Обобщение критериев k-сингулярности на булев случай

Дмитрий Кондрашкин

Введение

В работе рассмотрена задача о представлении булевой функции n переменных в виде суммы функций не более чем k переменных на заданном подмножестве точек булева куба B^n. Рассмотрены k-сингулярные системы точек булева куба (k-сингулярные системы точек были впервые введены в работе [2] для случая $\mathbb{R}^n$). Приведён геометрический критерий k-сингулярности, в связи с которым рассматриваются суммы булевых подкубов, здесь важную роль играют ортогональные пространства булевых векторов. Показано, что метрический критерий 1-сингулярности, верный для систем точек из $\mathbb{R}^n$, не верен в булевом случае.

Основные определения

Пусть в булевом кубе B^n задана система S из q попарно различных точек. Определим для неё характеристическую матрицу $\mathcal{H}$. Каждой точке $x = (x_1, \ldots, x_n) \in B^n$ можно поставить в соответствие характеристический вектор $h = \left(h_1^0, h_1^1, h_2^0, h_2^1, \ldots, h_n^0, h_n^1\right) \in B^{2n}$, где

$$h_i^\sigma = \begin{cases} 1, & x_i = \sigma, \\ 0, & x_i \neq \sigma. \end{cases}$$

Из характеристических векторов составим матрицу $\mathcal{H}$ размера $q \times 2n$. Заметим, что в ней могут быть нулевые и единичные столбцы, а также, что $(2i-1)$-й столбец является отрицанием $(2i)$-го столбца для $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Для заданной системы точек S определим булеву функцию $\chi(x_1, \ldots, x_n)$:

$$\chi(x_1, \ldots, x_n) = \chi(x) = \begin{cases} 1, & x \in S, \\ 0, & x \notin S, \end{cases}$$

т.е. множество единиц N_χ функции χ совпадает с множеством точек системы. Назовём эту функцию характеристической функцией системы S.

Определение 1. Суммой двух систем точек S_1 и S_2 назовём систему S такую, что $S = N_{\chi_1 \oplus \chi_2}$, где χ_1 и χ_2 — характеристические функции систем S_1 и S_2 соответственно.

Приведем несколько общих определений. Для матрицы H определим множество $U^k(H)$ — множество полиномов над столбцами матрицы H степени не выше k. Через $\mathcal{L}(H)$ обозначим линейное замыкание множества столбцов матрицы H. Очевидно, что $U^1(H) = \mathcal{L}(H)$. Под $\mathcal{L}^\perp(H)$ будем понимать ортогональное к $\mathcal{L}(H)$ пространство. Аналогичные определения получаются при замене матрицы H на множество векторов X.

Пространство $U^k(H)$ можно также определить как линейное замыкание всевозможных адамаровых произведений не более чем k столбцов матрицы H, каждое такое произведение является мономом над столбцами матрицы H степени не выше k. Очевидно, что размерность $\dim U^k(H)$ и есть размерность этого линейного замыкания.

k-сингулярные системы точек

Пусть задана система попарно различных точек S и матрица $\mathcal{H}$ — характеристическая матрица этой системы. Для удобства под $U^k(S)$ будем понимать $U^k(\mathcal{H})$.

Определение 2. Система точек S называется k-сингулярной если $\dim U^k(S) < q$.

Теорема 1. *Система точек S не является k-сингулярной тогда и только тогда, когда любая булева функция $f = f(x_1, \ldots, x_n)$, заданная на точках из S может быть представлена в виде конечной суммы функций от k переменных.*

Для доказательства теоремы требуется некоторая подготовка.

Выписав координаты точек системы по строкам получим матрицу H_0. Через N_0 обозначим матрицу, полученную выписыванием по строкам всех булевых наборов длины n (стандартная запись булева куба B^n). Очевидно, что матрица H_0 получается из матрицы N_0 вычеркиванием некоторых строк. Матрица H_0 также получается из характеристической матрицы $\mathcal{H}$, вычеркиванием каждого нечётного столбца.

Приписав к матрице H_0 столбец из одних единиц получим матрицу H. Тогда $\mathcal{L}(\mathcal{H}) = \mathcal{L}(H)$. Аналогично получим матрицу N из матрицы N_0.

Доказательство. Пусть система точек S не является k-сингулярной, т.е. $\dim U^k(S) = \dim U^k(H) = q$. Это означает, что любой q-мерный вектор можно представить в виде полинома степени не выше k от столбцов матрицы H. А следовательно в виде такого полинома можно представить и любую булеву функцию, так как любая булева функция задается вектором своих значений. Каждый моном в полученном полиноме также будет степени не выше k, следовательно он зависит не более чем от k переменных. Необходимость условия доказана.

Для доказательства достаточности заметим, что любая булева функция, зависящая не более чем от k переменных, может быть представлена в виде полинома степени не выше k. Следовательно, функцию представленную в виде суммы функций от k переменных, можно представить в виде полинома степени не выше k. Дальнейшие рассуждения очевидны. □

Теперь приведем геометрический критерий k-сингулярности системы S. Для этого сначала докажем вспомогательную лемму.

Лемма 1. $\mathcal{L}^{\perp}\left(U^k(N)\right) = U^{n-k-1}(N)$

Доказательство. Заметим, что произвольный моном степени меньше n — это булева функция с чётным числом единиц. Рассмотрим произвольные мономы $m_1 \in U^k(N)$ и $m_2 \in U^{n-k-1}(N)$, их степени удовлетворяют неравенствам:

$$\deg m_1 \leqslant k,$$
$$\deg m_2 \leqslant n-k-1.$$

Их произведение $m = m_1 \cdot m_2$ удовлетворяет следующему условию:

$$\deg m = \deg\left(m_1 \cdot m_2\right) \leqslant n-1 < n.$$

Следовательно у полученного монома m чётное число единиц, это означает, что скалярное произведение мономов m_1 и m_2 равно нулю. □

Теорема 2. *Система точек S является k-сингулярной тогда и только тогда, когда она содержит подмножество точек, представимое в виде суммы $(k+1)$-мерных подкубов.*

Доказательство. Система точек S является k-сингулярной тогда и только тогда, когда $\mathcal{L}^{\perp}\left(U^k(S)\right)$ содержит ненулевой вектор, т.е. тогда и только тогда, когда существует ненулевой вектор $l \in \mathcal{L}^{\perp}\left(U^k(N)\right)$, такой, что $\mathrm{Ind}(l) \subseteq I$. Здесь $\mathrm{Ind}(l)$ — номера ненулевых координат вектора l, I — номера точек системы S (полученные как десятичные значения булевых наборов).

Остаётся заметить, что в $U^k(N)$ базисом являются мономы степени не выше k, а в ортогональном пространстве $\mathcal{L}^{\perp}\left(U^k(N)\right)$ — мономы степени не выше $n-k-1$. Каждому моному степени не выше $n-k-1$ соответствует булев подкуб размерности не ниже $k+1$, а любой подкуб размерности выше $k+1$ можно представить в виде суммы подкубов размерности $k+1$.

Введенному выше вектору l соответствует некоторая сумма $(k+1)$-мерных подкубов, а условие $\mathrm{Ind}(l) \subseteq I$ гарантирует вложенность этой суммы в систему S. □

Приведем еще одну теорему, дающую достаточное условие 1-сингулярности.

Теорема 3. *Если система точек $S \subseteq B^n$ состоит из более чем $n+1$ точки, то она является 1-сингулярной.*

Доказательство. Для доказательства теоремы воспользуемся тем фактом, что $\mathcal{L}(\mathcal{H}) = \mathcal{L}(\mathcal{H}\mathcal{H}^T)$, а также формулой Бине-Коши для определителя произведения двух прямоугольных матриц.

В матрице $\mathcal{H}$ сумма i и $i+1$ столбцов для чётного i дает столбец из одних единиц, следовательно любые $n+2$ столбцов этой матрицы линейно зависимы (всего столбцов $2n$). Пусть $|S| = q$, воспользуемся формулой Бине-Коши, согласно которой определитель матрицы $\mathcal{H}\mathcal{H}^T$ равен сумме квадратов миноров порядка q матрицы $\mathcal{H}$. Как мы уже выяснили при $q > n+1$ каждый такой минор обращается в ноль, и тогда $\det \mathcal{H}\mathcal{H}^T = 0$. Воспользовавшись тем, что $\mathcal{L}(\mathcal{H}) = \mathcal{L}(\mathcal{H}\mathcal{H}^T)$ получим $\dim \mathcal{L}(\mathcal{H}) < q$, следовательно система 1-сингулярна. □

Метрические свойства

Метрические критерии описанные в работе [2] не обобщаются на булев случай.

Пример 1. Рассмотрим булев куб B^3. Пусть задана система точек $S = \{(100), (001), (010), (111)\}$. Она является 1-сингулярной в булевом смысле, и не является 1-сингулярной в $\mathbb{R}^n$. Действительно матрица попарных расстояний Хэмминга этой системы имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Она невырождена. Но данная система точек является суммой трех двумерных подкубов: $x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$.

Список литературы

[1] А.Г. Дьяконов. Критерии вырожденности матрицы попарных l_1-расстояний и их обобщения. *Изв. РАН. Сер. матем.*, 76:93–110, 2012.

[2] А.Г. Дьяконов. Раскраски бинарных матриц. 2011. `http://alexanderdyakonov.narod.ru/novmysldjakonov.pdf`.