Часть II

Коды, исправляющие ошибки

Разделы I

Задача помехоустойчивого кодирования: подходы к решению

По каналу с шумом проходит поток **битовой** информации.

- Модель потока: случайный некоррелированный.
- Модель шума: некоторые биты случайно и независимо могут оказаться инвертированными (*двоичный симметричный канал*, нет добавлений/стираний битов).
- Задача: обеспечить автоматическое исправление ошибок.

Подход к решению (один из возможных!):

1. входной поток информации разбить на *сообщения* — непересекающиеся блоки фиксированной длины k;
2. каждый блок кодировать —

   а) независимо от других — *блоковое кодирование*;

   б) в зависимости от предыдущих — *свёрточное кодирование* (турбо-коды и др.).

Задачи блокового кодирования

Далее рассматривается исключительно **блоковое кодирование**:

- есть набор всех *сообщений* $S_1, \ldots, S_t$, длины k каждое ($t = 2^k$), которые нужно передать по каналу связи с шумом;
- для обеспечения помехозащишённости вместо этих сообщений передают *кодовые слова* — блоки длины $n > k$ каждое.

Задача (основная): построить код минимальной длины n, позволяющий восстановить сообщение, содержащее не более r ошибок.

Задача (вспомогательная): заданы

- n — длина кода (обычно зависит от параметра(ов) — $m, q, \ldots$);
- r — максимальное количество исправимых ошибок.

Требуется построить код с максимальным числом t кодовых слов (= сообщений, которые можно передать).

Некоторые понятия, связанные с булевым кубом

Решаем вспомогательную задачу — она проще.

Напоминание из дискретной математики

- *Норма* $\left\|\widetilde{\gamma}\right\|$ = число единичных координат в $\widetilde{\gamma} \in B^n$.
- Метрика (вспоминаем, что это такое) на множестве бинарных наборов — *хэммингово расстояние* ($\oplus$ — сумма по $\bmod 2$):
$$\rho\left(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}\right) = \left\|\widetilde{\alpha} \oplus \widetilde{\beta}\right\|.$$
- *Шар Хэмминга с центром в $\widetilde{\alpha}$ и радиусом r* —
$$S_r\left(\widetilde{\alpha}\right) = \left\{ \widetilde{\beta} \in B^n \mid \rho\left(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}\right) \leqslant r \right\}.$$

Р.У. Хэмминг

Ричард Уэсли Хэмминг (Richard Wesley Hamming, 1915–1998) — американский математик, работы которого в сфере теории информации оказали существенное влияние на компьютерные науки и телекоммуникации.

В 1950 г. опубликовал способ построения кода, исправляющего одну ошибку и названный впоследствии его именем.

Институт инженеров по электротехнике и электронике (*IEEE, Institute of Electrical and Electronics Engineers*) учредил медаль, которой награждаются ученые, внесшие значительный вклад в теорию информации — *медаль Ричарда Хэмминга*.

Кодовое расстояние I

Определение

Минимальное расстояние между словами кода называется *кодовым расстоянием* (символически обычно d).

Утверждение

Множество C образует код с исправлением не менее r ошибок, если $S_r(\widetilde{\alpha}) \cap S_r(\widetilde{\beta}) = \varnothing$ для всех $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta} \in C$ таких, что $\widetilde{\alpha} \neq \widetilde{\beta}$.

Доказательство

Если при передаче сообщения $\widetilde{\alpha}$ сделано не более r ошибок, то набор останется в шаре $S_r(\widetilde{\alpha})$.
Если шары не пересекаются, то искомое кодовое слово α — ближайшее к полученному набору.

Кодовое расстояние II

Следствие

У кода, исправляющего r ошибок, кодовое расстояние должно быть не менее $2r+1$.

Определение кодового расстояния d произвольного кода — **сложная задача**.

Поэтому при помехоустойчивом кодировании на первый план выходит проблема построения кодов с заданным кодовым расстоянием.
Она решается при использовании, например, т.н. БЧХ-кодов, которые будут рассмотрены далее.

Блоковое кодирование и декодирование: определения и тривиальный пример

Блоковое кодирование — взаимно-однозначное преобразование сообщений длины k в кодовые слова длины $n > k$.

Декодирование — определение сообщения по кодовому слову.

Пример (тривиальный код $k = 1$, $n = 3$, $d = 3$)

Информация разбивается на блоки длины $k = 1$, т.е. передаются $t = 2$ сообщения: $S_0 = 0$ и $S_1 = 1$.
Кодирование

$$0 \mapsto 000 \qquad 1 \mapsto 111$$

исправляет одну ошибку!

Однако такое кодирование (выбор $k = 1$) крайне неэффективно: длина сообщения утраивается.

Блоковое кодирование: обозначения и определения

Будем обозначать каждое сообщение вектором-столбцом (**полужирный шрифт**) $\boldsymbol{u} \in \{0,1\}^k$:

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \cdots \\ u_k \end{bmatrix} \qquad u_1, \ldots, u_k \text{ — } \textit{информационные биты}$$

Определение

- $\boldsymbol{v}$ — кодовое слово длины $n = k + m$, содержащее помимо k информационных ещё и m *проверочных бит* (*разделимое блоковое кодирование*).
- Множество $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{2^k}\}$ всех 2^k кодовых слов длины n — (n,k)*-код* (с кодовым расстоянием — (n,k,d)*-код*).
- $R = k/n$ — *скорость*, $m/n = 1 - R$ — *избыточность кода*.

Блоковый (n, k) код: кодирование и ошибки передачи

Блоковое кодирование не вызывает принципиальных трудностей: отображение $S \to C$ всегда может быть осуществлено с использованием таблицы размера $2^k \times n$. Однако такое «табличное» кодирование весьма неэффективно: n может достигать *десятков и сотен тысяч*.

При передаче по каналу с шумом кодовое слово $\boldsymbol{v}$ превращается в принятое слово $\boldsymbol{w}$ той же длины n:

$$\boldsymbol{v} \to \boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{e}\,.$$

Здесь $\boldsymbol{e} \in \{0, 1\}^n$ — *вектор ошибок*:

$$e_i = \begin{cases} 1, & \text{если в } i\text{-ом бите произошла ошибка.} \\ 0, & \text{если ошибки нет.} \end{cases}$$

(n, k, d)-код может исправить не менее $\left[\dfrac{d-1}{2}\right]$ ошибок.

Блоковый (n, k) код: декодирование

Декодирование кодов обычно значительно сложнее кодирования (известны т.н. «экспандерные» коды с линейным декодированием, для которых неизвестны субквадратичные алгоритмы кодирования, но это — исключение...).

Декодирование (n, k, d)-кода основано на:

- разбиении единичного куба B^n на k областей, содержащих шары радиуса $r = [\,(d-1)/2\,]$ с центрами в кодовых словах;
- предположении, что при передаче произошло не более r ошибок.

Блоковый (n, k) код: два этапа декодирования

1-й этап: Восстановление переданного кодового слова $\widehat{\boldsymbol{v}}$ как ближайшего к $\boldsymbol{w}$ в метрике Хэмминга — нахождение центра соответствующего шара.
Для этого надо, вообще говоря, перебрать все 2^k строк в $2^k \times n$-таблице кодовых слов.

Если расстояние до ближайшего центра шара (кодового слова) превышает величину $r = [\,(d-1)/2\,]$, то при передаче произошло больше ошибок, чем может исправить код и алгоритм декодирования должен выдать отказ.

2-й этап: Восстановление по $\widehat{\boldsymbol{v}}$ исходного сообщения $\widehat{\boldsymbol{u}}$ путём удаления проверочных бит.
В общем случае это потребует использования таблицы размера $2^k \times k$.

Блоковое кодирование: общая схема и сложность

$$\boldsymbol{u} \xrightarrow[\text{избыточность}]{\textit{кодирование}} \boldsymbol{v} \xrightarrow[+e]{\textit{ошибка}} \boldsymbol{w} \xrightarrow[\text{ближ. код. слово}]{\textit{декод.-1}} \widehat{\boldsymbol{v}} \xrightarrow[\text{удаление избыт.}]{\textit{декод.-2}} \widehat{\boldsymbol{u}}$$

Из приведённых оценок следует:
использование блокового (n, k)-кода общего вида возможно лишь при небольших значениях n и k.

Однако, приняв ряд дополнительных ограничений на множество кодовых слов, можно перейти от экспоненциальных (2^k) требований по памяти для хранения кода и по сложности алгоритмов кодирования/декодирования к линейным по n и k.

Эти ограничения приводят к использованию блоковых кодов специального вида: групповых, а из групповых — циклических.

Плотная упаковка шаров в булев куб

Чтобы построить код максимального размера, исправляющий r ошибок, нужно вложить в единичный куб B^n максимально возможное число непересекающихся шаров радиуса r — *задача плотной упаковки*.

Вопрос: При каких n и r в куб B^n можно уложить непересекающиеся шары радиуса r «плотно», «без зазоров»?

Ответ: Такое удаётся в случаях:

1. $n = 2^m - 1$, $r = 1$ — *коды Хэмминга* и
2. $n = 23$, $r = 3$ — *код Голея*

— это *совершенные* или *экстремальные коды*.

Количество кодовых слов

Теорема (Хэмминга)

При $2r < n$ максимальное число t кодовых слов находится в пределах

$$\frac{2^n}{\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{2r}} \leqslant t \leqslant \frac{2^n}{\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{r}}.$$

Доказательство

t есть максимальное число непересекающихся шаров радиуса r, помещающихся в кубе B^n.

Верхняя оценка (граница Хэмминга) — шар радиуса r содержит точки: сам центр + все точки с одной, двумя, ..., r измененными координатами, т.е. всего $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{r}$ штук и шары не пересекаются.

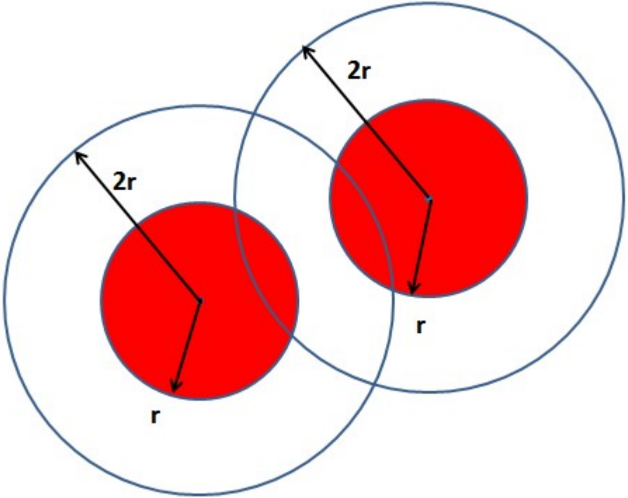
Продолжение доказательства

Для оценки снизу построим негрупповой код:

1. *берем произвольную точку* B^n *и строим вокруг неё шар радиуса* $2r$*;*
2. *берем произвольную точку вне построенного шара и строим вокруг неё шар радиуса* $2r$*;*
3. *и т.д., каждая новая точка выбирается вне построенных шаров. В результате:*

- *шары, возможно, пересекаются, но каждый шар занимает* $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{2r}$ *точек* $\Rightarrow$ *шаров не менее*
$$\frac{2^n}{\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{2r}};$$
- *шары радиуса* r *с центрами в выбранных точках не пересекаются.*

Иллюстрация к теореме Хэмминга



Граница Варшамова–Гильберта

Замечание: оценка нижней границы количества t кодовых слов, исправляющих r ошибок в поле $GE(p^n)$ —

$$\frac{p^n}{\binom{n}{0}(p-1)^0 + \binom{n}{1}(p-1)^1 + \ldots + \binom{n}{2r}(p-1)^{2r}} \leqslant t.$$

Ром Рубенович Варшамов (1927–1999) — чл.-корр. АН АрмССР, основоположник алгебраической теории кодирования.

Эдгар Гильберт (Edgar Nelson Gilbert, 1923–2013) — американский математик, специалист в области теории кодирования.

Код Хэмминга $n = 2^m - 1$, $r = 1$: построение

Покажем, что в случае $n = 2^m - 1$ получим $t = \frac{2^n}{1+n}$, т.е. верхняя оценка в теореме Хэмминга достигается.

Построим код, а потом определим его кодовое расстояние.

Рассмотрим таблицу:

$$k = 2^m - (m+1) \left\{ \begin{array}{cc} 100\ldots000 & 1100\ldots000 \\ 010\ldots000 & 1010\ldots000 \\ 001\ldots000 & 1001\ldots000 \\ \ldots & \ldots \\ 000\ldots100 & 1111\ldots101 \\ 000\ldots010 & 1111\ldots110 \\ 000\ldots001 & 1111\ldots111 \end{array} \right.$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{k = 2^m - (m+1)} \qquad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{m}$$

Слева — единичная матрица порядка $2^m - (m+1)$, справа — все бинарные наборы длины m, содержащие не менее двух единиц.

Код Хэмминга $n = 2^m - 1$, $r = 1$: кодовое расстояние

Просуммируем всевозможные совокупности строк этой таблицы, получив всего $2^k = 2^{2^m-(m+1)}$ различных наборов–кодовых слов. Но

$$2^{2^m-(m+1)} = \frac{2^{2^m-1}}{2^m} = \frac{2^n}{n+1} = \max t.$$

Найдём кодовое расстояние построенного кода:

- в каждой строке таблицы — не менее 3 единиц;
- если сложить

  две строки — в левой части будет 2 единицы, а в правой — хотя бы 1,

  не менее трёх строк — в левой части будет не менее 3 единиц.

Т.е. всегда $\rho\left(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}\right) \geqslant 3 \Rightarrow$ шары единичного радиуса с центрами в полученных наборах не пересекаются.

Код Хэмминга длины 7

Пример ($m = 3,\ n = 2^3 - 1 = 7,\ k = 7 - 3 = 4$)

Для данного параметра $m = 3$ составим таблицу кода Хэмминга:

$$\begin{array}{|cccc|ccc|}
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
\hline
\end{array}$$

Складывая по $\bmod 2$ все совокупности приведённых 4 строк (включая пустую), получаем $2^4 = 16$ различных бинарных слов длины 7, которыми можно закодировать 16 сообщений.

Эти кодовые слова располагаются в 0-м, 3-м, 4-м и 7-м слоях единичного куба B^7.

Является ли кодом Хемминга тривиальный $(3, 1)$-код?

Код Голея — $(23,\ 12,\ 7)$-код

В данном случае верхняя граница числа вложенных шаров радиуса 3 в 23-мерный единичный куб

$$t = \frac{2^{23}}{1 + 23 + \frac{23\cdot 22}{1\cdot 2} + \frac{23\cdot 22\cdot 21}{1\cdot 2\cdot 3}} = \frac{2^{23}}{2048} = \frac{2^{23}}{2^{11}} = 2^{12} = 4096$$

также достигается, т.е. имеем плотную упаковку, как и в кодах Хэмминга (совпадение логарифма $t = 2^{12}$ и числа информационных бит $k = 12$ случайно).

Других пар $(n,\ r)$, удовлетворяющих условию

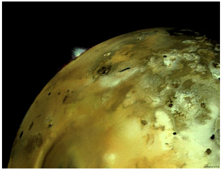
$$\frac{2^n}{\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{r}} \quad \text{— целое}$$

неизвестно.

М. Голей

Марсель Голей
(Marcel J. E. Golay, 1902–1989)
— швейцарский математик и физик, работавший в США и занимавшийся проблемами газовой хроматографии и оптической спектроскопии.
В своей единственной работе по теории информации (1949) предложил совершенный двоичный код, исправляющий три ошибки.

В ходе космической программы *Вояджер* (1979-81) для передачи цветных изображений Юпитера и Сатурна использовался код Голея.



Граница Плоткина

Пусть $t(n,d)$ — максимально возможное количество кодовых слов среди всех двоичных кодов длины n с кодовым расстоянием d.

Граница Плоткина даёт верхний предел $t(n,d)$.

Теорема

Если d —

1. *чётно и $2d > n$, то*
$$t(n,\ d) \leqslant 2\left[\frac{d}{2d-n}\right];$$
2. *нечётно и $2d+1 > n$, то*
$$t(n,\ d) \leqslant 2\left[\frac{d+1}{2d+1-n}\right].$$

Существуют коды, для которых граница Плоткина достигается.

Разделы I

Разделы

Групповые коды: определение

Бо́льшая часть теории блокового кодирования построена на *линейных* кодах, позволяющих реализовывать эффективные алгоритмы кодирования/декодирования. В двоичном случае их называют *групповыми*, т.к. они образуют группу относительно $\oplus$.

Утверждение

Устойчивая совокупность кодовых слов $C = \{ \widetilde{\alpha}^1, \ldots, \widetilde{\alpha}^t \}$ *образует группу по сложению относительно операции* $\oplus$.

Доказательство

Устойчивость (предполагается): *для любых кодовых слов* $\widetilde{\alpha}^i, \widetilde{\alpha}^j \in C$ *выполняется* $\widetilde{\alpha}^i \oplus \widetilde{\alpha}^j = \widetilde{\alpha}^k \in C$;

Ассоциативность: *свойство операции* $\oplus$;

Существование 0**:** $\widetilde{\alpha} \oplus \widetilde{\alpha} = (0, \ldots, 0) \stackrel{\text{def}}{=} \widetilde{0} \in C$;

Противоположные элементы: $-\widetilde{\alpha} = \widetilde{\alpha}$ — *см. выше.*

Свойство кодового расстояния группового кода

Теорема

Кодовое расстояние d *группового кода* C *равно*

$$d = \min_{\widetilde{\alpha} \neq \widetilde{\beta}} \rho\left(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}\right) = \min_{\widetilde{\gamma} \neq \widetilde{0}} \|\widetilde{\gamma}\|,$$

где $\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\beta}$ *и* $\widetilde{\gamma}$ *— кодовые слова из* C.

Доказательство

Для произвольных кодовых слов $\widetilde{\alpha}$ *и* $\widetilde{\beta}$ *всегда существует их сумма — кодовое слово* γ*:* $\rho\left(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}\right) = \left\|\widetilde{\alpha} \oplus \widetilde{\beta}\right\| = \|\widetilde{\gamma}\|$,
причем $\widetilde{\gamma} \neq \widetilde{0}$ *при* $\widetilde{\alpha} \neq \widetilde{\beta}$.
Отсюда получаем оценку $\min\limits_{\widetilde{\alpha} \neq \widetilde{\beta}} \rho\left(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}\right) \geqslant \min\limits_{\widetilde{\gamma} \neq \widetilde{0}} \|\widetilde{\gamma}\|$, *которая достигается, например, при* $\widetilde{\beta} = \widetilde{0}$.

Характеристики кода Хэмминга:

- групповой $(2^m - 1, 2^m - 1 - m, 3)$-код (исправляет одну ошибку);
- совершенный код: осуществляет плотную упаковку — куб B^{2^m-1} разбивается на $t = \dfrac{2^n}{n+1} = 2^{2^m-(m+1)}$ шаров радиуса $r = 1$ с центрами в кодовых словах.
- избыточность — $\dfrac{m}{2^m - 1}$;

Историческая справка. Первой ЭВМ, в которой использовался код Хэмминга, была IBM 7030, построенная в 1960 г. (через 10 лет после появления кода Хэмминга).
До этого в вычислительных машинах использовался лишь простейший способ повышения надежности — проверка на четность.

Линейные коды: определение

$\{0,1\}^n$ — n-мерное координатное векторное пространство над конечным полем $\mathbb{F}_2 = \{0,1\}$.

Определение

Блоковый (n,k)-код C называется *линейным*, если он образует векторное подпространство размерности k координатного пространства $\{0,1\}^n$ (двоичный случай).

Это означает, что в линейном коде C —

1. сумма любых кодовых слов — кодовое слово;
2. кодовое расстояние $d = \min\limits_{\widetilde{\gamma}\in C} \|\widetilde{\gamma}\|$;
3. существует базис из k векторов $\{\boldsymbol{g}_0, \boldsymbol{g}_1, \ldots, \boldsymbol{g}_{k-1}\}$ и любой вектор $\boldsymbol{v} \in C$ может быть представлен как
$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=0}^{k-1} u_i \boldsymbol{g}_i, \ u_i \in \{0,1\}.$$

Линейный код: матричное представление

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=0}^{k-1} u_i \boldsymbol{g}_i = G\boldsymbol{u}\,, \text{ где } G_{n\times k} = [\,\boldsymbol{g}_0\,\boldsymbol{g}_1\,\ldots\,\boldsymbol{g}_{k-1}\,] \text{ —}$$

— *порождающая матрица* кода.

Пример ($(7,\,4)$-код Хэмминга)

Ранее была получена таблица, сложением произвольных строк которой получаются все $2^4 = 16$ кодовых слов. Порождающая матрица получается транспонированием этой таблицы:

$$G_{7\times 4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

— при кодировании этой матрицей исходные сообщения помещаются в первые 4 бита кодового слова

Линейный код: проверочная матрица

Проверочная матрица $H_{m\times n}$, $m = n - k$ для линейного (n, k)-кода обладает свойством $H\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ для любого кодового слова $\boldsymbol{v}$.

Если порождающая матрица имеет вид $\begin{bmatrix} I_k \\ P \end{bmatrix}$, то матрица $\begin{bmatrix} P & I_m \end{bmatrix}$ будет проверочной (I_k и I_m — единичные матрицы).

Пример ($(7, 4)$-код Хэмминга, продолжение)

Для построенной порождающей матрицы $G_{7\times 4}$ проверочной будет

$$H_{3\times 7} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Упражнение: *Закодируйте матрицей G какое-нибудь 4-битное сообщение, получив код $\boldsymbol{v}$, и убедитесь, что $H\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$.*

Разделы

Линейные коды: кодирование

$$\boldsymbol{u} \xrightarrow[\text{избыточность}]{\text{кодирование}} \boldsymbol{v} = G\boldsymbol{u}$$

На практике используют

> *систематическое* кодирование, при котором k бит исходного сообщения копируются в фиксированные позиции кодового слова, а затем вычисляются остальные $m = n - k$ проверочных бит.

Такая возможность основана на том, что матрица G определена с точностью до эквивалентных преобразований столбцов (переход к другому базису).

При систематическом кодировании 2-й этап декодирования ($\widehat{\boldsymbol{v}} \to \widehat{\boldsymbol{u}}$, удаление избыточности) становится тривиальным.

Систематическое кодирование: пример

Пусть линейный код задан порождающей матрицей G.

- С помощью эквивалентных преобразований столбцов матрица G может быть приведена к виду, в котором (без потери общности) первые k строк образуют единичную подматрицу I_k:

$$G_{n\times k} \longrightarrow \widetilde{G}_{n\times k} = \begin{bmatrix} I_k \\ P_{m\times k} \end{bmatrix}$$

- Тогда кодирование $\boldsymbol{v} = \widetilde{G}\boldsymbol{u}$ будет систематическим: первые k бит кодового слова $\boldsymbol{v}$ являются битами исходного сообщения $\boldsymbol{u}$.

Ортогональное дополнение к подпространству кода

Итак, C — подпространство $\{0,1\}^n$.
Элементы $\{0,1\}^n$, ортогональные ко всем элементам C, образуют ортогональное к нему подпространство $C^\perp$ (по линейности скалярного произведения). При этом:

- $\underbrace{\dim\{0,1\}^n}_{n} = \underbrace{\dim C}_{k} + \underbrace{\dim C^\perp}_{m=n-k}$;
- $\underset{C}{\forall v} \; \underset{C^\perp}{\forall} w \; \boldsymbol{v}^T \times \boldsymbol{w} = 0.$

Замечания:

- $C \cap C^\perp \neq \mathbf{0}$ (нулевой вектор) и $C \cup C^\perp \neq \{0,1\}^n$, т.е. $\{0,1\}^n$ — *не есть прямая сумма* C и $C^\perp$;
- произвольный вектор из $\{0,1\}^n$ может не разлагаться (или разлагаться неоднозначно) в сумму вектора из C и вектора из $C^\perp$.

Линейные коды: проверочная матрица

Определение

Пусть $\{\, \boldsymbol{h}_0, \ldots, \boldsymbol{h}_{m-1} \,\} \in \{0,1\}^n$ — базис $C^\perp$. Тогда матрица

$$H_{m\times n} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{h}_0^T \\ \boldsymbol{h}_1^T \\ \ddots \\ \boldsymbol{h}_{m-1}^T \end{bmatrix}$$

называется *проверочной матрицей* кода C.

Ясно, что

- $\forall\, \boldsymbol{v} \in C\colon\; H\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$;
- проверочная матрица определена с точностью до эквивалентных преобразований строк.

Построение систематической проверочной матрицы

Если линейный код C задан исходной порождающей матрицей G и построена матрица

$$\widetilde{G}_{n\times k} = \begin{bmatrix} I_k \\ P_{m\times k} \end{bmatrix},$$

то проверочной матрицей H кода C будет

$$H_{m\times n} = \begin{bmatrix} P_{m\times k} & I_m \end{bmatrix}$$

(I_k и I_m — единичные матрицы порядков k и m).

Действительно, в этом случае

$$H\boldsymbol{v} = H\widetilde{G}\boldsymbol{u} = (P+P)\boldsymbol{u} = \mathbf{0}.$$

Линейный систематический код: задание

Таким образом, линейный код для сообщений длины k имеет длину $n = k + m$ и задаётся
либо порождающей матрицей размера $n \times k$,
либо проверочной матрицей размера $m \times n$.

Эти матрицы

- определены с точностью до эквивалентных преобразований столбцов и строк соответственно, что соответствует выбору различных базисов в пространствах C и $C^{\perp}$,
- однако фиксирование позиций информационных бит при систематическом кодировании задаёт порождающую и проверочную матрицу однозначно.

Увеличение m ведёт к увеличению кодового расстояния d (как конкретно — трудный вопрос) и, следовательно, к увеличению количества ошибок, которые может исправить код.

Блоковый линейный код: пример кодирования

Дано: линейный $(6,3)$-код C задан порождающей матрицей

$$G_{6\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Требуется:

1. с использование данного кода осуществить (а) несистематическое и (б) систематическое кодирование векторов $\boldsymbol{u}_1 = [0\ 1\ 1]^T$ и $\boldsymbol{u}_2 = [1\ 0\ 1]^T$;
2. построить проверочную матрицу H кода C;
3. определить кодовое расстояние d кода C.

Блоковый линейный код: пример кодирования...

1 (a). Несистематическое кодирование находим непосредственно:

$$[\,\boldsymbol{v}_1^n\,\boldsymbol{v}_2^n\,] = G \times [\,\boldsymbol{u}_1\,\boldsymbol{u}_2\,] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Блоковый линейный код: пример кодирования...

1 (б). Для систематического кодирования с помощью эквивалентных преобразований столбцов выделим в матрице G единичную подматрицу размера 3×3 (над стрелкой указано проводимое преобразование над столбцами):

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1)+(2)\mapsto(1)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \widetilde{G}.$$

В последней матрице в строках 3, 5 и 1 стоит единичная подматрица — это приведёт к тому, что 1, 2 и 3-й биты исходного сообщения последовательно перейдут в 3, 5 и 1-й биты кодового слова.

Блоковый линейный код: пример кодирования...

Найдём систематическое кодирование $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$:

$$[\,\boldsymbol{v}_1^s\,\boldsymbol{v}_2^s\,] = \widetilde{G} \times [\,\boldsymbol{u}_1\,\boldsymbol{u}_2\,] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Находим проверочную матрицу H, формируя матрицу $P_{3\times 3}$ из строк $\widetilde{G}$, отличных от строк с единичной подматрицей:

$$P_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Блоковый линейный код: пример кодирования...

Для построения проверочной матрицы H нужно

- последовательно разместить столбцы P в 3, 5 и 1-м её столбцах соответственно,
- остальные 2, 4 и 6-й столбцы H должны образовывать единичную подматрицу.

В итоге получим

$$H_{3\times 6} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Блоковый линейный код: пример кодирования...

Мы получили разбиение пространства $\{0,1\}^6$ на кодовое пространство C и его ортогональное дополнение $C^{\perp}$.

Базис C суть столбцы матрицы G или $\widetilde{G}$,
а базис $C^{\perp}$ — строки матрицы H:

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \widetilde{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad H^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Убедитесь, что скалярное произведение любого столбца G или $\widetilde{G}$ на любой столбец H^T есть нулевой вектор.

Блоковый линейный код: пример кодирования...

Проверим, что в результате как систематического, так и несистематического кодирований были действительно найдены кодовые слова:

$$H \times [\,\boldsymbol{v}_1^n\,\boldsymbol{v}_2^n\,\boldsymbol{v}_1^s\,\boldsymbol{v}_2^s\,] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Блоковый линейный код: пример кодирования...

3. Найдем кодовое расстояние d: построим матрицу всех $2^3 = 8$ кодовых слов и найдем минимальный ненулевой хэммингов вес:

$$[\boldsymbol{v}_1 \ \dots \ \boldsymbol{v}_8] = G \times [\boldsymbol{u}_1 \ \dots \ \boldsymbol{u}_8] =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_8$ — все 8 возможных сообщений, $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_8$ — все 8 возможных кодовых слов. Оказалось $d = 3$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Разделы

Декодирование группового кода: синдром

Определение

Синдромом принятого слова $\boldsymbol{w}$, закодированного групповым (n,k)-кодом и, возможно, содержащего ошибки, назовём вектор $\boldsymbol{s} = H\boldsymbol{w} \in \{0,1\}^m$, где H — проверочная матрица, $m = n-k$.

(*Синдром* — совокупность явлений, вызванных отклонением от нормы)

Свойства синдрома:

- $\boldsymbol{s} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{w}$ — кодовое слово;
- $\boldsymbol{s} = H\boldsymbol{w} = H(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{e}) = \underbrace{H\boldsymbol{v}}_{=0} + H\boldsymbol{e} = H\boldsymbol{e}$,

  т.е. вектор ошибок $\boldsymbol{e}$ удовлетворяет системе линейных уравнений $H_{m\times n}\boldsymbol{e} = \boldsymbol{s}$.

Вычисление вектора ошибок по синдрому

Решение СЛАУ

$$H_{m\times n}\boldsymbol{e} = \boldsymbol{s} \qquad (*)$$

относительно вектора ошибок $\boldsymbol{e}$ будем искать в виде суммы частного $\widehat{\boldsymbol{e}}$ решения $(*)$ и общего $G\boldsymbol{u}$ решения соответствующей однородной системы: $\boldsymbol{e} = \widehat{\boldsymbol{e}} + G\boldsymbol{u} \in \{0,1\}^n$.

Подставляя его в $(*)$, получим

$$\underbrace{H\widehat{\boldsymbol{e}}}_{=\boldsymbol{s}} + \underbrace{HG}_{O}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{s},$$

где

- $\widehat{\boldsymbol{e}}$ — произвольное частное решение системы $H\widehat{\boldsymbol{e}} = \boldsymbol{s}$;
- $\boldsymbol{u}$ — произвольный вектор длины k;
- O — матрица нулей размера $m \times k$.

Ясно, что $G\boldsymbol{u} \in \{0,1\}^n$ — некоторое решение однородной системы $H\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

Групповые коды: общая схема декодирования

После нахождения частного решения $\widehat{\boldsymbol{e}}$, все возможные кодовые слова $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_{2^k}$ входного вектора дадут 2^k вариантов вектора $\boldsymbol{e}_i = \widehat{\boldsymbol{e}} + G\boldsymbol{u}_i$.
Решение с наименьшим хэмминговым весом $\|\boldsymbol{e}_i\|$ дает искомый вектор ошибок.

Получив вектор ошибок $\boldsymbol{e}$, декодирование осуществляют по правилу $\widehat{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{w} + \boldsymbol{e}$.

Схема декодирования:

$$\boldsymbol{w} \xrightarrow{\qquad\qquad} \boldsymbol{s} = H\boldsymbol{w} \xrightarrow[H\boldsymbol{e}=\boldsymbol{s}]{} \boldsymbol{e} = \widehat{\boldsymbol{e}} + G\boldsymbol{u} \xrightarrow[\|\boldsymbol{e}\|\to\min]{} \widehat{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{w} + \boldsymbol{e}$$

Для каждого из 2^m синдромов необходимо перебирать 2^k решений очередной СЛАУ, т.е. алгоритм декодирования линейного кода в общем случае имеет экспоненциальную трудоёмкость и по памяти, и по числу операций.

Декодирование линейного кода: пример

Возьмём линейный $(6,3)$-код из рассмотренного ранее примера: вектор сообщения есть $\boldsymbol{u} = [0\ 1\ 1]^T$.
Систематическое кодирование для него было получено раньше:

$$\boldsymbol{v} = [1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0]^T.$$

Пусть при передаче происходит ошибка во втором бите, т.е. принятый вектор $\boldsymbol{w} = [1\ {\color{red}0}\ 0\ 0\ 1\ 0]^T$.

Декодирование

1. Найдём синдром принятого сообщения $\boldsymbol{w}$:

$$H\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{s}\,.$$

Декодирование линейного кода: пример...

2. Находим все решения системы $\boldsymbol{He} = \boldsymbol{s}$.

2.a Находим частное решение $\widehat{e}$ этой системы. Поскольку в столбцах $2, 4, 6$ проверочной матрицы H стоит единичная подматрица, возьмём координаты $1, 3$ и 5 вектора $\widehat{e}$ нулевыми: $\widehat{e}_1 = \widehat{e}_3 = \widehat{e}_5 = 0$ и тогда
$\widehat{e}_2 = s_1 = 1$, $\widehat{e}_4 = s_2 = 0$, $\widehat{e}_6 = s_3 = 0$, т.е. $\widehat{e} = [0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0]^T$.

2.a Все решения однородной системы $\boldsymbol{He} = \boldsymbol{0}$ уже были найдены раньше при вычислении кодового расстояния d:

$$G \times [\,\boldsymbol{u}_1 \ldots \boldsymbol{u}_8\,] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Декодирование линейного кода: пример...

Таким образом, все 8 решений системы $\boldsymbol{He} = \boldsymbol{s}$ записываются как сумма вектора $\widehat{e} = [0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0]^T$ со всеми столбцами матрицы $G \times [\,\boldsymbol{u}_1 \ldots \boldsymbol{u}_8\,]$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Выбираем среди них решение с наименьшим весом — это первый столбец $\boldsymbol{e} = [0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0]^T$.
Отсюда
$\widehat{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{w} + \boldsymbol{e} = [1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0]^T + [0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0]^T = [1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0]^T = \boldsymbol{v}$
и исходное сообщение восстановлено верно.

Групповое коды (n, k): резюме

Требование линейности позволяет реализовывать более эффективные алгоритмы кодирования и декодирования.

Кодирование осуществляется особенно просто: для этого надо умножить вектор-сообщения на порождающую матрицу.
Но вопрос «как найти подходящую порождающую матрицу?» **остаётся открытым**.

Декодирование также значительно упрощается:

- осуществляется с помощью легко вычисляемых синдромов;
- этап 2 при систематическом кодировании элементарен.

Однако в общем случае требуется перебрать 2^k решений СЛАУ, т.е. несмотря на указанные упрощения, процесс декодирования остаётся всё ещё достаточно трудоёмким (**экспоненциальная сложность** по k).

Разделы I

Разделы

Циклические коды: определение

Определение

Код C называется *циклическим (сдвиговым)*, если он инвариантен относительно циклических сдвигов, т.е. для любого $0 \leqslant s \leqslant n-1$ справедливо

$(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}) \in C \Rightarrow (\alpha_s, \alpha_{s+1}, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_0, \ldots, \alpha_{s-1}) \in C.$

Ранее рассматривалось и было показано:

- В кольце $\mathbb{F}_p[x]/(x^n - 1)$, рассматриваемом как векторное пространство над полем $\mathbb{F}_p$, имеется базис
$$\left\{ \overline{1}, \overline{x}, \ldots, \overline{x^{n-1}} \right\}.$$
Циклический сдвиг координат в этом базисе равносилен умножению на x.
- Теорема: *Векторное подпространство* $I \subseteq \mathbb{F}_p[x]/(x^n - 1)$ *является циклическим iff* $I \lhd \mathbb{F}_p[x]/(x^n - 1)$.

Циклические коды: идея построения

Поэтому построить двоичный циклический код можно так:

1. выбираем некоторый делитель $g(x)$ бинома $x^n - 1$; многочлен $g(x)$ называют *порождающим*.
2. в кольце $\mathbb{F}_2[x]/(x^n - 1)$ образуем идеал $(g(x))$.

Оказывается, при удачном выборе $g(x)$ коэффициенты многочленов из данного идеала будут давать хороший код — с малой избыточностью m/n при большом d.

Однако:

- есть только несколько конструкций циклических кодов с хорошими параметрами;
- в общем случае определение кодового расстояния циклического кода чрезвычайно сложно.

Циклический код — англ. CRC, Cyclic Redundancy Code.

Линейные циклические коды

Из всех линейных (n, k)-кодов будем далее рассматривать циклические.

Установим соответствие вектора $\boldsymbol{v}$ координатного пространства $\{0, 1\}^n$ и полинома $v(x) \in \mathbb{F}_2[x]$:

$$\boldsymbol{v} = [v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}]^T \leftrightarrow v(x) = v_0 + v_1 x + \ldots + v_{n-1} x^{n-1}.$$

Тогда свойство главного идеала переформулируется:
для каждого (n, k)-циклического кода найдется порождающий полином $g(x)$ такой, что

1. $g(x) \mid (x^n - 1)$;
2. *любое кодовое слово $v(x)$ представляется в виде $v(x) = g(x)q(x)$, где $q(x)$ — некоторый полином.*

Любой делящий $x^n - 1$ полином является порождающим для некоторого циклического кода длины n.

Циклические коды: пример построения

Построим циклический код длины $n = 23$.

Для нахождения порождающего полинома кода находим разложение бинома $x^{23} - 1$ на неприводимые многочлены.

Один корень находится сразу: это x.

Далее имеем разложение

$$x^{23} + 1 = (x+1)(\underbrace{x^{22} + x^{21} + \ldots + x^2 + x + 1}_{f(x)}).$$

Перебором неприводимых полиномов степени до 11, получаем

$$f(x) = (\underbrace{x^{11} + x^9 + x^7 + x^6 + x^5 + x + 1}_{f_1(x)}) \times$$
$$\times (\underbrace{x^{11} + x^{10} + x^6 + x^5 + x^4 + x^2 + 1}_{f_2(x)})$$

Циклические коды: пример построения...

Поскольку степени полиномов $f_1(x)$ и $f_2(x)$ совпадают, любой из них может быть выбран как порождающий для $(23, 12)$-кода.

Можно показать, что кодовое расстояние полученного кода равно 7.

Например, при выборе порождающим $f_2(x)$ и (несистематическом) кодировании сообщения

$$[110000000000] \leftrightarrow x + 1,$$

получаем кодовое слово веса 7:

$$(\underbrace{x^{11} + x^{10} + x^6 + x^5 + x^4 + x^2 + 1}_{g(x)})(x+1) =$$

$$= x^{12} + x^{10} + x^7 + x^4 + x^3 + x^2 + x \leftrightarrow [01111001001010000000000]$$

Ясно, что построен код Голея.

Разделы

Циклические коды: кодирование

Пусть задан порождающий полином $g(x)$ степени m (= числу проверочных битов у будущего кода C).
Рассмотрим возможные методы построения линейных циклических (n, k)-кодов $(n = m + k)$, кодирующих сообщение–полином $u(x)$ степени $k - 1$: $u(x) \mapsto v(x)$.
Результат — кодовое слово–полином $v(x) \in C$ степени $n - 1$.

Несистематическое кодирование осуществляется путём умножения кодируемого вектора на порождающий полином:

$$u(x) \mapsto v(x) = g(x)u(x).$$

В порождающей матрице $G_{n\times k} = [\,\boldsymbol{g}_0 \ldots \boldsymbol{g}_{k-1}\,]$ данного кода базисные векторы $\boldsymbol{g}_i$ соответствуют полиномам $x^i g(x)$, $i = \overline{0, k-1}$.

Циклические коды: систематическое кодирование...

Систематическое кодирование осуществляется путём «дописывания» к кодируемому слову остатка $r(x)$ от деления $x^m u(x)$ на $g(x)$:

$$x^m u(x) = g(x)q(x) + r(x) \quad \text{и} \quad \deg r(x) < m.$$

Отсюда $\qquad x^m u(x) + r(x) = g(x)q(x) \in C$,
систематическое кодирование может быть задано как

$$v(x) = x^m u(x) + r(x), \quad \text{где } r(x) \equiv_{g(x)} x^m u(x),$$

и полином $v(x)$ имеет в k крайних правых позициях (т.е. при старших степенях x) k коэффициентов полинома $u(x)$.

В порождающей матрице $G_{n\times k} = [\,\boldsymbol{g}_0 \dots \boldsymbol{g}_{k-1}\,]$ данного кода базисные векторы $\boldsymbol{g}_i$ соответствуют полиномам $x^{m+i} + r_i(x)$, где $r_i(x) \equiv_{g(x)} x^{m+i}$, $i = \overline{0, k-1}$.

Циклический код: пример кодирования

Пусть требуется построить циклический код длины $n = 7$.
Это означает, что работаем в кольце $\mathbb{F}_2[x]/\left(x^7 - 1\right)$.

1. Находим разложение полинома $x^7 - 1$ на неприводимые множители.

Так как $7 = 2^3 - 1$, то корнями $x^7 - 1$ являются все ненулевые элементы поля $\mathbb{F}_2^3$.

Известно, что:

- каждый многочлен f над конечным полем содержит в расширении этого поля вместе с любым своим корнем β также сопряжённые корни вида $\beta^2, \beta^{2^2}, \ldots$;
- если f приводим, то имеется несколько серий таких сопряжённых корней.

Циклический код: пример кодирования...

Пусть α — произвольный примитивный элемент поля $F = \mathbb{F}_2^3$. Тогда с учетом $\alpha^7 = 1$ находим разбиение корней $x^7 - 1$ (= всех элементов F^*) на орбиты:

$$\{\alpha, \alpha^2, \alpha^4\}, \ \{\alpha^3, \alpha^6, \alpha^5\}, \ \{1\}.$$

Таким образом, многочлен $x^7 + 1$ имеет один неприводимый делитель 1-й степени и два неприводимых делителя 3-й степени. В результате получаем разложение

$$x^7 - 1 = x^7 + 1 = (x+1)(x^3+x+1)(x^3+x^2+1).$$

2. Выбираем порождающий полином $g(x)$.
Можно выбрать любой делитель $x^7 + 1 \Rightarrow$ выберем $g(x) = x^3 + x + 1$, тогда $\deg g(x) = 3 = m$, $k = n - m = 4$ и построен циклический $(7,4)$-код.
Его кодовое расстояние — надо выяснять...

Циклический код: пример кодирования $g(x) = x^3 + x + 1$...

3. Проведём кодирование полинома $u(x) = x^3 + x^2$ или в векторном представлении $\boldsymbol{u} = [0011]^T$ $(k = 4)$.

3.1. Несистематическое кодирование:

$v(x) = u(x)g(x) = (x^3 + x^2)(x^3 + x + 1) = x^6 + x^5 + x^4 + x^2$

или в векторном представлении $\boldsymbol{v} = [0010111]^T$ $(n = 7)$.

3.2. Систематическое кодирование. Находим остаток $r(x)$ от деления многочлена $x^3u(x)$ на $g(x)$:

$$x^3(x^3 + x^2) = x^6 + x^5 = (x^3 + x^2 + x)(x^3 + x^2 + 1) + x,$$

$$\text{поэтому} \quad v(x) = x^3u(x) + r(x) = x^6 + x^5 + x$$

или в векторном представлении $\boldsymbol{v} = [0100011]^T$ $(n = 7)$, т.е. биты входного сообщения $\boldsymbol{u}$ воспроизводятся в крайних правых битах кодового слова $\boldsymbol{v}$.

Циклические коды: декодирование

Определение

Синдромом принятого полинома $w(x)$, закодированного циклическим (n,k)-кодом с порождающим полиномом $g(x)$ (и, возможно, содержащим ошибки), назовём остаток $s(x)$ от деления $w(x)$ на $g(x)$: $s(x) \equiv_{g(x)} w(x)$.

Определение синдрома для циклического кода, очевидно, есть перефразировка в терминах полиномов синдрома для групповых кодов.

Свойства синдрома $w(x)$:

- $s(x) \equiv 0 \Leftrightarrow w(x)$ — кодовое слово;
- $0 \leqslant \deg s(x) < m = n - k$;
- $s(x) \equiv_{g(x)} (v(x) + e(x)) \equiv_{g(x)} e(x)$.

Циклические коды: декодирование...

Декодирование циклического кода проходит по общей схеме декодирования линейного кода:

1. вычисляется синдром $s(x)$ принятого слова $w(x)$;
2. ищутся решения системы $e(x) = s(x) + g(x)u(x)$ для всех 2^k возможных полиномов $u(x)$ степени $k-1$ (экспоненциальная сложность по k);
3. определяется полином ошибок как решение с минимальным числом ненулевых слагаемых;
4. восстанавливается переданное сообщение $u(x) = w(x) + e(x)$.

Примеры декодирования циклических кодов (с одной ошибкой) будут даны при рассмотрении БЧХ-кодов.

Циклические групповое коды (n, k): резюме

- Линейны коды общего вида могут иметь произвольные параметры длины n и числа информационных бит k. Линейные циклические коды также могут иметь произвольную длину n, но параметры m и, следовательно, $k = n - m$ (число информационных бит) уже не произвольны: полином $g(x)$ степени m должен делить бином $x^n - 1$.

- Циклический код будет групповым, только если он принадлежит идеалу $(g(x))$, $\deg g(x) = m$ кольца многочленов $\mathbb{F}_2[x]$: в нём циклические сдвиги кодового слова получаются умножением на x, x^2, ..., что и обеспечивается равенством $x^n = 1$.

Циклические групповое коды (n, k): резюме...

- Кодирование производится умножением сообщения на полином $g(x)$. Однако выбор $g(x)$, порождающего код с большим кодовым расстоянием d — сложная задача (оценка сверху: $d \leqslant m + 1$ число мономов в $g(x)$).
- Декодирование осуществляется с помощью вычисляемого синдрома принятого полинома, в результате:
  - вместо матричных умножений и решения СЛАУ (как в линейных кодах общего вида) используются операции умножения и деления (с остатком) полиномов, легко реализуемые на регистрах сдвига с обратными связями;
  - однако общий алгоритм декодирования по-прежнему имеет экспоненциальную сложность по k.

Существуют и альтернативные методы декодирования циклических кодов общего вида (декодеры Меггита, Касами-Рудольфа, мажоритарный, ...) — тоже плохие.

Разделы I

Разделы

БЧХ-коды: первые сведения

Коды Боуза-Чоудхури-Хоквингема (БЧХ, BCH) — подкласс циклических кодов, исправляющих не менее заранее заданного числа ошибок.

Предложены Р.Ч. Боузом и Д.К. Рей-Чоудхури в 1960 г. независимо от опубликованной на год ранее работы А. Хоквингема.

Теоретически коды БЧХ могут исправлять произвольное количество ошибок, но при этом существенно увеличивается длина кодового слова n, что приводит к уменьшению скорости передачи данных и усложнению приёмно-передающей аппаратуры.

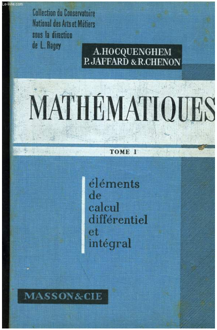
Коды Хэмминга — частный случай БЧХ-кодов.

Р.Ч. Боуз и Д.К. Рей-Чоудхури

Радж Чандра Боуз (Бошу) (Raj Chandra Bose, 1901–1987) — индийский математик, работавший в США. Известен работой (в соавторстве), опровергающей гипотезу Л. Эйлера о несуществовании латинских квадратов специального вида.

Двайджендра Камар Рей-Чоудхури (Dwijendra Kumar Ray-Chaudhuri, 1933) — индийский математик, работающий в США. Обладатель медали Эйлера, присуждаемой *Институтом комбинаторики и приложений* (Institute of Combinatorics and its Applications, Канада) за вклад в развитие комбинаторики.

А. Хоквингем



Алексис Хоквингем
(Alexis Hocquenghem, 1908?–1990) — французский математик.
В его работе 1959 г. содержится первое описание линейных циклических кодов, исправляющих кратные ошибки.

Hocquenghem является галицинизированной формой германской или фламандской фамилии.
Правильное её чтение — *Óкенгем*.

Свойства минимальных многочленов $m_\beta(x)$ поля $\mathbb{F}_p^n$

Вспоминаем:

1. $\forall\,\beta \in \mathbb{F}_p^n \ \ \exists!\, m_\beta(x)$ и $\deg m_\beta(x) \leqslant n$;
2. Если $\mathbb{F}_p^n = \mathbb{F}_p[x]/(a(x))$, то $a_n^{-1}a(x)$ — м.м. для x;
3. $f(\beta) = 0 \ \Rightarrow \ f(x) \,\vdots\, m_\beta(x)$;
4. Минимальный многочлен неприводим.
5. Минимальный многочлен генератора мультипликативной группы поля (примитивного элемента) называется *примитивным многочленом*.

Если β — корень неприводимого многочлена $\varphi(x) \in \mathbb{F}_p[x]$ степени n, то

$$\left\{ \beta,\ \beta^p,\ \beta^{p^2},\ \ldots,\ \beta^{p^{n-1}} \right\}$$

— все n различных (сопряжённых) корней $\varphi(x)$.

Циклотомический сопряжённый класс элемента поля

Определение (для случая $p = 2$)

Пусть $n \mid N$.
Циклотомическим классом (или *классом сопряжённости*) над полем $\mathbb{F}_2^n$ элемента $\alpha \in \mathbb{F}_2^N$ называется множество всех различных элементов $\mathbb{F}_2^N$, являющихся 2^n-ми степенями α.

Свойства циклотомических классов

- Циклотомические классы сопряжённости различных элементов либо совпадают, либо не пересекаются.
  Т.е. совокупность всех циклотомических классов поля $\mathbb{F}_2^N$ образует его разбиение его мультипликативной группы.
- Циклотомический класс $\left\{\alpha, \alpha^{2^n}, \alpha^{2^{2n}}, \dots, \alpha^{2^{(k-1)n}}\right\}$ над полем $\mathbb{F}_2^n$ примитивного элемента α поля $\mathbb{F}_2^{kn}$ содержит ровно k элементов.

Свойства циклотомических классов...

Примеры.

Рассмотрим разложения мультипликативных групп полей $\mathbb{F}_2^{kn}$ на циклотомические классы над $\mathbb{F}_2^n$.

1. $n = 1,\ k = 3$ и α — примитивный элемент $\mathbb{F}_2^3 = F$.
Тогда $\alpha^7 = 1$ и разложение F^* над $\mathbb{F}_2$ есть
$$\{1\},\ \{\alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^4\},\ \{\alpha^3,\ \alpha^6,\ \alpha^{12} = \alpha^5\}.$$
2. $n = 2,\ k = 2$ и α — примитивный элемент $\mathbb{F}_2^4 = F$.
Тогда $\alpha^{15} = 1$ и разложение F^* над $\mathbb{F}_2^2$ есть
$$\{1\},\ \{\alpha,\ \alpha^4\},\ \{\alpha^2,\ \alpha^8\},\ \{\alpha^3,\ \alpha^{12}\},\ \{\alpha^5\},\ \{\alpha^{10}\},$$
$$\{\alpha^6,\ \alpha^9\},\ \{\alpha^7,\ \alpha^{13}\},\ \{\alpha^{11},\ \alpha^{14}\}.$$
3. $n = 1,\ k = 4$ и α — примитивный элемент $\mathbb{F}_2^4 = F$.
Тогда $\alpha^{15} = 1$ и разложение F^* над $\mathbb{F}_2$ есть
$$\{1\},\ \{\alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^4,\ \alpha^8\},\ \{\alpha^3,\ \alpha^6,\ \alpha^{12},\ \alpha^{24} = \alpha^9\},$$
$$\{\alpha^5,\ \alpha^{10}\},\ \{\alpha^7,\ \alpha^{14},\ \alpha^{28} = \alpha^{13},\ \alpha^{26} = \alpha^{11}\}.$$

Свойства циклотомических классов...

- Если $\alpha \in \mathbb{F}_2^N$ и m — мощность некоторого его циклотомического класса над подполем $\mathbb{F}_2^n$, то полином

$$m_\alpha(x) = \prod_{i=0}^{m-1} \left(x + \alpha^{2^i}\right) = x^{m-1} + \lambda_{m-2}x^{m-2} + \ldots + \lambda_1 x + \lambda_0$$

является м.м. α, а также для всех элементов, входящих в данный циклотомический класс.

Отсюда выводится метод построения м.м. для данного элемента поля α:

1. определить число m элементов циклотомического класса элемента α;
2. найти коэффициенты полинома $m_\alpha(x)$ путем перемножения скобок $\left(x + \alpha^{2^i}\right)$ для всех $i = \overline{0, m-1}$.

Специальные циклические коды

Если длина циклического кода $n = 2^q - 1$, то:

1. корнями многочлена $x^n + 1$ являются все ненулевые элементы поля $\mathbb{F}_2^q$;
2. порождающими многочленами циклического кода могут быть только произведения минимальных многочленов для некоторых совокупностей элементов $\mathbb{F}_2^q$.

Такие коды:

1. являются подмножеством циклических кодов, имеющим указанную удобную связь между порождающим полиномом и элементами из $\mathbb{F}_2^q$;
2. уже не могут иметь произвольные дли́ны (есть способ обойти это ограничение — использование т.н. *укороченных кодов БЧХ*, которые мы не рассматриваем).

БЧХ-коды: определение (простейший случай)

Пусть выбраны параметры: q, определяющий длину кода $n = 2^q - 1$ и *конструктивное расстояние* $d \leqslant n$.

Код БЧХ есть циклический (n, k)-код, в котором порождающий многочлен $g(x)$ имеет корнями элементы $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \ldots, \alpha^{d-1}$ поля $F = \mathbb{F}_2^q$ (называемые *нулями БЧХ-кода*) и где

α — генератор мультипликативной группы F^*,
$\deg g(x) = m$ — число проверочных бит,
$k = n - m$ — число информационных бит.

При этом:

- $g(x)$ выбирают как НОК полиномов (часто это просто их произведение), являющихся минимальными многочленами для всех нулей кода, попавших в данный циклотомический класс;
- кодовое расстояние построенного кода оказывается не менее выбранного конструктивного расстояния d.

БЧХ-код: кодовое расстояние не менее конструктивного

Теорема

Пусть БЧХ-код длиной $n = 2^q - 1$ с конструктивным расстоянием d задаётся кодирующим многочленом

$$g(x) = \text{НОК}\,(\,m_1(x), \ldots, m_{d-1}(x)\,),$$

где $m_i(x)$, $i = \overline{1, d-1}$ — минимальные многочлены нулей $\alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{d-1}$ кода.
Тогда кодовое расстояние данного БЧХ-кода не менее d.

Доказательство

Покажем, что многочлен $h(x)$ с корнями $\alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{d-1}$ имеет не менее d ненулевых элементов.
Предположим противное. Тогда $h(x)$ можно записать в виде

$$h(x) = b_1 x^{n_1} + b_2 x^{n_2} + \ldots + b_{d-1} x^{n_{d-1}}.$$

БЧХ-код: кодовое расстояние не менее конструктивного...

Доказательство (продолжение)

Поскольку $\alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{d-1}$ *— корни* $h(x)$, *его коэффициенты* $b_1, \ldots, b_{d-1}$ *должны удовлетворять линейной системе*

$$\begin{cases} b_1\alpha^{n_1} & + & \ldots & + & b_{d-1}\alpha^{n_{d-1}} & = & 0 \\ b_1\alpha^{2n_1} & + & \ldots & + & b_{d-1}\alpha^{2n_{d-1}} & = & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & \ldots \\ b_1\alpha^{(d-1)n_1} & + & \ldots & + & b_{d-1}\alpha^{(d-1)n_{d-1}} & = & 0 \end{cases}$$

Матрица A *системы невырождена, т.к. её определитель Вандермонда отличен от нуля:*

$$|A| = \prod_{i>j} \left(\alpha^{n_i} - \alpha^{n_j} \right) \neq 0, \quad n_j < n_i < 2^q.$$

Следовательно, $b_1 = \ldots = b_{d-1} = 0$ *— противоречие.*

Коды БЧХ: синдромы

Поскольку все кодовые слова циклического кода C делятся на полином $g(x)$ с корнями $\alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{d-1}$, то

$$v(x) \in C \Leftrightarrow v(\alpha^i) = 0,\ i = \overline{1, d-1}.$$

Определение

Синдромами принятого полинома $w(x)$, закодированного БЧХ-кодом с нулями α^i, $i = \overline{1, d-1}$ и, возможно, содержащего ошибки, назовём значения $w(x)$ в нулях кода: $s_i = w(\alpha^i)$.

Ясно, что

$$\text{«все синдромы равны нулю»} \Leftrightarrow w(x) \text{ — кодовое слово.}$$

Определение синдрома для БЧХ-кода, очевидно, есть перефразировка в терминах нулей кода полиномов синдрома для циклического кода.

Разделы

Построения кодов БЧХ для $q = 3,\ n = 7,\ a(x) = x^3 + x + 1$

Пусть $q = 3$, т.е. строим БЧХ-коды для поля $F = \mathbb{F}_2^3$ и $n = 7$.
В качестве порождающего поле $F = \mathbb{F}_2[x]/(a(x))$ многочлена возьмём примитивный многочлен $a(x) = x^3 + x + 1$.

$a(x)$ — м.м. для генератора $x = \alpha \in F^*$ и F^* разбивается на следующие циклотомические классы над $\mathbb{F}_2$ (было ранее):

$$\{1\},\ \{\alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^4\},\ \{\alpha^3,\ \alpha^6,\ \alpha^5\}.$$

1. **Код БЧХ, исправляющий $r = 1$ ошибку** (код Хэмминга).
Тогда $d - 1 = 2r = 2$ и элементы $\alpha,\ \alpha^2$ попадают в один циклотомический класс.
М.м. для всех элементов этого класса — $a(x)$, поэтому порождающий полином $g(x) = a(x)$, $m = \deg g(x) = 3$ и в результате получаем уже известный $(7, 4, 3)$-код.

Построения кодов БЧХ для $q = 3,\ n = 7,\ a(x) = x^3 + x + 1$...

2. **Код БЧХ, исправляющий не менее $r = 2$ ошибок.**

Поскольку $d - 1 = 2r = 4$, то порождающий полином $g(x)$ есть многочлен минимальной степени с корнями $\alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^3,\ \alpha^4$ из поля F.

Данные элементы входят в два циклотомических класса: $\{\alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^4\}$ и $\{\alpha^3,\ \alpha^6,\ \alpha^5\}$, порождаемых α и α^3 соответственно, следовательно $g(x) = g_\alpha(x) \cdot g_{\alpha^3}(x)$, где $g_\alpha(x)$ и $g_{\alpha^3}(x)$ — м.м. для α и α^3 соответственно.

М.м. для α известен: $g_\alpha(x) = a(x) = x^3 + x + 1$.

Найдем м.м. для α^3:

$$g_{\alpha^3}(x) = \left(x + \alpha^3\right)\left(x + \alpha^5\right)\left(x + \alpha^6\right) =$$

$$= x^3 + \left(\alpha^3 + \alpha^5 + \alpha^6\right) x^2 + \left(\alpha^8 + \alpha^9 + \alpha^{11}\right) x + \alpha^{14}.$$

Построения кодов БЧХ для $q = 3,\ n = 7,\ a(x) = x^3 + x + 1$...

Вычислим коэффициенты $g_{\alpha^3}(x)$.
Поскольку α — примитивный элемент поля $\mathbb{F}_2[x]/\left(x^3 + x + 1\right)$, то $\alpha^7 = 1$, $\alpha^3 = \alpha + 1$ и

$$
\begin{aligned}
\alpha^3 + \alpha^5 + \alpha^6 &= \alpha + 1 + (\alpha + 1)^2 + \alpha^2(\alpha + 1) = \\
&= \alpha + 1 + \alpha^2 + 1 + \alpha^3 + \alpha^2 = 1\,, \\
\alpha^8 + \alpha^9 + \alpha^{11} &= \alpha^2 + \alpha + \alpha^4 = \alpha^2 + \alpha + \alpha(\alpha + 1) = 0\,, \\
\alpha^{14} &= 1\,.
\end{aligned}
$$

Таким образом, $g_{\alpha^3}(x) = x^3 + x^2 + 1$ и

$$
\begin{gathered}
g(x) = g_\alpha(x) \cdot g_{\alpha^3}(x) = (x^3 + x + 1)(x^3 + x^2 + 1) = \\
= x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1, \quad \deg g(x) = 6,\ k = 7 - 6 = 1.
\end{gathered}
$$

В результате построен тривиальный $(7, 1, 7)$-код, содержащий всего два кодовых слова $\boldsymbol{v}_1 = [0000000]$, $\boldsymbol{v}_2 = [1111111]$ и исправляющий 3 ошибки.

Построения кодов БЧХ для $q = 4$, $n = 15$, $a(x) = x^4 + x + 1$

Мы видим, что код получился плохой: хотя он и исправляет больше ошибок, чем планировалось, его скорость равна $R = 1/7$, т.е. очень мала.

Попытаемся построить лучший код для исправления двух ошибок, взяв бóльшую его длину: $q = 4$, $n = 2^q - 1 = 15$.

3. **Код БЧХ, исправляющий $r = 2$ ошибки.**
В качестве порождающего поле $F = \mathbb{F}_2[x]/(a(x))$ многочлена возьмём примитивный многочлен $a(x) = x^4 + x + 1$.

Если α — генератор в F^*, то нулями кода будут $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4$, располагающиеся в двух циклотомических классах:

$$\{\alpha, \alpha^2, \alpha^4, \alpha^8\} \text{ и } \{\alpha^3, \alpha^6, \alpha^{12}, \alpha^9\}.$$

Построения кодов БЧХ для $q = 4$, $n = 15$, $a(x) = x^4 + x + 1$...

Минимальные многочлены для всех элементов этих классов:

первого (α): $g_\alpha(x) = a(x)$.
второго (α^3): $g_{\alpha^3}(x) = (x - \alpha^3)(x - \alpha^6)(x - \alpha^9)(x - \alpha^{12}) =$
$\ldots = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1.$

Порождающий полином есть

$$g(x) = g_\alpha(x) \cdot g_{\alpha^3}(x) = x^8 + x^7 + x^6 + x^4 + 1.$$

В результате $k = 15 - 8 = 7$ и, можно показать, $d = 5$, т.е. получен БЧХ $(15, 7, 5)$-код со скоростью уже $R = 7/15 > 1/7$.

Построения кодов БЧХ для $q = 4$, $n = 15$, $a(x) = x^4 + x + 1$...

В том же поле F построим

4. Код БЧХ, исправляющий $r = 3$ ошибки.
Пусть α — генератор F^* (т.е. $\alpha^{15} = 1$, $\alpha^4 = \alpha + 1$).
Нулями конструируемого БЧХ-кода будут $\alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^6$, которые попадают в циклотомические классы

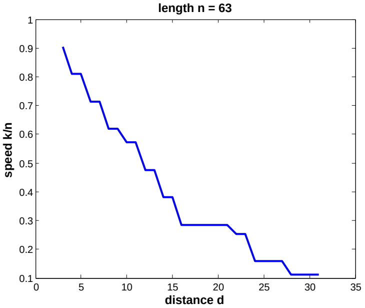
$$\{\alpha, \alpha^2, \alpha^4, \alpha^8\}, \{\alpha^3, \alpha^6, \alpha^9, \alpha^{12}\}, \{\alpha^5, \alpha^{10}\}.$$

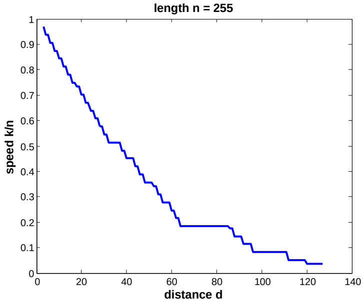
Минимальные многочлены для элементов этих классов суть $g_\alpha(x) = x^4 + x + 1$, $g_{\alpha^3}(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ и $g_{\alpha^5}(x) = x^2 + x + 1$, а порождающий полином полученного $(15, 5, 7)$-кода БЧХ есть их произведение:

$$g(x) = g_\alpha(x) \cdot g_{\alpha^3}(x) \cdot g_{\alpha^5}(x) = x^{10} + x^8 + x^5 + x^4 + x^2 + x + 1.$$

Этот код при той же длине, что и предыдущий, исправляет больше ошибок, но имеет меньшую скорость.

Коды БЧХ: зависимости скорости от кодового расстояния





Графики скорости k/n кодов БЧХ в зависимости от кодового расстояния d для данной длины кода n.

«Ступеньки» на графиках соответствуют ситуации, когда реальное кодовое расстояние оказывается больше конструктивного, задаваемого при построении кода.

Разделы

Декодирование кода Хэмминга: как это делается

Код Хэмминга является простейшим кодом БЧХ, у которого $r = 1$, $d = 3$, и поэтому его нулями являются α и α^2, где α — примитивный элемент поля $\mathbb{F}_2^n$, $n = 2^q - 1$.

Для декодирования принятого слова $w(x)$ вычисляем синдром $s_1 = w(\alpha)$ (синдром $s_2 = w(\alpha^2)$ нам не потребуется).

При

- $s_1 = 0$ — полагаем $\widehat{v}(x) = w(x)$ и если ошибок не произошло, то $\widehat{v}(x) = v(x)$.
- $s_1 \neq 0$ — определяем значение $j \in \{0, \ldots, n-1\}$, для которого $\alpha^j = s_1$, полагаем $\widehat{v}(x) = w(x) + x^j$ и если произошла единичная ошибка, то её позиция j и $\widehat{v}(x) = w(x)$ (иначе произошло бо́льшее количество ошибок и $\widehat{v}(x) \neq v(x)$).

Декодирование кода Хэмминга: пример

Рассматриваем $(7,4)$-код Хэмминга, построенный в примере для циклических кодов (порождающий полином — $g(x) = x^3 + x + 1$), где было найдено систематическое кодирование входного полинома $u(x) = x^3 + x^2 \leftrightarrow [0011]^T$:

$$v(x) = x^6 + x^5 + x \leftrightarrow [0100011]^T.$$

Теперь мы построили этот же код с использованием поля $F = \mathbb{F}_2[x]/\left(x^3 + x + 1\right)$, в котором $\alpha^3 = \alpha + 1$ и $\alpha^7 = 1$ для примитивного элемента $\alpha \in F^*$.

Пусть при передаче сообщения произошла ошибка в позиции 5, т.е. принято слово $[0100001]^T \leftrightarrow w(x) = x^6 + x$ и (неизвестный) полином ошибок $e(x) = x^5$.

Для декодирования $w(x)$ найдем синдром

$$s_1 = w(\alpha) = \alpha^6 + \alpha = \left(\alpha^3\right)^2 + \alpha = (\alpha + 1)^2 + \alpha = \\ = \alpha^2 + \alpha + 1 \neq 0.$$

Декодирование кода Хэмминга: пример... $s_1 = \alpha^2 + \alpha + 1$

Найдём α^j для $j = 0, \ldots, 6$, т.е. все ненулевые элементы поля $\mathbb{F}_2[x]/(x^3 + x + 1)$:

$$\alpha^0 = 1, \qquad \alpha^3 = \alpha + 1,$$
$$\alpha^1 = \alpha, \qquad \alpha^4 = \alpha(\alpha + 1) = \alpha^2 + \alpha,$$
$$\alpha^2 = \alpha^2, \qquad \alpha^5 = \alpha^2(\alpha + 1) = \alpha^3 + \alpha^2 = \alpha^2 + \alpha + 1 = s_1,$$
$$\alpha^6 = (\alpha + 1)^2 = \alpha^2 + 1$$ — можно уже не вычислять

Отсюда следует, что ошибка произошла в позиции 5 и, таким образом, $\widehat{v}(x) = w(x) + x^5 = x^6 + x^5 + x = v(x)$.

Если же произошло **две ошибки**, например, в 5-й и 4-й позициях, то $w(x) = x^6 + x^4 + x$, $s_1 = 1$, $j = 0$, $\widehat{v}(x) = x^6 + x^4 + x + 1 \leftrightarrow [1100101]^T$ и будет раскодировано сообщение $[0101]^T$ вместо посланного $u(x) \leftrightarrow [0011]^T$.

Коды БЧХ: декодирование

Пусть при передаче сообщения, закодированого кодом БЧХ в поле $\mathbb{F}_2^q = \mathbb{F}[x]/(a(x))$ произошло ν ошибок.
Тогда $e(x) = x^{j_1} + x^{j_2} + \cdots + x^{j_\nu}$, где степени $j_1, \ldots, j_\nu$ — позиции ошибок, $\nu \leqslant r = [(d-1)/2]$.

Запишем равенства $s_i = w(\alpha^i) = e(\alpha^i)$, $i = \overline{1, 2r}$ как систему:

$$\left\{\begin{array}{lcl} s_1 & = & \alpha^{j_1} + \alpha^{j_2} + \ldots + \alpha^{j_\nu}, \\ s_2 & = & (\alpha^{j_1})^2 + (\alpha^{j_2})^2 + \ldots + (\alpha^{j_\nu})^2, \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ s_{2r} & = & (\alpha^{j_1})^{2r} + \ldots + (\alpha^{j_\nu})^{2r}. \end{array}\right.$$

Любое решение $(j_1, \ldots, j_\nu)$ данной системы для некоторого $\nu \leqslant r$ будет искомым (такое решение всегда существует и единственно, т.к. код по построению способен исправлять до r ошибок).

Коды БЧХ: декодирование...

Введя обозначения $\beta_i = \alpha^{j_i}$, $i = \overline{1, 2r}$ (величины β_i называют *локаторами ошибок*), перепишем систему:

$$\left\{\begin{array}{l} s_1 = \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_\nu, \\ s_2 = \beta_1^2 + \beta_2^2 + \ldots + \beta_\nu^2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s_{2r} = \beta_1^{2r} + \beta_2^{2r} + \ldots + \beta_\nu^{2r}. \end{array}\right. \qquad (1)$$

Рассмотрим *полином локаторов ошибок*

$$\sigma(x) = \prod_{i=1}^{\nu}(1 + \beta_i x) = 1 + \sigma_1 x + \sigma_2 x^2 + \cdots + \sigma_\nu x^\nu,$$

корнями которого являются величины $\beta_i^{-1} = \alpha^{-j_i}$, $i = \overline{1, 2r}$.

Для продвинутых: это *производящий полином*.

Коды БЧХ: декодирование...

Связь между σ_k и β_i определяет теорема Виета:

$$\begin{cases} \sigma_1 = \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_\nu, \\ \sigma_2 = \beta_1\beta_2 + \beta_2\beta_3 + \beta_1\beta_3 + \ldots + \beta_{\nu-1}\beta_\nu, \\ \sigma_3 = \sum\limits_{i_1<i_2<i_3} \beta_{i_1}\beta_{i_2}\beta_{i_3}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sigma_\nu = \beta_1\beta_2\ldots\beta_\nu. \end{cases} \tag{2}$$

Введённые системы задают величины синдромов и коэффициентов полинома локаторов ошибок соответственно как значения симметрических полиномов:

(1) — суммы k-ых степеней β_i, $k = \overline{1, 2r}$;
(2) — элементарных.

Соотношения между этими двумя типами симметрических полиномов задаются *тождествами Ньютона-Жирара*.

Коды БЧХ: декодирование...

В двоичной арифметике тождества Ньютона-Жирара записываются как

$$\begin{aligned}
s_1 + \sigma_1 &= 0,\\
s_2 + \sigma_1 s_1 + 2\sigma_2 &= 0,\\
s_3 + \sigma_1 s_2 + \sigma_2 s_1 + 3\sigma_3 &= 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
s_\nu + \sigma_1 s_{\nu-1} + \ldots + \sigma_{\nu-1} s_1 + \nu\sigma_\nu &= 0,
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}
s_{\nu+1} + \sigma_1 s_\nu + \ldots + \sigma_{\nu-1} s_2 + \sigma_\nu s_1 &= 0,\\
s_{\nu+2} + \sigma_1 s_{\nu+1} + \ldots + \sigma_{\nu-1} s_3 + \sigma_\nu s_2 &= 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
s_{2r} + \sigma_1 s_{2r-1} + \ldots + \sigma_{\nu-1} s_{2r-\nu+1} + \sigma_\nu s_{2r-\nu} &= 0.
\end{aligned}\right\}$$

Последние равенства — СЛАУ для ключевого уравнения

Коды БЧХ: декодирование...

Последние $2r - \nu + 1$ уравнений данной системы являются СЛАУ относительно $\sigma_1, \ldots, \sigma_\nu$.

Её решение позволяет найти полином локаторов ошибок $\sigma(x)$.

Далее полным перебором можно отыскать все его корни α^{-j_i}, а по ним — позиции ошибок j_i, $i = \overline{1, 2r}$.

Основная трудность в решении данной СЛАУ состоит в том, что значение ν неизвестно.

Решатели СЛАУ для ключевого уравнения называются *декодерами*.

Рассмотрим два наиболее простых из них.

Коды БЧХ: декодирование...

1. *Декодер PGZ (Peterson-Gorenstein-Zierler)* — состоит в последовательном решении рассматриваемой СЛАУ для $\nu = r, r-1, \ldots$ до тех пор, пока матрица очередной СЛАУ не окажется невырожденной (при переходе от r к $r-1$ полагаем $\sigma_r = 0$).

2. *Декодер на базе расширенного алгоритма Евклида*

Для нахождения полинома локаторов ошибок $\sigma(x)$ и его корней введём вспомогательный *синдромный полином*

$$s(x) = 1 + s_1 x + s_2 x^2 + \ldots + s_{2r} x^{2r},$$

где $s_i = w(\alpha^i),\ i = 1, \ldots, 2r$ — синдромы.

Для продвинутых: это тоже производящий полином.

Коды БЧХ: декодирование...

Перемножим полиномы — синдромный и локаторов ошибок:

$$\lambda(x) = s(x)\sigma(x) = 1 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \ldots + \lambda_{2r+\nu} x^{2r+\nu}.$$

Здесь коэффициенты $\lambda_j = \sum_{i=0}^{j} s_i \sigma_{j-i}$ определяются соотношением для произведения многочленов.

Поскольку $\sigma_0 = 1$, СЛАУ эквивалентна условию $\lambda_{\nu+1} = \lambda_{\nu+2} = \ldots = \lambda_{2r} = 0$, т.е.

$$\lambda(x) = \left(1 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \ldots + \lambda_\nu x^\nu\right) + \\ + \left(\lambda_{2r+1} x^{2r+1} + \ldots + \lambda_{2r+\nu} x^{2r+\nu}\right).$$

Рассмотрим остаток от деления $\lambda(x)$ на x^{2r+1}. Ясно, что

$$\lambda(x) \equiv_{x^{2r+1}} 1 + \lambda_1 x + \cdots + \lambda_\nu x^\nu.$$

Коды БЧХ: декодирование...

Таким образом, некоторый многочлен $\lambda(x)$ и полином локаторов ошибок $\sigma(x)$ удовлетворяют *ключевому уравнению*

$$s(x)\sigma(x) + x^{2r+1}a(x) = \lambda(x) \qquad (*)$$

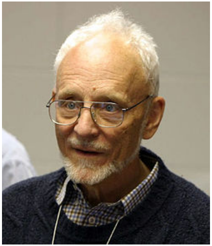
(напоминание: работаем в поле $\mathbb{F}_2^q \cong \mathbb{F}_2[x]/(a(x))$).

Относительно $\sigma(x)$ данное уравнение может быть решено с помощью расширенного алгоритма Евклида для пары многочленов $\left(x^{2r+1}, s(x)\right)$ со свойствами:

- условие остановки — степень очередного остатка $\leqslant r$;
- количество фактически совершенных ошибок — $\nu = \deg\sigma(x)$.

Замечание: наиболее эффективным декодером для (не слишком длинных) кодов БЧХ является *декодер Берлекэмпа-Мэсси*.

Э. Берлекэмп и Д. Мэсси



Элвин Ральф Берлекэмп
(Elwyn Ralph Berlekamp, 1940)
— американский математик, внесший существенный вклад в теории кодирования и комбинаторных игр (игра Го). Помимо математики, занимался инвестиционным менеджментом.

Джеймс Ли Мэсси
(James Lee Massey, 1934–2013)
— выдающийся американский ученый, внесший значительный вклад в теорию информации и криптографию. В частности, разработал (в соавторстве) шифры SAFER и IDEA.

Коды БЧХ: общая схема декодирования

Пусть принято слово $w(x)$ — сообщение, закодированное (n,k,d)-кодом БЧХ и, возможно, содержащее ошибки, а α — генератор мулитипликативной группы поля, порождённого кодирующим полиномом.

1. Для слова $w(x)$ найти все синдромы $s_i = w(\alpha^i)$, $i = \overline{1, d-1}$.
2. Найти полином локаторов ошибок $\sigma(x)$, используя тот или иной декодер.
3. Найти все корни $\sigma(x)$ полным перебором всех элементов поля $\mathbb{F}_2^q$ (их $2^q - 1 = n$, т.е. алгоритм линейный по n, чего и добивались!); пусть найденные корни суть $\alpha^{k_1}, \ldots, \alpha^{k_\nu}$.
4. Найти позиции ошибок $j_i \equiv_n -k_i$, $i = \overline{1, \nu}$.
5. Исправить ошибки, получив слово
$$\widehat{v}(x) = w(x) + x^{j_1} + \ldots + x^{j_\nu}.$$
6. Найти все значения $\widehat{v}(\alpha^i)$, $i = \overline{1, d-1}$; если не все они равны нулю, то выдать отказ от декодирования.

Коды БЧХ: пример декодирования

Пусть БЧХ $(15, 5, 7)$-код (т.е. $r = 3$) построен в поле $\mathbb{F}_2^4 \cong \mathbb{F}_2[x]/\left(x^4 + x + 1\right)$.

Пусть передаётся сообщение $[01101]^T \leftrightarrow u(x) = x^4 + x^2 + x$.

При систематическом кодировании (опустим этот этап) кодовое слово есть

$$v(x) = x^{14} + x^{12} + x^{11} + x^8 + x^4 + x^3 + x^2 + x \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow [011110001001101]^T$$

(убеждаемся, что биты сообщения находятся в крайне правых позициях кодового слова).

Пусть ошибки произошли в 0-й, 6-й и 12-й позициях, т.е. принятое слово —

$$w(x) = x^{14} + x^{11} + x^8 + x^6 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow [\textit{напишите сами!}]^T.$$

Коды БЧХ: пример декодирования... $F = \mathbb{F}_2[x]/(x^4 + x + 1)$

Ненулевые элементы поля F как степени генератора α:

α^1	α
α^2	α^2
α^3	α^3
α^4	$\alpha + 1$
α^5	$\alpha^2 + \alpha$
α^6	$\alpha^3 + \alpha^2$
α^7	$\alpha^3 + \alpha + 1$
α^8	$\alpha^2 + 1$
α^9	$\alpha^3 + \alpha$
α^{10}	$\alpha^2 + \alpha + 1$
α^{11}	$\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha$
α^{12}	$\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1$
α^{13}	$\alpha^3 + \alpha^2 + 1$
α^{14}	$\alpha^3 + 1$
α^{15}	1

Коды БЧХ: пример декодирования... $\alpha^4 = \alpha + 1$

1. Найдём $2r = 6$ синдромов для принятого слова:

$$s_1 = w(\alpha) =$$
$$= \alpha^3 + 1 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + \alpha^2 + 1 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 + \alpha^3 +$$
$$+ \alpha^2 + \alpha + 1 = \alpha,$$
$$s_2 = w(\alpha^2) = (w(\alpha))^2 = \alpha^2,$$
$$s_3 = w(\alpha^3) = \alpha^{42} + \alpha^{33} + \alpha^{24} + \alpha^{18} + \alpha^{12} + \alpha^9 + \alpha^6 + \alpha^3 + 1 = \ldots$$
$$\ldots = \alpha^6 + \alpha^3 + 1 = \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha^3 + 1 = \alpha^2 + 1 = \alpha^8,$$
$$s_4 = w(\alpha^4) = (w(\alpha^2))^2 = \alpha^4,$$
$$s_5 = w(\alpha^5) = \alpha^{70} + \alpha^{55} + \alpha^{40} + \alpha^{30} + \alpha^{20} + \alpha^{15} + \alpha^{10} + \alpha^5 + 1 =$$
$$= \alpha^{10} + \alpha^{10} + \alpha^{10} + 1 + \alpha^5 + 1 + \alpha^{10} + \alpha^5 + 1 = 1,$$
$$s_6 = w(\alpha^6) = (w(\alpha^3))^2 = (\alpha^2 + 1)^2 = \alpha^4 + 1 = \alpha.$$

Таким образом, синдромный полином есть

$$s(x) = \alpha x^6 + x^5 + \alpha^4 x^4 + \alpha^8 x^3 + \alpha^2 x^2 + \alpha x + 1.$$

Коды БЧХ: пример декодирования...

2. Выбираем декодер на базе расширенного алгоритма Евклида — решаем уравнение $x^7 a(x) + s(x)\sigma(x) = \lambda(x)$ (находим $\sigma(x)$ по $a(x)$ и $s(x)$):

Шаг 0.

$$\begin{aligned} r_{-2}(x) &= x^7, \\ r_{-1}(x) &= s(x) = \alpha x^6 + x^5 + \alpha^4 x^4 + \alpha^8 x^3 + \\ &\quad + \alpha^2 x^2 + \alpha x + 1, \\ y_{-2}(x) &= 0, \\ y_{-1}(x) &= 1. \end{aligned}$$

Шаг 1.

$$\begin{aligned} r_{-2}(x) &= r_{-1}(x) q_0(x) + r_0(x), \\ q_0(x) &= \alpha^{14} x + \alpha^{13}, \\ r_0(x) &= \alpha^8 x^5 + \alpha^{12} x^4 + \alpha^{11} x^3 + \alpha^{13}, \\ y_0(x) &= y_{-2}(x) + y_{-1}(x) q_0(x) = q_0(x) = \alpha^{14} x + \alpha^{13}. \end{aligned}$$

Коды БЧХ: пример декодирования...

Шаг 2.
$$\begin{aligned} r_{-1}(x) &= r_0(x)q_1(x) + r_1(x), \\ q_1(x) &= \alpha^8 x + \alpha^2, \\ r_1(x) &= \alpha^{14}x^4 + \alpha^3 x^3 + \alpha^2 x^2 + \alpha^{11}x, \\ y_1(x) &= y_{-1}(x) + y_0(x)q_1(x) = \alpha^7 x^2 + \alpha^{11}x. \end{aligned}$$

Шаг 3.
$$\begin{aligned} r_0(x) &= r_1(x)q_2(x) + r_2(x), \\ q_2(x) &= \alpha^9 x, \\ r_2(x) &= \alpha^5 x + \alpha^{13}, \\ y_2(x) &= y_0(x) + y_1(x)q_2(x) = \alpha x^3 + \alpha^5 x^2 + \alpha^{14}x + \alpha^{13}. \end{aligned}$$

Это последний шаг алгоритма Евклида, т.к. текущий остаток $r_2(x)$ имеет степень $1 \leqslant r = 3$.

Таким образом, полином локаторов ошибок найден:

$$\sigma(x) = y_2(x) = \alpha x^3 + \alpha^5 x^2 + \alpha^{14}x + \alpha^{13}$$

и $\nu = \deg \sigma(x) = 3$.

Коды БЧХ: пример декодирования...

3. Найдём корни $\sigma(x)$ полным перебором ($\alpha^4 = \alpha + 1$):

$$\begin{aligned}
\sigma(\alpha) &= \alpha^4 + \alpha^7 + 1 + \alpha^{13} = \alpha^2,\\
\sigma(\alpha^2) &= \alpha^7 + \alpha^9 + \alpha + \alpha^{13} = \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha,\\
\sigma(\alpha^3) &= \alpha^{10} + \alpha^{11} + \alpha^2 + \alpha^{13} = 0,\\
\sigma(\alpha^4) &= \alpha^{13} + \alpha^{13} + \alpha^3 + \alpha^{13} = \alpha^2 + 1,\\
\sigma(\alpha^5) &= \alpha + 1 + \alpha^4 + \alpha^{13} = \alpha^{13},\\
\sigma(\alpha^6) &= \alpha^4 + \alpha^2 + \alpha^5 + \alpha^{13} = \alpha^3 + \alpha^2,\\
\sigma(\alpha^7) &= \alpha^7 + \alpha^4 + \alpha^6 + \alpha^{13} = \alpha^3 + 1,\\
\sigma(\alpha^8) &= \alpha^{10} + \alpha^6 + \alpha^7 + \alpha^{13} = \alpha^3 + \alpha^2 + 1,\\
\sigma(\alpha^9) &= \alpha^{13} + \alpha^8 + \alpha^8 + \alpha^{13} = 0,\\
\sigma(\alpha^{10}) &= \alpha + \alpha^{10} + \alpha^9 + \alpha^{13} = \alpha,\\
\sigma(\alpha^{11}) &= \alpha^4 + \alpha^{12} + \alpha^{10} + \alpha^{13} = \alpha^2 + \alpha,\\
\sigma(\alpha^{12}) &= \alpha^7 + \alpha^{14} + \alpha^{11} + \alpha^{13} = 1,\\
\sigma(\alpha^{13}) &= \alpha^{10} + \alpha + \alpha^{12} + \alpha^{13} = \alpha^2 + \alpha + 1,\\
\sigma(\alpha^{14}) &= \alpha^{13} + \alpha^3 + \alpha^{13} + \alpha^{13} = \alpha^2 + 1,\\
\sigma(\alpha^{15}) &= \alpha + \alpha^5 + \alpha^{14} + \alpha^{13} = 0.
\end{aligned}$$

Коды БЧХ: пример декодирования...

4. По найденным корням α^3, α^9, α^{15} вычисляем позиции ошибок:

$$\begin{aligned} j_1 &= -3 \equiv_{15} 12, \\ j_2 &= -9 \equiv_{15} 6, \\ j_3 &= -15 \equiv_{15} 0. \end{aligned}$$

5. Имеем: полином ошибок $e(x) = x^{12} + x^6 + 1$ определён правильно, $\widehat{v}(x) = w(x) + e(x) =$

$$= x^{14} + x^{12} + x^{11} + x^8 + x^4 + x^3 + x^2 + x.$$

и кодовое слово восстановлено.

6. Проверка $\widehat{v}(\alpha) = \widehat{v}(\alpha^2) = \ldots = \widehat{v}(\alpha^6) = 0$ говорит от том, что восстановление верное (или же произошло $r \gg 3$ ошибок, но это крайне маловероятно).

БЧХ (n, k, d)-коды: исторические сведения

Первым практически реализованным БЧХ-кодом был $(127, 92, 11)$-код.

В системах передачи данных широко используется двоичный $(255, 231, 7)$-код, построенный с помощью примитивного элемента $\alpha \in \mathbb{F}_2^8$ 255-го порядка:

- степень порождающего многочлена $g(x)$ — 24;
- корни $g(x)$ — α, α^2, α^3, α^4, α^5 и α^6.
- в общем числе слов длины 255 доля кодовых — $2^{-24} \approx \frac{1}{16 \cdot 10^6}$ (при вводе случайных слов только примерно одно из шестнадцати миллионов оказалось бы кодовым).

В течении многих лет не было случая, чтобы ошибка передачи прошла незамеченной.

Для выбора минимальных многочленов при построении БЧХ-кодов составлены специальные таблицы.

БЧХ (n, k, d)-коды: резюме

- БЧХ-коды являются подклассом циклических.
- Самое ценное свойство — возможность построения кода с заданным кодовым расстоянием d.
- Кодирование осуществляется с помощью порождающего полинома, имеющего корнями степени некоторого примитивного элемента поля.
- Декодирование может быть проведено с помощью эффективных алгоритмов (Берлекэмпа-Мэсси, Питерсона-Горенстейна-Цирлера, Евклидов алгоритм, ...).
- Среди кодов БЧХ при небольших длинах существуют хорошие (но, как правило, не лучшие из известных) коды. С ростом n при фиксированном значении скорости кода, к сожалению, $d/n \to 0$, и поэтому при больших длинах приходится использовать другие коды.

Коды Рида–Соломона: общие сведения

Широко используемым частным случаем кодов БЧХ являются *коды Рида-Соломона* (Reed–Solomon codes), которые позволяют исправлять пакеты ошибок.

Пакет ошибок (error burst) — группа битов, в которой два последовательных ошибочных бита всегда разделены правильными битами, число которых менее установленного.

Коды Рида–Соломона:

- небинарные (в частности, очень распространены коды, работающие с байтами);
- часто используются в устройствах цифровой записи звука, в том числе на компакт-диски.

Пример негруппового блокового кода

Пусть по двоичному симметричному каналу с шумом требуется передавать $t = 4$ битовых сообщения S_1, S_2, S_3, S_4 длины 2. Блоковый разделимый негрупповой код C, исправляющий 1 ошибку задаётся таблицей

S	C
00	00110
01	01101
10	10011
11	11000

«Зазор»: $2^5 - 4 \cdot (1 + 5) = 8$ слов; граница Плоткина достигается (проверьте)

Кодовое расстояние построенного кода C равно 3 и построен систематический $(5, 2, 3)$-код, содержащий исходное сообщение (длины 2) в первых двух позициях.

Для сравнения: $(7, 4, 3)$-код Хэмминга кодирует 16 сообщений длины 4.

Применение помехоустойчивого кодирования I

- Далеко не всегда от кода требуется коррекция ошибок. Многие современные каналы связи обладают хорошими характеристиками, и принимающей стороне часто достаточно лишь проверить, успешно ли прошла передача, а конкретные позиции неверных символов её не интересуют.
  В этих случаях применяются коды специально предназначенные для обнаружения ошибок, а не для их исправления.
- Коды используются для получения надежной связи, когда мощность принимаемого сигнала близка к мощности тепловых шумов.
- В военных приложениях — для защиты против намеренно организованной противником интерференции.

Применение помехоустойчивого кодирования II

- Передача данных в вычислительных системах обычно чувствительна даже к очень малой доле ошибок. Здесь помехозащищённые коды используются для
  - защиты данных во внутренних и внешних ЗУ (ленты, диски...),
  - защиты данных неправильного функционирования или шумов в цифровых логических цепях,
  - сжатия (плотной упаковки) данных.
- Теория кодирования применяется также для получения устойчивых признаков из биометрических характеристик (сетчатка глаза, отпечатки пальцев, ...).

> *Вся математика делится на три раздела: небесная механика, гидродинамика и теория кодирования.*
>
> *В. И. Арнольд*

Разделы I

Задача ТК-1

Для линейного кода, заданного своей проверочной матрицей

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

требуется

1. *построить порождающую матрицу G кода для систематического кодирования, при котором биты исходного сообщения переходят в последние биты кодового слова;*
2. *найти такое кодирование для сообщений* $\boldsymbol{u}_1 = [1101]^T$, $\boldsymbol{u}_2 = [1001]^T$.

Задача ТК-1 (I_4 и I_3 — единичные матрицы порядка 4 и 3)...

Решение

Проверочная матрица H имеет размерность 3×7, следовательно код при длине $n = 7$ содержит $m = 3$ проверочных и $k = 7 - 3 = 4$ информационных бит.

Порождающая матрица кода G, обеспечивающая требуемое систематическое кодирование, должна иметь вид $\begin{bmatrix} P \\ I_4 \end{bmatrix}$.

Матрицу P можно получить, если привести проверочную матрицу H к виду $\begin{bmatrix} I_3 & P \end{bmatrix}$, преобразуя строки:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1)\leftrightarrow(3)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1)+(3)\mapsto(1)}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Задача ТК-1...

Теперь можно построить требуемую порождающую матрицу и осуществить кодирование для $\boldsymbol{u}_1 = [1101]^T$, $\boldsymbol{u}_2 = [1001]^T$:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2] = G \times [\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что был задан $(7,4,3)$-код Хэмминга, помещающий информационные биты в последние 4, а проверочные — в первые 3 позиции кода.

Заметим, что традиционно проверочные биты располагаются в $1,\ 2,\ 4,\ 8,\ \ldots$ позициях кодового слова.

Задача ТК-2

Циклический $(9,3)$-код задан своим порождающим полиномом

$$g(x) = x^6 + x^3 + 1.$$

Требуется определить минимальное расстояние кода d, а также осуществить систематическое кодирование полинома

$$u(x) = x^2 + x \leftrightarrow [011]^T.$$

Решение

Для определения минимального кодового расстояния d найдём все кодовые слова:

$$v(x) = g(x)(ax^2 + bx + c) = (x^6 + x^3 + 1)(ax^2 + bx + c) =$$
$$= ax^8 + bx^7 + cx^6 + ax^5 + bx^4 + cx^3 + ax^2 + bx + c,$$
$$a, b, c \in \mathbb{F}_2.$$

Задача ТК-2... $g(x) = x^6 + x^3 + 1,\ u(x) = x^2 + x$

В векторном виде все кодовые слова представляются как

$$[a,\ b,\ c,\ a,\ b,\ c,\ a,\ b,\ c].$$

Очевидно, что минимальный хэммингов вес ненулевого кодового слова равен 3 и, следовательно, $d = 3$.

Проводим систематическое кодирование сообщения $u(x)$:

$$v(x) = x^6 u(x) + r(x) \boxed{=}$$

$$r(x) \equiv_{g(x)} x^6 u(x) \equiv_{x^6+x^3+1} x^8 + x^7 = x^5 + x^4 + x^2 + x,$$

$$\boxed{=}\ x^8 + x^7 + x^5 + x^4 + x^2 + x \leftrightarrow [011011011]^T$$

и убеждаемся, что биты сообщения находятся в крайних правых позициях кодового слова.

Задача ТК-3

Рассмотрим код Хэмминга систематического кодирования с порождающим полиномом $\alpha \in \mathbb{F}_2[x]/(x^3+x+1)$*.*
Требуется декодировать полученные полиномы

1. $w_1(x) = x^6 + x^2 + x,$
2. $w_2(x) = x^6 + x^5 + x^3 + x^2 + x,$
3. $w_3(x) = x^6 + x^3 + x^2 + x.$

Решение Очевидно, имеем $(7,4,3)$-код Хэмминга, в котором сообщение есть коэффициенты перед степенями $3, \ldots, 6$ формальной переменной x кодового полинома.

Для декодирования необходимо вычислить синдром $s = w(\alpha)$ принятого слова. Если $s = 0$, то считаем, что ошибок при передаче не произошло; иначе необходимо найти такое k, что $\alpha^k = s$ и перед восстановлением сообщения инвертировать k-й разряд $w(\alpha)$ (что, очевидно, имеет смысл при $k \in \{3, \ldots, 6\}$).

Задача ТК-3... ($\alpha^3 = \alpha + 1$)

❶ $\underline{w_1(x) = x^6 + x^2 + x} \leftrightarrow [0110001]$

$$s = \alpha^6 + \alpha^2 + \alpha = (\alpha^3)^2 + \alpha^2 + \alpha =$$
$$= (\alpha+1)^2 + \alpha^2 + \alpha = \alpha^2 + 1 + \alpha^2 + \alpha = \alpha + 1 \neq 0.$$

Очевидно, $\alpha + 1 = \alpha^3$, т.е. $k = 3$, ошибка произошла в 3-м разряде и $\widehat{v}(x) = w(x) + e(x) = x^6 + x^3 + x^2 + x \leftrightarrow [0111001]$, $u(x) \leftrightarrow [1001]$.

❷ $\underline{w_2(x) = x^6 + x^5 + x^3 + x^2 + x} \leftrightarrow [0111011]$

$$s = \alpha^6+\alpha^5+\alpha^3+\alpha^2+\alpha = (\alpha+1)^2+(\alpha+1)\alpha^2+\alpha+1+\alpha^2+\alpha =$$
$$= \alpha^2 + 1 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha^2 + 1 = \alpha^3 + \alpha^2 = \alpha^2 + \alpha + 1 \neq 0.$$

Очевидно, $\alpha^3 + \alpha^2 = (\alpha+1)\alpha^2 = \alpha^5$, т.е. $k = 5$, ошибка произошла в 5-м разряде и снова $u(x) \leftrightarrow [1001]$.

❸ $\underline{w_3(x) = x^6 + x^3 + x^2 + x} \leftrightarrow [0111001]$. Убеждаемся, что в этом случае $s = 0$, т.е. ошибок не произошло и $u(x) \leftrightarrow [1001]$

Задача ТК-3... ($\alpha^3 = \alpha + 1$)

Заметечание. Декодирование систематического кода Хэмминга можно осуществить делением принятого полинома на порождающий: остаток от деления есть синдром s:

$$w(x) = q(x) \cdot g(x) + r(x), \quad r(x) = s.$$

В нашем случае:

1. $x^6 + x^2 + x = (x^3 + x + 1)^2 + x + 1;$
2. $x^6 + x^5 + x^3 + x^2 + x =$
   $= (x^3 + x^2 + x + 1)(x^3 + x + 1) + x^2 + x + 1;$
3. $x^6 + x^3 + x^2 + x = (x^3 + x)(x^3 + x + 1) + 0.$

Задача ТК-4

Для кода БЧХ с нулями α, α^2, α^3 и α^4, где α — примитивный элемент поля $F = \mathbb{F}_2[x]/\left(x^4 + x + 1\right)$ и принятого слова

$$w(x) = x^{14} + x^{10} + x^5 + x^4.$$

найти полином локаторов ошибок $\sigma(x)$.

Решение

Для удобства вычислений в поле F построим таблицу соответствий между степенным и полиномиальным представлением элементов поля.

Задача ТК-4... $\alpha^4 = \alpha + 1$

α^1	α
α^2	α^2
α^3	α^3
α^4	$\alpha + 1$
α^5	$\alpha^2 + \alpha$
α^6	$\alpha^3 + \alpha^2$
α^7	$\alpha^3 + \alpha + 1$
α^8	$\alpha^2 + 1$
α^9	$\alpha^3 + \alpha$
α^{10}	$\alpha^2 + \alpha + 1$
α^{11}	$\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha$
α^{12}	$\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1$
α^{13}	$\alpha^3 + \alpha^2 + 1$
α^{14}	$\alpha^3 + 1$
α^{15}	1

Задача ТК-4... $\alpha^4 = \alpha + 1$, $w(x) = x^{14} + x^{10} + x^5 + x^4$

С помощью этой таблицы вычислим синдромы:

$$\begin{aligned}
s_1 &= w(\alpha) = \alpha^{14} + \alpha^{10} + \alpha^5 + \alpha^4 = \\
&\quad = (\alpha^3 + 1) + (\alpha^2 + \alpha + 1) + (\alpha^2 + \alpha) + (\alpha + 1) = \\
&\quad = \alpha^3 + \alpha + 1 = \alpha^7, \\
s_2 &= w(\alpha^2) = (w(\alpha))^2 = \alpha^{14}, \\
s_3 &= w(\alpha^3) = \alpha^{12} + 1 + 1 + \alpha^{12} = 0, \\
s_4 &= w(\alpha^4) = \left(w(\alpha^2)\right)^2 = \alpha^{28} = \alpha^{13}.
\end{aligned}$$

Синдромный полином — $s(x) = \alpha^{13}x^4 + \alpha^{14}x^2 + \alpha^7 x + 1$.
Синдромов всего четыре, следовательно, $r = 2$.

Полином локаторов ошибок $\sigma(x)$ является решением уравнения

$$x^{2r+1}a(x) + s(x)\sigma(x) = \lambda(x), \ \deg\lambda(x) \leqslant r.$$

Задача ТК-4... $x^{2r+1}a(x) + s(x)\sigma(x) = \lambda(x),\ \deg\lambda(x) \leqslant 2$

Решаем с помощью расширенного алгоритма Евклида:

Шаг 0. $r_{-2}(x) = x^5,$ // Инициализация

$r_{-1}(x) = \alpha^{13}x^4 + \alpha^{14}x^2 + \alpha^7 x + 1,$

$y_{-2}(x) = 0,\qquad y_{-1}(x) = 1.$

Шаг 1. $r_{-2}(x) = r_{-1}(x)q_0(x) + r_0(x),$

// Делим $r_{-2}(x)$ на $r_{-1}(x)$ с остатком

$q_0(x) = \alpha^2 x,$

$r_0(x) = \alpha x^3 + \alpha^9 x^2 + \alpha^2 x,$

$y_0(x) = y_{-2}(x) - y_{-1}(x)q_0(x) = -q_0(x) = \alpha^2 x.$

Шаг 2. $r_{-1}(x) = r_0(x)q_1(x) + r_1(x),$

// Делим $r_{-1}(x)$ на $r_0(x)$ с остатком

$q_1(x) = \alpha^{12}x + \alpha^5,$

$r_1(x) = \alpha^{14}x^2 + 1$ — $\deg r_1(x) = 2 \leqslant r,$

$y_1(x) = y_{-1}(x) - y_0(x)q_1(x) =$

$$= 1 + \alpha^2 x(\alpha^{12}x + \alpha^5) = \overbrace{\alpha^{14}x^2 + \alpha^7 x + 1 = \sigma(x)}^{\text{полином локаторов ошибок}}.$$

Задача ТК-5

Рассмотрим код БЧХ, нули которого определяются степенями α, где α — примитивный элемент поля $\mathbb{F}_2[x]/(x^4+x+1)$. Пусть для некоторого принятого слова $w(x)$ полином локаторов ошибок есть $\sigma(x) = \alpha^2 x^2 + \alpha^6 x + 1$.

Требуется определить позиции ошибок в $w(x)$.

Решение

Найдём корни полинома локаторов ошибок полным перебором.

Для вычислений удобно пользоваться таблицей соответствий между степенным и полиномиальным представлением элементов поля, вычисленной в предыдущей задаче ТК-4.

Задача ТК-5... $\alpha^4 = \alpha + 1,\ \alpha^{15} = 1$

$$\sigma(x) \;=\; \alpha^2 x^2 + \alpha^6 x + 1$$

$$\begin{aligned}
\sigma(\alpha) \;&=\; \alpha^4 + \alpha^7 + 1 \;=\; \alpha^3,\\
\sigma(\alpha^2) \;&=\; \alpha^6 + \alpha^8 + 1 \;=\; \alpha^3,\\
\sigma(\alpha^3) \;&=\; \alpha^8 + \alpha^9 + 1 \;=\; \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha,\\
\sigma(\alpha^4) \;&=\; \alpha^{10} + \alpha^{10} + 1 \;=\; 1,\\
\sigma(\alpha^5) \;&=\; \alpha^{12} + \alpha^{11} + 1 \;=\; 0,\\
\sigma(\alpha^6) \;&=\; \alpha^{14} + \alpha^{12} + 1 \;=\; \alpha^2 + \alpha + 1,\\
\sigma(\alpha^7) \;&=\; \alpha^{16} + \alpha^{13} + 1 \;=\; \alpha^3 + \alpha^2 + 1,\\
\sigma(\alpha^8) \;&=\; \alpha^{18} + \alpha^{14} + 1 \;=\; 0.
\end{aligned}$$

Дальше можно не вычислять: оба корня квадратного полинома $\sigma(x)$ найдены.

Задача ТК-5... $\alpha^{15} = 1$

Итак, полином локаторов ошибок

$$\sigma(x) = \alpha^2 x^2 + \alpha^6 x + 1.$$

имеет корни α^5 и α^8.

Определяем позиции ошибок:

$$-5 \equiv_{15} 10,$$
$$-8 \equiv_{15} 7,$$

(и полином ошибок есть $e(x) = x^{10} + x^7$).

Задача ТК-6

Построить БЧХ-код длины 15, исправляющий не менее 2-х ошибок.

Решение Имеем $q = 4$, $n = 2^4 - 1 = 15$ и $d = 2r + 1 = 5$. Образуем поле $F = \mathbb{F}_2^4 \cong \mathbb{F}_2[x]/(a(x))$, взяв в качестве $a(x)$ неприводимый полином 4-й степени $x^4 + x + 1$ (приводим более подробное решение примера 1, вар. 4 раздела Кодирование БЧХ-кодами).

Полином $a(x)$ — примитивен, т.е. является м.м. для $\alpha = x$ — генератора мультипликативной группы F^*.
Находим циклотомические классы для элементов $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4$ поля F, учитывая, что $\alpha^4 = \alpha + 1$, $\alpha^{15} = 1$, $\alpha^{16} = \alpha$, $\alpha^{24} = \alpha^3$:

$$\{\alpha, \alpha^2, \alpha^4, \alpha^8\} \text{ и } \{\alpha^3, \alpha^6, \alpha^9, \alpha^{12}\},$$

так что для порождающего многочлена $g(x)$ конструируемого БЧХ-кода будем иметь $g(x) = g_\alpha(x) \cdot g_{\alpha^3}(x)$.

Задача ТК-6... $\alpha^4 = \alpha + 1,\ \alpha^{15} = 1$

Ясно, что $g_\alpha(x) = a(x) = x^4 + x + 1$.

Вычислим элементы циклотомического класса, в который входит α^3:

$$\alpha^6 = \alpha^4\alpha^2 = (\alpha+1)\alpha^2 = \alpha^3 + \alpha^2,$$
$$\alpha^9 = \left(\alpha^4\right)^2\alpha = (\alpha+1)^2\alpha = (\alpha^2+1)\alpha = \alpha^3 + \alpha,$$
$$\alpha^{12} = \left(\alpha^4\right)^3 = (\alpha+1)^3 = \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1.$$

Вычислим м.м. для циклотомического класса элемента α^3:

$$g_{\alpha^3}(x) = \underline{(x+\alpha^3)} \cdot (x+\alpha^6) \cdot (x+\alpha^9) \cdot \underline{(x+\alpha^{12})} =$$
$$= \underline{\left(x^2 + (\alpha^3+\alpha^{12})x + \alpha^{15}\right)} \cdot \left(x^2 + (\alpha^6+\alpha^9)x + \alpha^{15}\right) =$$
$$= \left(x^2 + (\alpha^2+\alpha+1)x + 1\right) \cdot \left(x^2 + (\alpha^2+\alpha)x + 1\right) =$$
$$= x^4 + x^3 + x^2 + x + 1.$$

Задача ТК-6... $\alpha^4 = \alpha + 1$, $\alpha^{15} = 1$

Таким образом,

$$g(x) = g_\alpha(x) \cdot g_{\alpha^3}(x) = (x^4 + x + 1) \cdot (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = \\ = x^8 + x^7 + x^6 + x^4 + 1,$$

$$\deg g(x) = m = 8,\ k = 15 - 8 = 7,$$

и получен порождающий полином для $(15, 7, 5)$-кода БЧХ.

Замечание. Ранее было установлено, что имеется всего 3 неприводимых многочлена 4-го порядка.
Один из них выбран в качестве $a(x) = g_\alpha(x)$ и поэтому м.м. для α^3 может быть один из двух остальных: $x^4 + x^3 + 1$ или $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.
Убеждаемся, что подстановка $x \mapsto \alpha^3$ обращает первый в $\alpha^2 + 1$, а второй — в 0, и поэтому он и есть $g_{\alpha^3}(x)$.

Задача ТК-7

Построить 15-разрядный БЧХ-код для исправления не менее 3 ошибок.

Решение

Имеем $n = 15 = 2^4 - 1$, $r = 3$, $d = 7$.

Порождающий многочлен $g(x)$ конструируемого кода должен иметь корни $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \alpha^5, \alpha^6$, где α — примитивный элемент поля $F = \mathbb{F}_2^4$.

При разбиении F^* на циклотомические классы всегда будет присутствовать четырёхэлементный класс $\{\alpha, \alpha^2, \alpha^4, \alpha^8\}$. Остальные рассматриваемые степени α будут входить в циклотомические классы

$$\{\alpha^3, \alpha^6, \ldots\} \text{ и } \{\alpha^5, \ldots\}.$$

Задача ТК-7...

Нетрудно установить, что это 4- и 2-элементные классы соответственно:

$$\{\alpha^3, \alpha^6, \alpha^{12}, \alpha^{24} = \alpha^9\}, \quad (\text{т.к. } 2 \cdot 9 = 18 \equiv_{15} 3 \text{ и } \alpha^{18} = \alpha^3);$$
$$\{\alpha^5, \alpha^{10}\}, \quad (\text{т.к. } 2 \cdot 10 = 20 \equiv_{15} = 5 \text{ и } \alpha^{20} = \alpha^5).$$

Ранее были найдены неприводимые многочлены четвёртой степени над $\mathbb{F}_2$:

1. $x^4 + x + 1$,
2. $x^4 + x^3 + 1$,
3. $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$,

Первые два многочлена — примитивные (их корень α будет генератором мультипликативной группы соответствующего поля).

Задача ТК-7...

С другой стороны, многочлен №3 не примитивный, т.к. порядок его корня α равен 5: при условии $\alpha^4 = \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1$ имеем

$$\alpha^5 = \alpha\alpha^4 = \alpha(\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1) = \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha =$$
$$= \cancel{\alpha^3} + \cancel{\alpha^2} + \cancel{\alpha} + 1 + \cancel{\alpha^3} + \cancel{\alpha^2} + \cancel{\alpha} = 1.$$

Это означает, в качестве порождающего поле полинома $a(x)$ могут быть выбран только какой-либо из первых двух многочленов.

Положим $a(x) = x^4 + x^3 + 1$ (многочлен №2) и тогда

$$g_\alpha(x) = a(x),\ \alpha^4 = \alpha^3 + 1,\ \alpha^{15} = 1.$$

Далее, сразу ясно, что м.м. для элемента α^5 (и α^{10}) будет неприводимый полином 2-й степени (он единственный):

$$g_{\alpha^5}(x) = x^2 + x + 1.$$

Задача ТК-7... ($\alpha^4 = \alpha^3 + 1,\ \alpha^{15} = 1$)

Осталось определить м.м. для α^3 (и всего его 4-элементного циклотомического класса) — им должен быть либо многочлен №1, либо многочлен №3.

Подстановка в многочлен №1 даёт

$$(x^4 + x + 1)\Big|_{x=\alpha^3} = \alpha^{12} + \alpha^3 + 1 = (\alpha^3 + 1)^3 + \alpha^3 + 1 =$$
$$= (\alpha^3 + 1)\left((\alpha^3 + 1)^2 + 1\right) = \alpha^4(\alpha^6 + \cancel{1} + \cancel{1}) = \alpha^{10} \neq 0.$$

Поэтому (можно и не проверять) м.м. элемента α^3 будет оставшийся многочлен №3 и

$$g(x) = g_\alpha(x) \cdot g_{\alpha^3}(x) \cdot g_{\alpha^5}(x) =$$
$$= (x^4 + x^3 + 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(x^2 + x + 1) =$$
$$= x^{10} + x^8 + x^5 + x^4 + x^2 + x + 1, \quad m = 10,\ k = 5.$$

В результате построен БЧХ $(15, 5, 7)$-код, уже полученный ранее в разделе Кодирование БЧХ-кодами.

Задача ТК-8

Построить 31-разрядный БЧХ-код для исправления не менее 3 ошибок.

Решение

Имеем $n = 31 = 2^5 - 1$, $r = 3$, $d = 7$.

Порождающий многочлен $g(x)$ конструируемого кода должен иметь корни α, α^2, α^3, α^4, α^5, α^6, где α — примитивный элемент поля $F = \mathbb{F}_2^5$.

При разбиении F^* на циклотомические классы всегда будет присутствовать пятиэлементный класс $\{\alpha, \alpha^2, \alpha^4, \alpha^8, \alpha^{16}\}$. Остальные рассматриваемые степени α будут входить в циклотомические классы

$$\{\alpha^3, \alpha^6, \dots\} \text{ и } \{\alpha^5, \dots\}.$$

Задача ТК-8...

Нетрудно установить, что эти классы также будут пятиэлементными:

$$\{\,\alpha^3,\,\alpha^6,\,\alpha^{12},\,\alpha^{24},\,\alpha^{48}=\alpha^{17}\,\},\quad (\text{т.к. } 34\equiv_{31}3);$$
$$\{\,\alpha^5,\,\alpha^{10},\,\alpha^{20},\,\alpha^{40}=\alpha^9,\,\alpha^{18}\,\},\quad (\text{т.к. } 36\equiv_{31}5).$$

По специальным таблицам*) найдём неприводимые многочлены пятой степени над $\mathbb{F}_2$: их шесть —

1. x^5+x^2+1,
2. x^5+x^3+1,
3. $x^5+x^3+x^2+x+1$,
4. $x^5+x^4+x^2+x+1$,
5. $x^5+x^4+x^3+x+1$,
6. $x^5+x^4+x^3+x^2+1$.

---

*) из списка литературы см., например, монографию *Лидл Р., Нидеррайтер Г.* Конечные поля (Том 1, Таблица С).

Задача ТК-8...

Все эти многочлены, как указано в таблицах, являются примитивными (корень $\alpha = x$ — генератор мультипликативной группы соответствующего поля) и все они могут быть выбраны в качестве порождающего поле полинома $a(x)$.

Положим $a(x) = x^5 + x^3 + 1$ (многочлен №2) и тогда $g_\alpha(x) = a(x),\ \alpha^5 = \alpha^3 + 1,\ \alpha^{31} = 1$.

Определим, какие из остальных многочленов соответствуют циклотомическим классам для α^3 и α^5.
Имеем:
для многочлена №3 —

$$(x^5 + x^3 + x^2 + x + 1)\big|_{x=\alpha^3} = \alpha^{15} + \alpha^9 + \alpha^6 + \alpha^3 + 1 =$$
$$= (\alpha^3 + 1)^3 + \alpha^4(\alpha^3 + 1) + \alpha(\alpha^3 + 1) + \alpha^3 + 1 = \ldots = 0,$$

Задача ТК-8...

для многочлена №5 —

$$(x^5+x^4+x^3+x+1)\Big|_{x=\alpha^5} = \alpha^{25}+\alpha^{20}+\alpha^{15}+\alpha^5+1 =$$
$$= (\alpha^3+1)^5+(\alpha^3+1)^4+(\alpha^3+1)^3+\alpha^5+1 = \ldots = 0.$$

Таким образом, $g_{\alpha^3}(x) = x^5+x^3+x^2+x+1$, $g_{\alpha^5}(x) = x^5+x^4+x^3+x+1$ (совпадение номеров многочленов со степенями генератора случайно) и

$$g(x) = g_{\alpha}(x)\cdot g_{\alpha^3}(x)\cdot g_{\alpha^5}(x) =$$
$$= x^{15}+x^{11}+x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^5+x^3+x^2+x+1.$$

Имеем $\deg g(x) = m = 15$, $k = n - m = 16$ и порождающий многочлен для $(31,16)$-кода БЧХ, исправляющего не менее 3 ошибок, построен.

Задача ТК-9

Рассмотрим БЧХ-код, нули которого определяются степенями примитивного элемента α *поля* $F = \mathbb{F}_2[x]/\big(x^4 + x + 1\big)$.
Пусть для некоторого принятого слова $w(x)$ *полином локаторов ошибок есть* $\sigma(x) = \alpha^6 x + \alpha^{15}$.
Определить позиции ошибок в слове $w(x)$.

Решение

Нам понадобится таблица, выражающая элементы мультипликативной группы F через степени её генератора α, уже построенная в начале раздела Существование и единственность поля $GF(p^n)$ и в задаче ТК-4.

Задача ТК-9... $\alpha^4 = \alpha + 1$

α^1	α
α^2	α^2
α^3	α^3
α^4	$\alpha + 1$
α^5	$\alpha^2 + \alpha$
α^6	$\alpha^3 + \alpha^2$
α^7	$\alpha^3 + \alpha + 1$
α^8	$\alpha^2 + 1$
α^9	$\alpha^3 + \alpha$
α^{10}	$\alpha^2 + \alpha + 1$
α^{11}	$\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha$
α^{12}	$\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1$
α^{13}	$\alpha^3 + \alpha^2 + 1$
α^{14}	$\alpha^3 + 1$
α^{15}	1

Задача ТК-9... $\alpha^4 = \alpha + 1$

Перебором найдём корни полинома ошибок

$$\sigma(x) = \alpha^6 x + \alpha^{15} = (\alpha^3 + \alpha^2)x + 1:$$

$$\sigma(\alpha) = \alpha^4 + \alpha^3 + 1 = \alpha + 1 + \alpha^3 \neq 0;$$

$$\sigma(\alpha^2) = \alpha^5 + \alpha^4 + 1 = \alpha^2 + \alpha + \alpha + 1 + 1 = \alpha^2 \neq 0;$$

$$\ldots\ldots$$

$$\sigma(\alpha^9) = \alpha^{12} + \alpha^{11} + 1 = (\alpha^3 + \alpha^2\alpha + 1) + (\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha) + 1 = 0.$$

Линейный полином $\sigma(x)$ имеет один корень α^9, поэтому позиция единственной ошибки есть $-9 \equiv_{15} 6$.