УДК 519.816

Кузнецов М. П.

Московский физико-технический институт

Уточнение ранговых экспертных оценок с использованием монотонной интерполяции и конусов

Интегральным индикатором называется действительное число, поставленное в соответствие объекту. В данной работе описан способ построения интегральных индикаторов качества объектов с использованием экспертных оценок и измеряемых данных. Каждый объект описан набором признаков в линейных шкалах. Используются экспертные оценки качества объектов и важности признаков, которые выставлены в ранговых шкалах. Предложено два подхода к получению таких интегральных индикаторов, которые не противоречили бы экспертным оценкам. При первом подходе вектор экспертных оценок рассматривается как выпуклый многогранный конус. Для уточнения экспертных оценок минимизируется расстояние между векторами в конусах. При втором подходе используется задача монотонной интерполяции с гиперпараметром. Проведен вычислительный эксперимент на следующих данных: экспертами оценивался фактор экологического воздействия на окружающую среду хорватских электростанций. Проведена процедура уточнения экспертных оценок.

Ключевые слова: интегральный индикатор, экспертные оценки, монотонная интерполяция, ранговые шкалы.

Rank-scaled expert estimations specification using nearly-isotonic regression and cones

A real-valued scalar, which is corresponded to the object, is called an integral indicator. We describe a method of the integral indicators construction using expert estimations and measured data. Every object is described by the set of features int the linear scales. We use expert estimations of the objects quality and objects feature weights in the rank scales. We consider two approaches to construct the integral indicators which don’t contradict to the expert estimations.

Under the first approach, we consider a vector of the expert estimations as a convex cone. To specify expert estimations we minimize a distance between vectors in the cone. Under the second approach we use a problem of the nearly-isotonic regression. This methodology was used for the Thermal Croatian Power Plants evaluation which were estimated by an expert. The specification of the expert estimations was made.

Keywords: integral indicator, expert estimations, isotonic regression, rank scales.

Введение.

При решении задач управления возникает необходимость дать каждому объекту оценку его качества. Интегральный индикатор – это число, поставленное в соответствие объекту, и рассматриваемое как оценка его качества. Интегральными индикаторами называется вектор оценок, поставленный в соответствие набору объектов.

При построении интегральных индикаторов выбирается критерий качества объектов. Формируется набор объектов, сравнимых в контексте выбранного критерия. Формируется набор показателей, которые эксперты считают необходимыми для описания этого критерия. Составляется матрица «объекты-признаки». Значения показателей приводятся к единой шкале и соответствуют принципу «чем больше, тем лучше»: большему значению показателя (при прочих равных) соответствует большее значение индикатора.

Ранее было предложено несколько подходов к построению интегральных индикаторов [1, 2, 3]. Подход «без учителя» заключается в нахождении интегральных индикаторов с помощью описаний объектов и выбранного метода их построения. Например, таковым является построение интегрального индикатора методом главных компонент, согласно которому интегральный индикатор является проекцией векторов-описаний объектов на первую главную компоненту матрицы «объекты-признаки» [4, 5].

Подход «с учителем» использует кроме описаний объектов экспертные оценки качества объектов или оценки важности показателей и заключается в нахождении компромисса между этими оценками и вычисленными индикаторами. Ранее был предложен подход, в котором восстанавливается регрессия описаний объектов на экспертные оценки качества объектов [6, 7].

Данная работа посвящена уточнению экспертных оценок, выставленных в ранговых шкалах. Для построения интегральных индикаторов принимается линейная модель: строится линейная комбинация признаков с их весами. Вектор весов признаков и начальный интегральный индикатор выставляются экспертами в ранговой шкале. В общем случае, построенный по вектору весов интегральный индикатор не совпадает с индикатором, заданным экспертами, то есть экспертные данные противоречат друг другу. Данная работа посвящена устранению разногласия в оценках экспертов.

В работе будут рассмотрены два метода. Первый метод развивает идеи, описанные в [6]. Метод заключается в следующем: ранговые экспертные оценки весов показателей задают выпуклый многогранный конус. Матрица «объекты-признаки» задает линейное отображение этого конуса из пространства показателей в пространство интегральных индикаторов. Полученный в результате отображения конус может пересекаться с конусом, заданным ранговыми экспертными оценками интегрального индикатора. В этом случае, экспертные оценки показателей и объектов считаются непротиворечивыми, и отыскивается наиболее устойчивый интегральный индикатор. В противном случае, выполняется процедура рангового уточнения оценок.

Второй метод состоит в решении задачи монотонной интерполяции [8, 9, 10]. В общем случае, задача монотонной интерполяции, или так называемая «isotonic regression», решает задачу наилучшего приближения произвольной последовательности точек размера n линейного пространства монотонной последовательностью точек пространства. Метод согласования экспертных данных заключается в том, что отыскивается вектор с монотонной последовательностью координат, наиболее близкий к заданному экспертами. Введенный в модель гиперпараметр отдает предпочтение экспертным оценкам индикаторов или оценкам весов признаков.

Предложенные алгоритмы используются для оценивания хорватских электростанций [11]. Данные являются матрицей «объекты-признаки» и заданными экспертами векторами оценок интегрального индикатора и весов признаков. Оценивается производительность электростанций.

Экспертные оценки, заданные в ранговых шкалах.

Задана матрица описаний объектов $X = \{x_{ij}\}_{i=1,j=1}^{m,n}$. Вектор $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, ..., x_{in})$ – описание i – го объекта.

Интегральный индикатор – линейная комбинация вида

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} w_j g_j(x_{ij}),$$

где g_j – функция приведения показателей в единую шкалу, например:

$$g_j : x_{ij} \mapsto (-1)^{\zeta_j} \frac{x_{ij} - \min\limits_i x_{ij}}{\max\limits_i x_{ij} - \min\limits_i x_{ij}} + \zeta_j. \qquad (1)$$

Параметр ζ_j назначается равным 1, если оптимальное значение показателя минимально, и 0 иначе. Если знаменатель дроби 1 равен нулю для некоторых значений индекса j, то соответствующий признак исключается из дальнейшего рассмотрения. Будем обозначать теперь за X приведенную таким способом матрицу «объекты-признаки». Таким образом,

$$\mathbf{y} = X\mathbf{w}.$$

Заданы в ранговых шкалах экспертные оценки: $\mathbf{y}_0, \mathbf{w}_0$, допускающие произвольные монотонные преобразования. Пусть на наборах экспертных оценок введено отношение порядка такое, что

$$y_1 \geq y_2 \geq ... \geq y_m \geq 0; \; w_1 \geq w_2 \geq ... \geq w_n \geq 0.$$

Множество всех таких векторов задается системой линейных неравенств

$$J\mathbf{y} \geq 0,$$

где

$$
\underset{m\times m}{J} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.
$$

Если же порядок $y_{i_1} \ge y_{i_2} \ge y_{i_m} \ge 0$ произвольный, то матрица системы будет получается из J перестановкой соответствующих столбцов.

Таким образом, заданным $\mathbf{y}_0$ и $\mathbf{w}_0$ можно поставить в соответствие матрицы J_m и J_n размеров соответственно $m\times m$ и $n\times n$.

Решение задачи согласования экспертных оценок с использованием конусов.

В этом параграфе опишем метод согласования экспертных оценок, предложенный в [6]. Дадим некоторые определения.

Определение 1**.** Множество точек Y в R^m называется конусом, если для любой точки $y \in \mathsf{Y}$ точка λy также принадлежит Y.

Определение 2. Выпуклый многогранный конус с вершиной в начале координат – это область решений системы однородных неравенств:

$$
\begin{cases} a_{11}w_1 & + & a_{12}w_2 & + & \ldots & + & a_{1n}w_n & & 0, \\ a_{21}w_1 & + & a_{22}w_2 & + & \ldots & + & a_{2n}w_n & & 0, \\ \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots \\ a_{m1}w_1 & + & a_{m2}w_2 & + & \ldots & + & a_{mn}w_n & & 0. \end{cases}
$$

Эта система линейных неравенств задает в соответствующем пространстве выпуклый многогранный конус. Соответствуя данному определению, определим Y – конус, задаваемый матрицей J_m в пространстве интегральных индикаторов; W – конус, задаваемый матрицей J_n в пространстве весов признаков. Эти конусы характеризуются тем, что векторы внутри каждого из них имеют одинаковый ранговый порядок.

Поскольку A – линейное преобразование, оно переводит конус W в конус $A\mathsf{W}$, который лежит в пространстве интегральных индикаторов.

Задача 1. Требуется найти в конусах W и Y векторы $\mathbf{w}$ и $\mathbf{y}$, такие, что:

$$(\mathbf{y}_1, \mathbf{w}_1) = \min_{\mathbf{y}\in\mathsf{Y}, \mathbf{w}\in\mathsf{W}} \| \mathbf{y} - A\mathbf{w} \|,$$

$$\text{при } \| A\mathbf{w} \| = 1, \| \mathbf{y} \| = 1,$$

где $\| . \|$ – евклидова метрика в пространстве R^m.

Таким образом, отыскивается вектор весов $\mathbf{w}_1$, элементы которого имеют такой же ранговый порядок, что и $\mathbf{w}_0$. При этом приведенный в ранговую шкалу индикатор $A\mathbf{w}_1$ является ближайшим к $\mathbf{y}_0$.

В случае непустого пересечения конусов Y и $A\mathsf{W}$ решение задачи 1 дает вектор $\mathbf{y}$, который лежит в пересечении этих конусов. Если пересечение – пустое, предлагается найти ближайшие друг к другу лучи на ребрах или гранях конусов.

Отыскиваемая пара $(\mathbf{y}_1, \mathbf{w}_1)$ должна выполнять следующие условия:

$$\begin{array}{lll} \textit{minimize} & \| \mathbf{y} - A\mathbf{w} \| & \\ \textit{subject to} & \mathbf{y}^T \mathbf{y} = 1, & (A\mathbf{w})^T A\mathbf{w} = 1, \\ & J_n \mathbf{w} \mathbf{0}, & J_m \mathbf{y} \mathbf{0}. \end{array}$$

Постановка задачи согласования экспертных оценок с использованием монотонной интерполяции.

В данном параграфе рассмотрим новый метод согласования экспертных оценок. Пусть $\mathbf{y}_0$ – заданное экспертами начальное приближение вектора $\mathbf{y}$. Вектор, наиболее близкий в пространстве весов признаков к $\mathbf{y}_0$, в смысле наименьших квадратов:

$$\hat{\mathbf{w}} = X^{+} \mathbf{y}_0, \text{ где}$$

$$X^{+} = (X^T X)^{-1} X^T.$$

Задача 2. Требуется найти такую монотонную последовательность $w_1,\ldots,w_n$, что она лучше всего приближает вектор $\mathbf{w}$ в смысле среднего квадрата ошибки:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{w}} = \arg\min\limits_{w\in\mathbb{R}^n} \sum\limits_{j=1}^{n} (w_j - w_j)^2, \\ w_1,\ldots,w_n. \end{cases}$$

Такую задачу можно решить, например, методом, описанным в [8]. Однако, чтобы получить согласованные экспертные оценки, введем в модель гиперпараметр. С его помощью мы сможем варьировать нашу «степень доверия» от экспертных оценок весов признаков (то есть, монотонной последовательности $w_1,\ldots, w_n$) к экспертным оценкам интегральных индикаторов (вектору $\hat{\mathbf{w}}$).

Задача 3. Требуется найти такой вектор $\hat{\mathbf{w}}$, что:

$$\hat{\mathbf{w}} = \arg\min_{\mathbf{w}\in\mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} (\hat{w}_j - w_j)^2 + \lambda \sum_{j=1}^{n-1} (w_j - w_{j+1})_+ \right). \qquad (2)$$

Решение задачи монотонной интерполяции с гиперпараметром.

Для решения этой задачи воспользуемся идеями, описанными в [10].

Утверждение 1. Пусть, для некоторого λ_0, совпадают две соседние координаты оценки: $\hat{w}_j(\lambda_0) = \hat{w}_{j+1}(\lambda_0)$. Тогда $\hat{w}_j(\lambda) = \hat{w}_{j+1}(\lambda)$ для всех $\lambda > \lambda_0$.

Пусть при некотором λ совпадают некоторые соседние координаты вектора $\mathbf{w}$, и всего таких множеств совпадающих координат – K_λ. Обозначим за $A_1,\ldots,A_{K_\lambda}$ сами эти множества. Заметим, что $A_1 \cup \ldots \cup A_{K_\lambda} = \{1,\ldots,n\}$. Тогда функция потерь для задачи (2) перепишется в виде

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{K_\lambda}\sum_{l\in A_k}(\hat{w}_l - w_{A_k})^2 + \lambda\sum_{k=1}^{K_\lambda}(w_{A_k} - w_{A_{k+1}})_+ .$$

Продифференцируем ее по всем w_{A_k} :

$$-\sum_{l\in A_k}\hat{w}_l + |A_k|\,\hat{w}_{A_k}(\lambda) + \lambda(s_k - s_{k-1}) = 0$$

для $k = 1,..., K_\lambda$,

где $s_k = 1$ при $\hat{w}_{A_k}(\lambda) - \hat{w}_{A_{k+1}}(\lambda) > 0$, и $s_k = 0$ иначе.

Пусть все $A_1,..., A_{K_\lambda}$ не изменяются с увеличением λ. Тогда:

$$\frac{d\,\hat{w}_{A_k}(\lambda)}{d\lambda} = \frac{s_{k-1} - s_k}{|A_k|}.$$

Когда λ увеличивается, множества A_k меняются. Однако, согласно утв. 1, они могут только объединяться, то есть, величины компонент $\hat{w}_{A_k}(\lambda)$ внутри каждого множества A_k остаются равными. Можно посчитать величину следующего λ, при котором будут объединяться множества A_k, A_{k+1}. Обозначим это λ как $t_{k,k+1}$.

Утверждение 2. Множества A_k и A_{k+1} будут объединяться при

$$t_{k,k+1} = \frac{\hat{w}_{A_{k+1}}(\lambda) - \hat{w}_{A_k}(\lambda)}{D_k - D_{k+1}} + \lambda,$$

для всех $k = 1,.., K_\lambda - 1$, где

$$D_k = \frac{d\,\hat{w}_{A_k}(\lambda)}{d\lambda}.$$

Доказательство. Поскольку производные

$$\frac{d\,\hat{w}_{A_k}(\lambda)}{d\lambda}$$

не являются функциями λ, можно записать следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \hat{w}_{A_k}(\lambda) = \lambda D_k + C_k, \\ \hat{w}_{A_{k+1}}(\lambda,) = \lambda D_{k+1} + C_{k+1}. \end{cases}$$

В точке $t_{k,k+1}$ происходит объединение множеств A_k и A_{k+1}, то есть:

$$\hat{w}_{A_k}(t_{k,k+1}) = \hat{w}_{A_{k+1}}(t_{k,k+1}), \text{ следовательно,}$$

$$t_{k,k+1} = \frac{C_{k+1} - C_k}{D_k - D_{k+1}} = \frac{(\hat{w}_{A_{k+1}}(\lambda) - \lambda D_{k+1}) - (\hat{w}_{A_k}(\lambda) - \lambda D_k)}{D_k - D_{k+1}} =$$

$$= \frac{\hat{w}_{A_{k+1}}(\lambda) - \hat{w}_{A_k}(\lambda)}{D_k - D_{k+1}} + \lambda.$$

Таким образом, на каждой итерации нужно вычислять величину

$$\hat{\lambda} = \min_{k: t_{k,k+1} > \lambda} t_{k,k+1}$$

и объединять множества $A_{k'}$ и $A_{k'+1}$, где

$$k' = \arg \min_{k: t_{k,k+1} > \lambda} t_{k,k+1}. \quad (3)$$

Алгоритм решения.

Вход: $\lambda = 0, K_\lambda = n, A_k = \{k\}, \hat{w}_{A_k}(\lambda) = \hat{w}_k$.

1: Повторять:

2: $D_k := \dfrac{s_{k-1} - s_k}{|A_k|}$

3: $t_{k,k+1} := \dfrac{\hat{w}_{A_{k+1}}(\lambda) - \hat{w}_{A_k}(\lambda)}{D_k - D_{k+1}} + \lambda$

4: $\hat{\lambda} := \min_{k:t_{k,k+1} > \lambda} t_{k,k+1}$

5: $\hat{w}_{A_k}(\lambda) := \hat{w}_{A_k}(\lambda) + D_k(\hat{\lambda} - \lambda)$

6: объединить $A_{k'}$ и $A_{k'+1}$, см. 3.

7: $\lambda := \hat{\lambda}$

8: **пока** существует $k: t_{k,k+1} \geq \lambda$

Результат работы алгоритма монотонной интерполяции.

Проиллюстрируем работу алгоритма решения задачи монотонной интерполяции на модельной выборке, порожденной с помощью функции $y_i = x_i + \varepsilon_i$, $\varepsilon_i : \mathrm{N}(0,20)$. Ломаная линия на рис. 1 – восстановленная зависимость, для различных значений регуляризатора. Видно, что при $\lambda = 100$ и более функция, восстанавливающая зависимость, монотонная.

Вычислительный эксперимент

Был проведен вычислительный эксперимент уточнения экспертных оценок экологического воздействия на окружающую среду хорватских электростанций. Для этого были собраны следующие данные: матрица «объекты-признаки», где объекты – это семь электростанций, описываемых 11-ю признаками, экспертные оценки весов показателей и интегральных индикаторов электростанций. На рис. 2 показана часть этих данных: семь электростанций и шесть из 11 признаков.

Несмотря на то, что экспертные оценки не являются согласованными (рис. 2a и рис. 2d), по некоторым объектам можно выявить схожесть предпочтений. Например, и на рис. 1a, и на рис. 1d лучшим является объект 5; объект 6 всегда лучше объектов 1, 3 и 4; объект 1 всегда хуже объектов 2, 5, 6 и 7. Предложенные алгоритмы работают корректно, в том смысле, что они оставляют согласованными предпочтения экспертов: на всех рис. 2b, рис. 2e, рис. 2c , рис. 2f выполнены вышеописанные утверждения.

Из рис. 2b и рис. 2e видно, что алгоритмы поиска ближайших векторов в конусах сработали похожим образом.

На рис. 2c изображены интегральные индикаторы для $\lambda = 1$, то есть, когда в задаче 2 мы отдаем предпочтение экспертным оценкам весов. Видно, что интегральные индикаторы на рис. 2c похожи, соответственно, на интегральные индикаторы на рис. 2d.

Заключение.

В работе рассматривалась задача получения согласованных оценок качества объектов и важности показателей. В результате выполнения работы обобщены ранее полученные результаты по согласованию экспертных оценок с использованием конусов. Предложено использовать алгоритм монотонной интерполяции для уточнения экспертных оценок. Исследованы свойства этого алгоритма при различном значении гиперпараметра, введенного в модель. Проведен вычислительный эксперимент уточнения экспертных оценок качества хорватских электростанций, составлен рейтинг электростанций, основанный на оценках экспертов и измеряемых данных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Подиновский В.В.* Многокритериальные задачи с упорядоченными по важности критериями // Автоматика и телемеханика. – 1976. – С. 118–127.
2. *Ларичев О. И., Мошкович Е. М.* Качественные методы принятия решений. – М.: Физматлит, 1996.
3. *Marquardt D. W.* Generalized inverses, ridge regression, biased linear estimation,and nonlinear estimation // Technometrics. – 1996. – P. 605–607.
4. *Jolliffe I. T.* Principal Component Analysis // Springer. – 2002.

5. *Isenmann A. J.* Modern multivariate statistical techniques // Springer. – 2008.

6. *Стрижов В. В.* Уточнение экспертных оценок с помощью измеряемых данных // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. – 2006. – С. 59–64.

7. *Strijov V., Granic′ G. et al.* Integral indicator of ecological impact of the Croatian thermal power plants // Energy. – July 2011. – V. 36. – P. 4144-4149.

8. *J. de Leeuw, Hornik K., Mair P.* Isotone Optimization in R: Pool-Adjacent-Violators Algorithm (PAVA) and Active Set Methods // Jounal of Statistic Software. – 2009. – V. 29.

9. *Barlow R. E., Brunk H. D.* The Isotonic Regression Problem and Its Dual // Journal of American Statistical Association. – 1972. – V. 67, – P. 140-147.

10. *Tibshiran R. J., Hoefling H., Tibshirani R.* Nearly-Isotonic Regression // Technometrics. – 2011. – V. 53.

11. *Kos R., Krisi Z., Tarnik T.* Hrvatska elektoprivreda and the environment 2005-2006 // Zagreb, Hrvatska Elektroprivreda. – 2008.

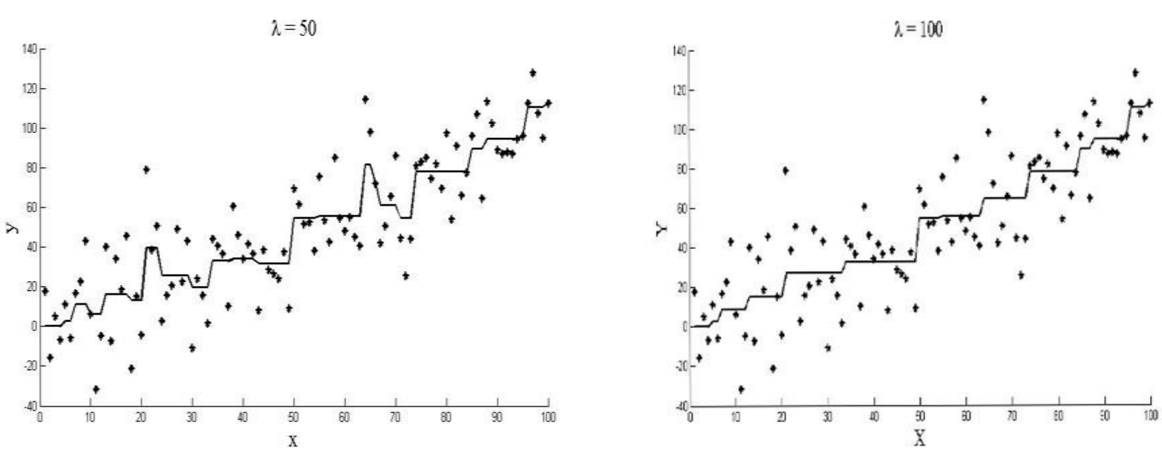

Рис. 1: Монотонная интерполяция

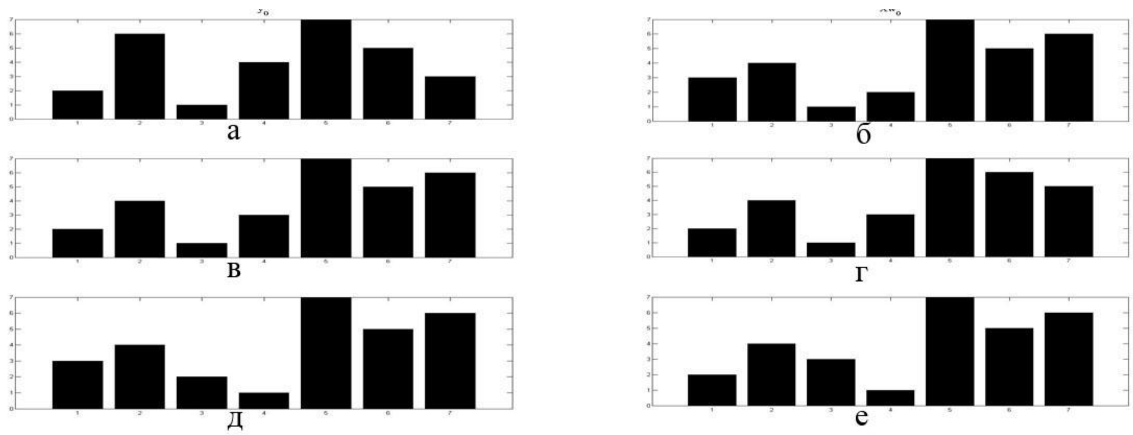

Рис. 2: Интегральные индикаторы электростанций, вычисленные различными алгоритмами. «a»: начальный интегральный индикатор $\mathbf{q}_0$. «d»: интегральный индикатор, построенный по $\mathbf{w}_0$. «b»: интегральный индикатор, построенный алгоритмом минимизации расстояния между векторами в конусах. «e»: интегральный индикатор, построенный алгоритмом максимизации корреляции между векторами в конусах. «c»: интегральный индикатор, построенный алгоритмом монотонной интерполяции со значением гиперпараметра $\lambda = 1$. «f»: интегральный индикатор, построенный алгоритмом монотонной интерполяции со значением гиперпараметра $\lambda = 0.5$.

N	Power Plant	Available net capacity (MW)	Electricity (GWh)	Heat (TJ)	SO_2 (t)	NO_x (t)	Particles (t)
1	Plomin 1 TPP	98	452	0	1950	1378	140
2	Plomin 2 TPP	192	1576	0	581	1434	60
3	Rijeka TPP	303	825	0	6392	1240	171
4	Sisak TPP	396	741	0	3592	1049	255
5	TE-TO Zagreb CHP	337	1374	481	2829	705	25
6	EL-TO Zagreb CHP	90	333	332	1259	900	19
7	TE-TO Osijek CHP	42	114	115	1062	320	35
	Optimal value	max	max	max	min	min	min

Рис. 3: Электростанции