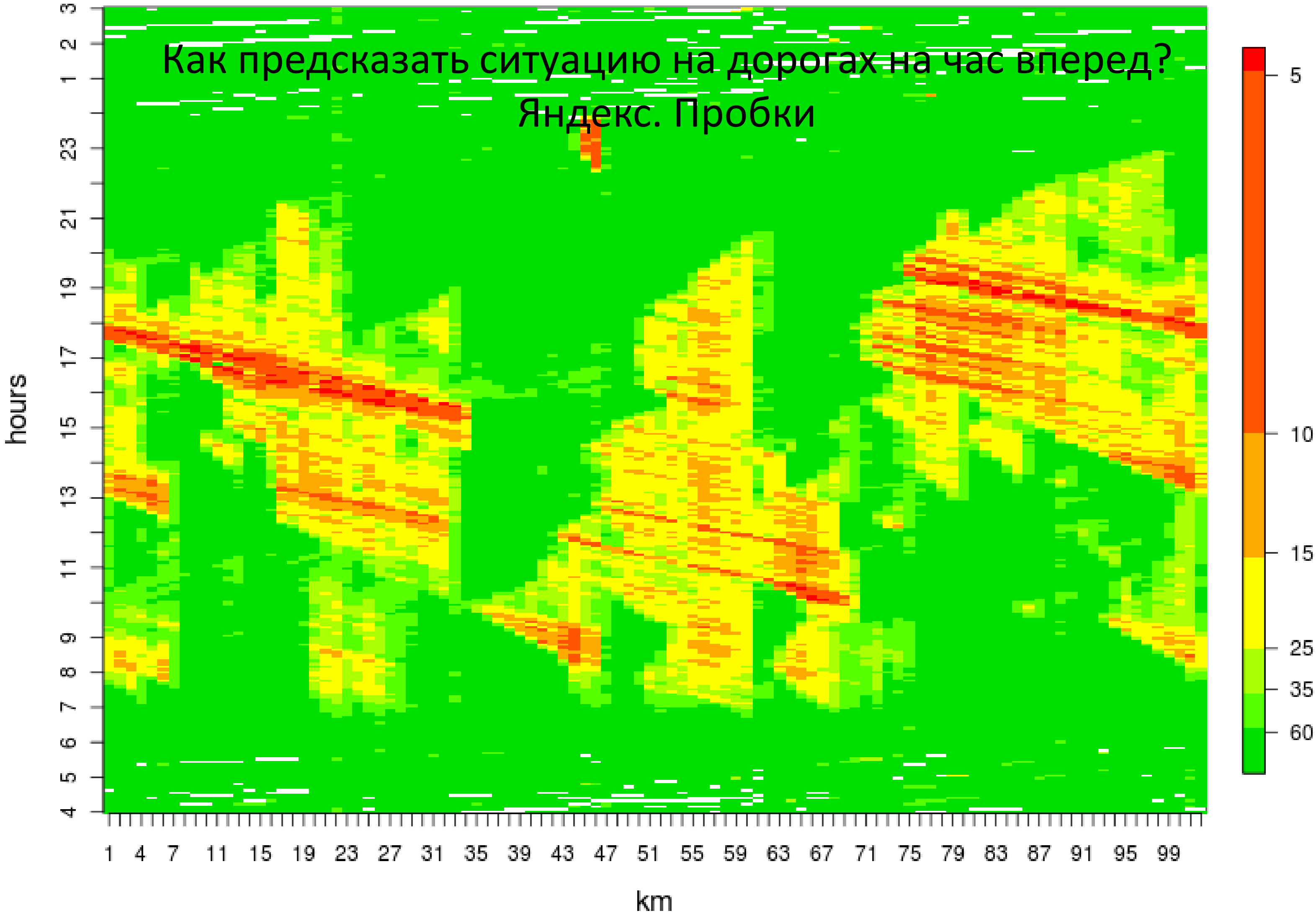
Считать, что транспортный поток вдали от светофора имеет плотность $\rho_i < \rho_m$ (*значение потока* q_i), *где* ρ_m – *плотность, при которой значение потока максимально* ($=q_m$).

Ответ:

$$k = \frac{q_i}{q_m - q_i}$$

Задача от Яндекс.Пробок

Один типичный будней день в жизни МКАД



Краткосрочное моделирование

Как предсказать ситуацию на дорогах на час вперед?

Путь $V(\rho)\tilde{\tau}$ (ρ – плотность авт/км), пройденный автомобилем за время $\tilde{\tau}$ (время реакции), не должен превышать расстояния до впереди идущего АТС $1/\rho - l$ (здесь l – длина автомобиля). Поэтому поведение потока (уравнение состояния) вблизи точки $\rho_{\max} \sim 1/l$ можно описать следующим образом:

$$V(\rho) = \frac{1/\rho - l}{\tilde{\tau}}.$$

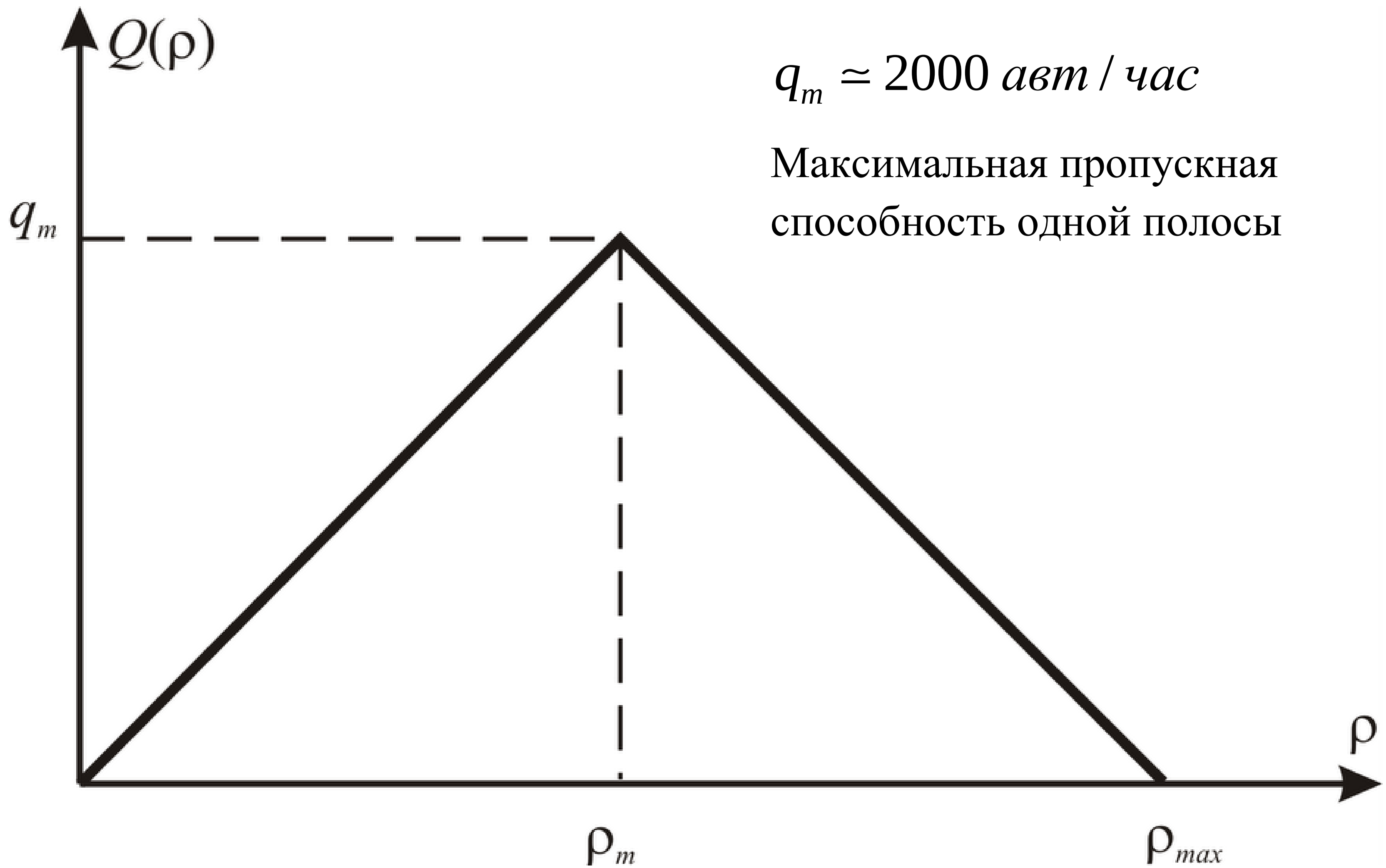
Откуда имеем в левой окрестности точки $\rho_{\max}$

$$Q(\rho) = V(\rho)\rho = -\frac{l}{\tilde{\tau}}(\rho - \rho_{\max}) \simeq -15\frac{км}{час}(\rho - \rho_{\max}).$$

(в старых обозначениях $Q \equiv f$)

Краткосрочное моделирование

Как предсказать ситуацию на дорогах на час вперед?



$q_m \simeq 2000$ *авт / час*

Максимальная пропускная способность одной полосы

Краткосрочное моделирование

Как предсказать ситуацию на дорогах на час вперед?

$$L_i \frac{d\rho_i}{dt} = \min\left\{ \sum_{j:\, j\to i} \beta_i^j \min\left\{\rho_j \mathrm{v}_j, Q_j^{\max}\right\}, \min\left\{\left(\rho_i^{\max} - \rho_i\right) w_i, Q_i^{\max}\right\} \right.$$

$$\left. - \sum_{k:\, i\to k} \beta_k^i \min\left\{\rho_i \mathrm{v}_i, Q_i^{\max}\right\} \cdot \min\left\{ 1, \frac{\min\left\{\left(\rho_k^{\max} - \rho_k\right) w_k, Q_k^{\max}\right\}}{\sum_{l:\, l\to k} \beta_k^l \min\left\{\rho_l \mathrm{v}_l, Q_l^{\max}\right\}} \right\} \right\},$$

здесь каждое ребро ориентированного графа транспортной сети пронумеровано, ρ_i – плотность потока на i-м ребре, β_i^j – доля потока АТС на ребре j, ответвляющаяся на ребро i. Обратим внимание, что в общем случае следует считать $\beta_i^j\left(t, \vec{\rho}\right)$. Причем если учитывать задержки в узлах графа транспортной сети, связанные, например, с наличием светофоров, то, вообще говоря, $\sum_{k:\, i\to k} \beta_k^i\left(t, \vec{\rho}\right) < 1$.

Краткосрочное моделирование

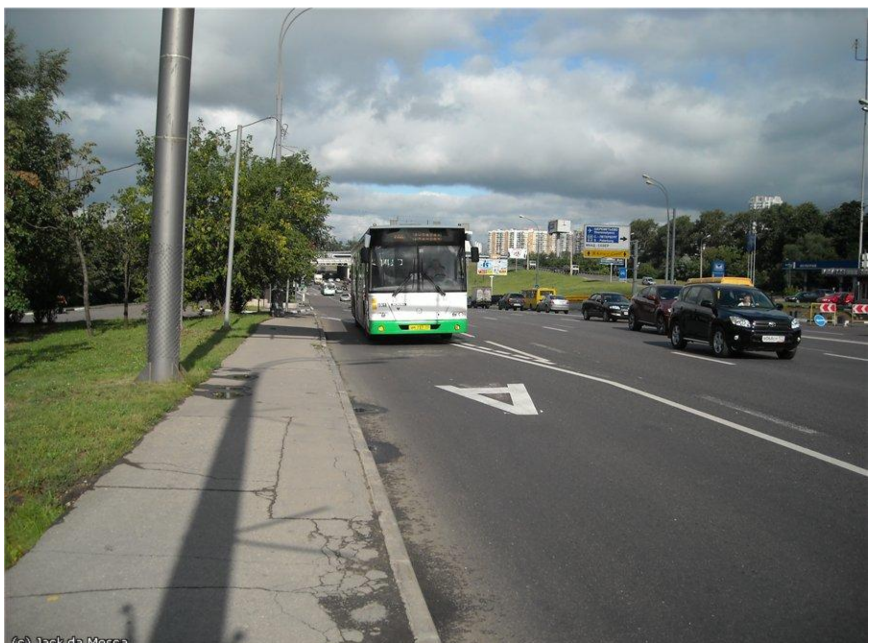
Как предсказать ситуацию на дорогах на час вперед?

Из неопубликованной части интервью газете “Поиск”.

– *Известно, что погоду более или менее достоверно можно предсказывать на 5 дней. А что насчет ситуации на дорогах?*
– Если исходить из данных, например, Яндекс.Пробки, то аналогом 5-и дней будет один час (максимум два часа). При этом для прогноза требуется наличие довольно большой исторической информации о ситуации на дорогах за несколько прошедших недель, а лучше месяцев, и довольно полное описание текущей ситуации на дорогах. При прогнозе используются как элементы математического моделирования, в котором распространение транспортного потока по городским артериям уподобляется течению некоторой сжимаемой неньютоновской жидкости типа крови, так и историческая информация (для постановки краевых условий), и информация о текущей ситуации на дорогах (для постановки начальных условий).

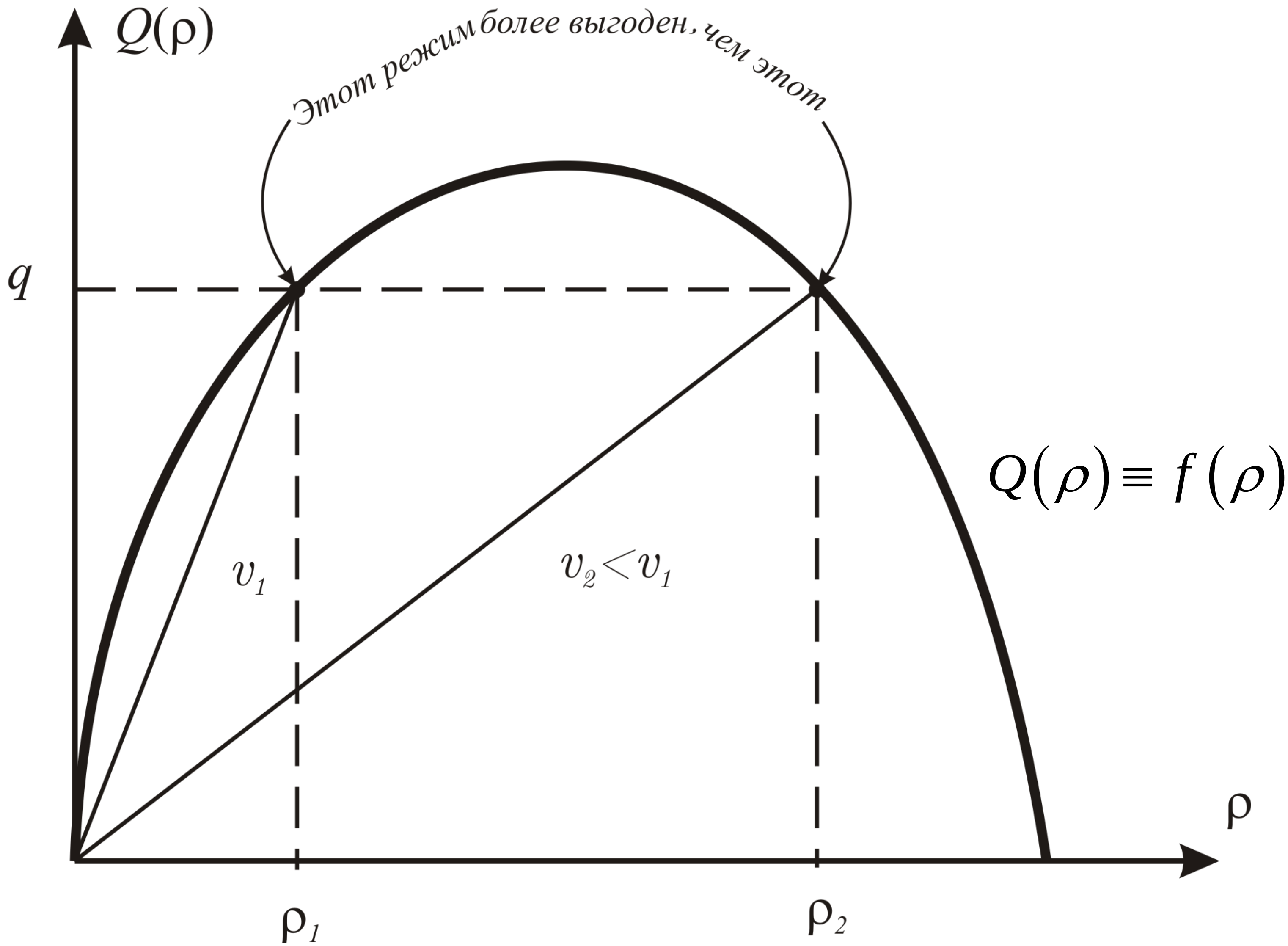
Краткосрочное моделирование

- **Как оптимально взимать платы за проезд, чтобы достичь системного оптимума?**
- **Где необходимо сделать реверсивные полосы и выделенные полосы для общественного транспорта?**
- **Как оптимально управлять светофорной сигнализацией и въездами на крупные магистрали?**



Фундаментальная диаграмма

Как оптимально управлять транспортными потоками?



Транспортные данные

Из неопубликованной части интервью газете “Поиск”.

– *Вы упомянули сервис Яндекс.Пробки, что Вы можете сказать о роли таких сервисов в решение проблемы пробок в Москве?*

– По-видимому, такие сервисы будут играть очень важную роль в плане сбора данных для моделирования. И будущее здесь может быть за операторами мобильной связи, которые обладают огромными массивами необходимой для моделирования транспортных потоков информации. Ведь сейчас, фактически, для калибровки той или иной модели Москвы во многом используются данные опросов респондентов, и в лучшем случае это десятки тысяч человек. Такие опросы стоят десятки миллионов рублей, а эффект от них не всегда очевиден. Представьте себе, что будет, если ту же (ну или даже более грубую) информацию удастся автоматически (практически бесплатно) собирать (в обезличенном агрегированном виде), но в масштабах миллионов респондентов. Кстати сказать, возвращаясь к Яндекс.Пробкам, по нашим прикидкам, если около 7% (и более) пользователей транспортной сети будут оставлять информацию о своих перемещениях, то Яндекс.Пробкам можно будет практически полностью довериться. Но для решения проблемы пробок в Москве одних данных будет не достаточно. Нужны некоторые политические решения (типа перехватывающих парковок, выделенных полос, платных дорог), и научная проработка возникающих больших задач, включающих в себя много блоков.

Транспортные данные

Из опубликованной части интервью газете “Поиск”.

– *Вы уже упоминали про данные операторов мобильной связи, а что еще на Ваш взгляд стоило бы еще сделать, чтобы транспортных данных стало больше и они стали доступнее?*
– Имеется острая необходимость в создании открытых источников транспортных данных, в которые аккумулируются (хранятся и накапливаются) разнообразные данные, необходимые для моделирования (расчета) транспортных потоков, с целью улучшения текущей ситуации. В том числе ГИС Москвы и области с указанием всевозможных дорог, числа полос, типов возможных маневров, светофоров и режимов их работы. Данные агломерационного характера о распределении мест жительства по территории Москвы и области, распределении мест работы, торговых центров и т.п. Обезличенные трековые данные (GPS и ГЛОНАСС треки – на их основе, например, работает служба Яндекс.Пробки), которые позволят рассчитывать матрицы перемешивания потоков на светофорах (это необходимо для оптимального управления светофорами), матрицу корреспонденций и равновесное распределение потоков (это необходимые атрибуты любой модели по расчету различных сценариев строительства новых дорог, введения платных дорог и выделенных полос). Данные о потоках и скоростях транспортного потока, необходимые для прогнозирования ситуации на дорогах, маршрутизации, управления светофорной сигнализацией. Агрегированные данные с видеокамер (то есть не сам видеоряд, а сухая информация о скоростях и потоках). В ряде стран и городов (например, в Калифорнии) такие информационные ресурсы созданы. Наличие таких информационных ресурсов, среди прочего, является одним из ключевых атрибутов участия разных коллективов ученых на конкурентной основе (исходя из общих для всех данных) в решении проблемы пробок в г. Москве.
Собираемую информацию необходимо делать открытой!

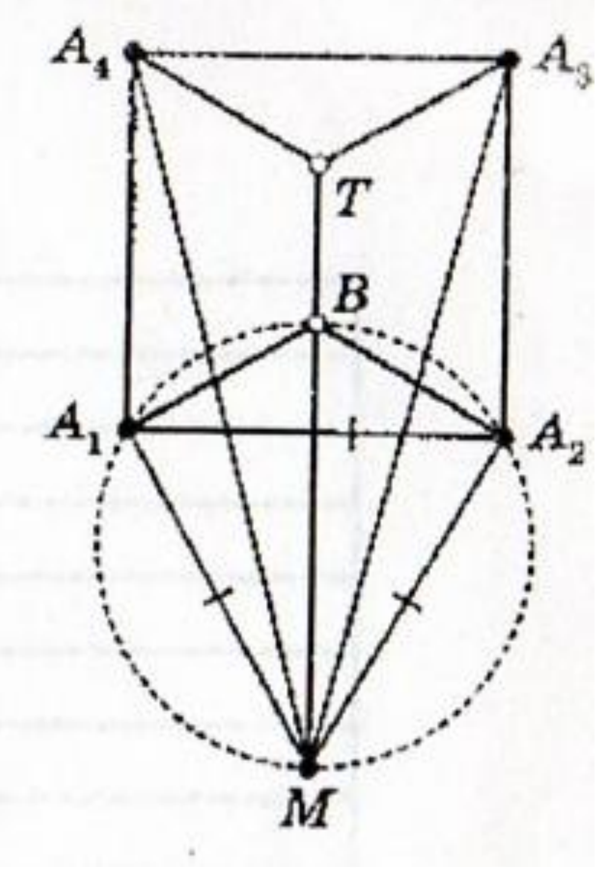
Транспортные данные

Интересная оценка

Для достаточно хорошей калибровки матрицы корреспонденций по энтропийной модели в городе с $m = 100$ районами, требуется опросить порядка $n = 80\,000$ человек. Точнее говоря,

$$P\left(\left\| \left\| \hat{d}_{ij} \right\| - \left\| d_{ij} \right\| \right\|_2 \geq 0.01 \right) \leq 0.01.$$

Задачи на графах
Пример построения дерева Штейнера



Спасибо за внимание!