

Задача

Повысить качество прогноза временного ряда путем учета экзогенных факторов. Установить связи между временными рядами, с целью их включения в прогностическую модель.

Предлагается

Использовать метод сходящегося перекрестного отображения (ССМ). Считается, что два ряда связаны, если существуют их траекторные подпространства, проекции в которые связаны.

Решение

Проекции связаны, если окрестность фазовой траектории одного ряда отображается в окрестность фазовой траектории другого ряда. Отыскать траекторные подпространства, обнаруживающие эту связь.

- Sugihara G., May R., Ye H., Hsieh C., Deyle E., Fogarty M., and Munch S // Detecting causality in complex ecosystems. 2012.
- Sugihara G., May R. Nonlinear forecasting as a way of distinguishing chaos from measurement error in time series // Nature. 1990.
- Motrenko A. and Strijov V. Extracting fundamental periods to segment biomedical signals. 2015.
- Golyandina N. and Stepanov D. SSA-based approaches to analysis and forecast of multidimensional time series // 5th St. Petersburg workshop on simulation. 2005.

Постановка задачи обнаружения связи

Для временных рядов $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_N]$ и $\mathbf{y} = [y_1, \dots, y_N]$ установить наличие связи между ними.

Решение

Считаем, что ряд \mathbf{y} зависит от ряда \mathbf{x} , если существует липшицево отображение $\varphi : \mathbb{H}_x \rightarrow \mathbb{H}_y$:

$$\rho_{\mathbb{H}_y}(\varphi(\mathbf{x}_i), \varphi(\mathbf{x}_j)) \leq L \cdot \rho_{\mathbb{H}_x}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j), \quad \text{для } \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \in \mathbb{H}_x.$$

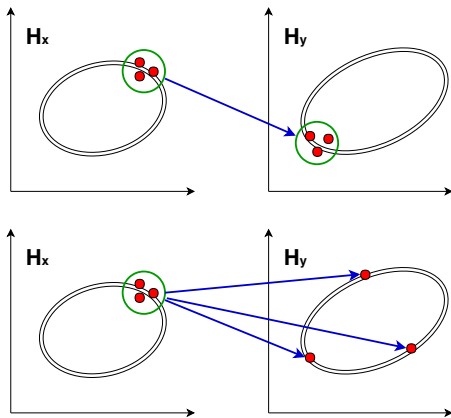
Траекторная матрица:

$$\mathbf{H}_x = \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_{L-1} & x_L \\ x_2 & \dots & x_L & x_{L+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{N-L+1} & \dots & x_{N-1} & x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_L \\ \mathbf{x}_{L+1} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_N \end{bmatrix},$$

где L – ширина окна, $\mathbf{x}_i = [x_{i-L+1}, \dots, x_{i-1}, x_i] \in \mathbb{H}_x$,
 \mathbb{H}_x – траекторное пространство.

Построение сходящегося перекрестного отображения

- Выбираем $\mathbf{x}_{t^*} = [x_{t^*-L+1}, \dots, x_{t^*-1}, x_{t^*}]$.
- Пусть $\mathbf{x}_{t_1}, \dots, \mathbf{x}_{t_k}$ – k ближайших соседей вектора \mathbf{x}_{t^*} в пространстве \mathbb{H}_x . Тогда $\mathbf{y}_{t^*}, \mathbf{y}_{t_1}, \dots, \mathbf{y}_{t_k}$ – строки матрицы \mathbf{H}_y , соответствующие индексам t_1, \dots, t_k .



Анализ собственных подпространств

- Построим сингулярное разложение траекторной матрицы $\mathbf{H}_x = \mathbf{U}_x \mathbf{\Lambda}_x \mathbf{V}_x$.
- Выберем \mathcal{T}_x – некоторый набор индексов компонент ряда \mathbf{x}
- Построим $\mathbb{H}_{\mathcal{T}_x} \subset \mathbb{H}_x$ – траекторное подпространство
- Проекция ряда \mathbf{x} в подпространство $\mathbb{H}_{\mathcal{T}_x}$, описывается траекторной матрицей $\mathbf{P}_{\mathcal{T}_x} = \mathbf{U}_x \tilde{\mathbf{\Lambda}}_x \mathbf{V}_x$.

Задача поиска подпространств $\mathbb{H}_{\mathcal{T}_x}$ и $\mathbb{H}_{\mathcal{T}_y}$ эквивалентна поиску номеров главных компонент $(\mathcal{T}_x, \mathcal{T}_y)$

$$S(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathcal{T}_x, \mathcal{T}_y) = \frac{\text{dist}(\mathbf{x}, \mathcal{T}_x)}{\text{dist}(\mathbf{y}, \mathcal{T}_y)} \cdot \frac{|\mathcal{T}_y|}{|\mathcal{T}_x|}, \quad \text{dist}(\mathbf{x}, \mathcal{T}_x) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \|\mathbf{x}_{t^*} - \mathbf{x}_{t_i}\|_2$$

$$(\mathcal{T}_x, \mathcal{T}_y) = \arg \max_{\mathcal{T}_x, \mathcal{T}_y} S(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathcal{T}_x, \mathcal{T}_y)$$

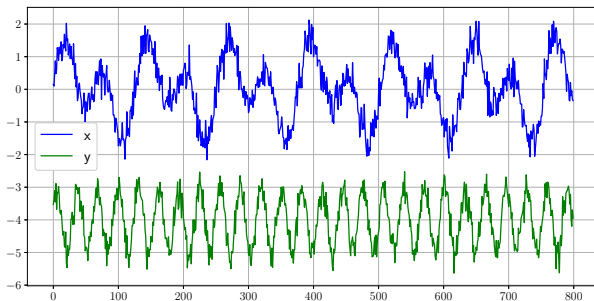
Если $S(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathcal{T}_x, \mathcal{T}_y)$ больше некоторого порога s , то ряд \mathbf{y} зависит от ряда \mathbf{x} .

Эксперимент на искусственных данных

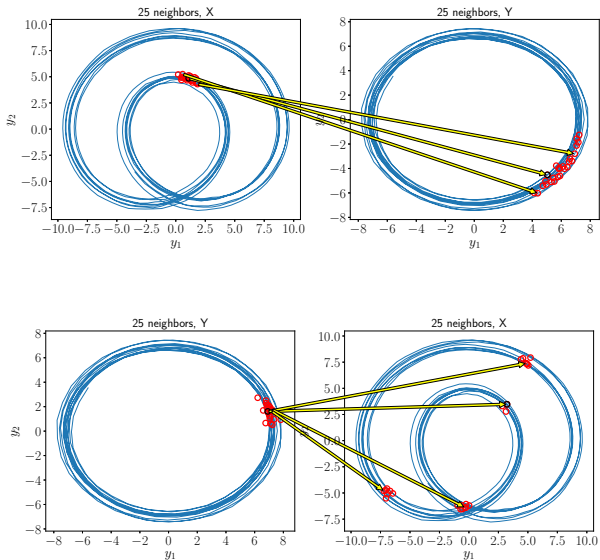
Эксперимент проводился на двух зашумленных синусах с разным периодом.

$$\mathbf{x} = \sin t + 2 \sin \frac{t}{2} + \sigma_x^2 \varepsilon, \quad \sigma_x^2 = 0.3, \quad \varepsilon \in \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$$

$$\mathbf{y} = \sin(2t + 5) + \sigma_y^2 \varepsilon, \quad \sigma_y^2 = 0.25, \quad \varepsilon \in \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$$

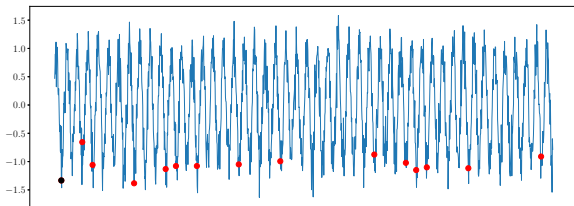
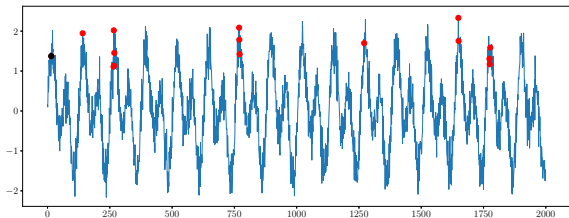


Ближайшие соседи на фазовых траекториях



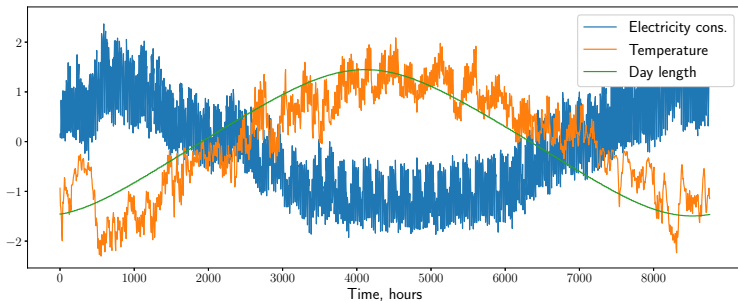
Найденные ближайшие соседи

Для $t^* = 15$ найдем ближайших соседей векторов \mathbf{x}_{t^*} и \mathbf{y}_{t^*} в траекторных пространствах \mathbb{H}_x и \mathbb{H}_y . Изобразим соответствующие им моменты времени на рядах \mathbf{x} и \mathbf{y} .



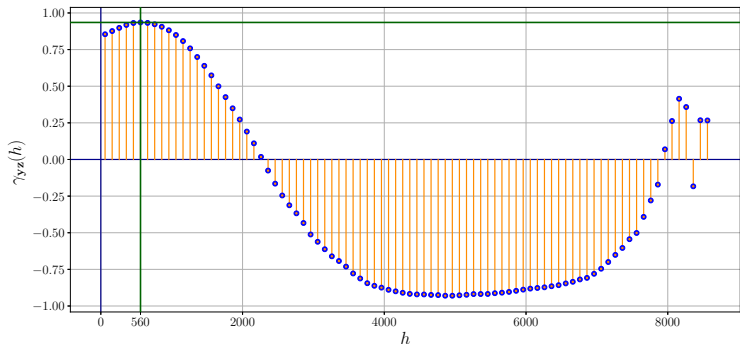
Эксперимент на данных потребления электроэнергии

- Эксперимент проводился на данных потребления электроэнергии x и температуры y в течение года.
- Для приведения ряда температуры к стационарной форме используется ряд длины светового дня z .
- Нормированные ряды потребления электроэнергии, температуры и длины светового дня:



Кросс-корреляция температуры и длины светового дня

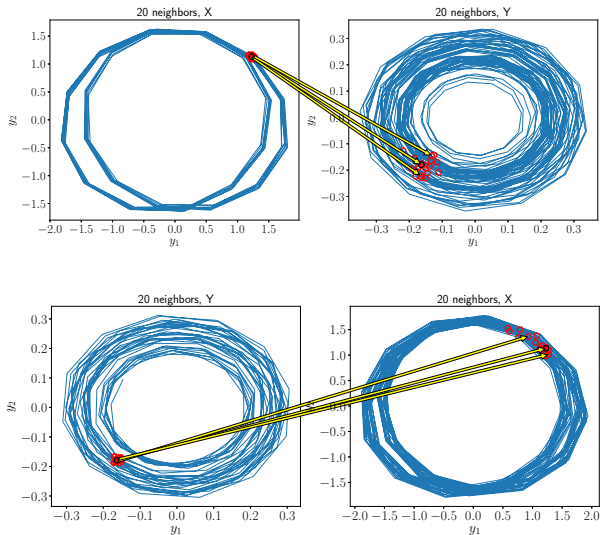
Найдем сдвиг h ряда длины светового дня z относительно ряда температуры y .



Максимум кросс-корреляции достигается при $h = 560$. Ряд температуры, приведенный к стационарной форме имеет вид:

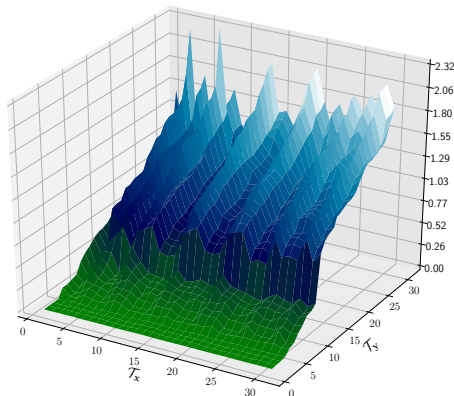
$$y(t) := y(t) - z(t - 560)$$

Ближайшие соседи на фазовых траекториях



Решение задачи выбора траекторных подпространств

Рассмотрим различные подпространства \mathbb{H}_x и \mathbb{H}_y . Для каждой пары компонент $(\mathcal{T}_x, \mathcal{T}_y)$ найдем значение $S(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathcal{T}_x, \mathcal{T}_y)$



Оптимальные подпространства задаются номерами компонент
 $\mathcal{T}_x = \{0, 3\}$, $\mathcal{T}_y = \{0, 2\}$

Построение прогноза

- Сравним качество прогноза ряда x только по собственной истории с качеством прогноза, использующим историю ряда y .
- Построим прогноз с использованием первых главных компонент ряда y

