Часть IV

Математика коллективных решений (II)

Разделы

Манипулирование

Считаем далее, что предпочтения участников $P_i,\ i=\overline{1,n}$ (строго) линейны, а коллективное решения — только одна альтернатива из A, т.е.

$$F:\overline{P}\to A\,.$$

Определение

Правило F называется *защищенным от манипулирования*, если ни один из голосующих ни в одном профиле не может изменить свои предпочтения так, чтобы в результате выбранной оказалась лучшая с его точки зрения альтернатива.

В противном случае эффект искажения своих предпочтений называется *манипулированием со стороны избирателя*, а правило голосования, позволяющее это — *манипулируемым*.

Защиты от манипулирования нет

Вопрос: можно ли отделить манипулируемые процедуры от неманипулируемых?

Потребуем, чтобы ни одна из альтернатив не могла быть априори отброшена = для каждой альтернативы существует профиль, при котором выбирается именно она (аналог условия ③ ненавязанности) = F — сюръективно (очень слабое ограничение, слабее условия ② единогласия).

Теорема (Гиббарда–Саттертуэйта)
При $|A| = m \geqslant 3$ *сюръективное правило голосования защищено от манипулирования iff оно является диктаторским.*

Т.е. любое недиктаторское правило голосования не менее, чем с тремя альтернативами, может сопровождаться манипуляциями.

А. Гиббард и М.А. Саттертуэйт

Аллан Гиббард (Allan Gibbard, 1942) — американский математик и философ, заслуженный профессор университета штата Мичиган (США).
Внёс значительный вклад в теорию выбора и современную теорию этики (т.н. метаэтику).

Марк Аллен Саттертуэйт (Mark Allen Satterthwaite, ?) — американский экономист, специалист в области микроэкономики, заведующий кафедрой управления и стратегии в Kellogg School of Management Северозападного университета (г. Эванстон, шт. Иллинойс).

Теорема Гиббарда–Саттертуэйта: пример

Выборы в L'Académie royale des Sciences

	Предпочтения	Манипулирование
8	$A \succ B \succ C$	
7	$B \succ C \succ A$	
6	$C \succ B \succ A$	$B \succ C \succ A$

Процедура голосования: правило относительного большинства.
Результат (было): будет избран кандидат A.

Однако в этой ситуации избиратели из последней группы, понимая свою малочисленность и то, что победит худший с их точки зрения кандидат A, могут исказить (манипулирование) свои истинные предпочтения, поставив на первое место кандидата B, который тогда и будет избран.

Виды манипулирования

Манипулирование при голосовании может происходить:

1) избирателями — искажением своего профиля предпочтений;
2) организатором голосования — путем
   - подбора соответствующего правила голосования (простого большинства, относительного большинства, ...),
   - предложения голосовать альтернативы в определенном порядке,
   - предложения рассматривать новые альтернативы (объединяя/разъединяя/дополняя имеющиеся);
3) и избирателями, и организатором голосования — комбинацией указанных форм манипулирования.

Манипулирование при голосовании: пример I

Дело Афрания Декстра, Рим, II в. н.э.

Председатель Римского Сената *Плиний Младший* обсуждает в письме Аристону, крупному юристу, следующее дело:
консул Афраний Декстр был найден убитым, и было не ясно, покончил ли он с собой (I), или же, повинуясь приказу хозяина, его убил слуга (II).

Мнения в Сенате разделились следующим образом:

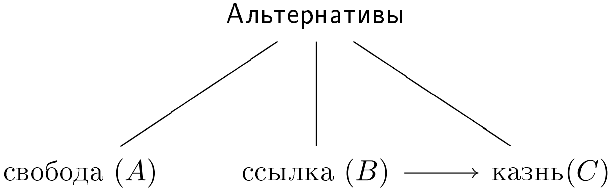
группа A считала, что слугу можно освободить,
группа B высказывалась за его ссылку,
группа C высказывалась за его казнь.

В Сенате группа A, к которой принадлежал сам Плиний, составляло относительное (но не абсолютное) большинство, а группа $B+C$ — абсолютное (простое, $> 50\%$ голосов).

Манипулирование при голосовании: пример I...

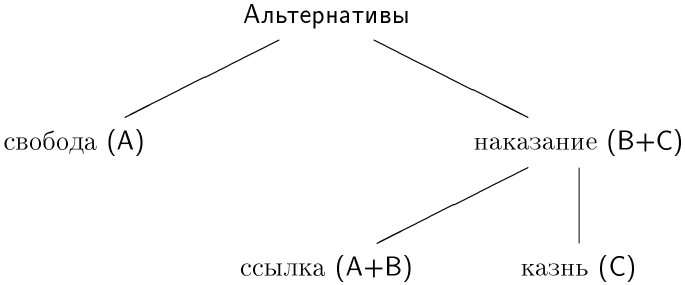
Рассуждения Плиния —

① если поставить на голосование данные альтернативы и использовать правило простого большинства, то члены группы B скорее присоединятся к группе C, чем к группе A, и будет принято решение о казни —



Манипулирование при голосовании: пример I...

② если альтернативы казнь и ссылка объединить в единую альтернативу наказание, и сначала выбирать между вариантами наказание и свобода, то группы B и C могут объединиться и выбрать альтернативу наказание, а затем, если поставить на голосование альтернативы казнь или ссылка, то группа A, скорее всего, объединится с B будет принято ссылка —



Манипулирование при голосовании: пример I...

Поэтому Плиний, чтобы получить результат свобода,

③ предложил считать голоса за 3 альтернативы порознь, аргументируя это тем, что альтернативы слишком различны, и использовать правило относительного большинства, что и было принято.

При подсчете голосов оказалось, что реализовался вариант ④: часть участников группы C перешла в группу B и было поддержано решение о ссылке.

Манипулирование при голосовании: пример I...

Итак, имела место комбинация разных типов манипулирования:

- со стороны организатора — Плиний манипулировал и множеством альтернатив, и процедурой голосования (вместо процедуры простого большинства использовалась процедура относительного большинства);
- со стороны избирателей — часть участников группы C изменила своё мнение.

Рассмотренные схемы отражают системы принятия решений в уголовных судах:

- европейскую континентальную — мера наказания или невиновность определяется сразу;
- англо-американскую — сначала присяжные выносят решение о виновности, а потом судья назначает меру наказания.

Манипулирование при голосовании: пример II

В США до принятия 17-й поправки к Конституции члены Сената назначались в штатах, но вначале XX в. обсуждалось две альтернативы:

- S (status quo) — сенаторы назначаются законодательными органами штатов;
- a 17-я поправка — сенаторы избираются голосованием населения штата.

В 1905 г. большинство в Сенате считало $a \succ S$ и Сенат в то время состоял из трех групп:

1) членов Демократической партии из южных штатов, в основном, поддерживающих поправку;
2) либеральных членов Демократической партии из северных штатов и либеральных членов Республиканской партии, которые также поддерживали поправку;
3) консервативных членов обоих партий, которые предпочитали оставить всё, как есть.

Манипулирование при голосовании: пример II...

С целью предотвратить принятие альтернативы a, представитель последней группы предложил рассмотреть третью альтернативу b: принять 17-ю поправку с условием, что федеральное правительство будет иметь право контролировать проведение выборов в штатах.

Либералов были не против, но демократы из южных штатов (различными способами не допускавших темнокожее население к голосованию), возражали, и предпочтения стали выглядеть следующим образом:

Либералы обеих партий	$b \succ a \succ S$
Демократы из южных штатов	$a \succ S \succ b$
Консерваторы обеих партий	$S \succ b \succ a$

Т.е. первая группа раскололась, что привело к образованию классического цикла предпочтений.

Манипулирование при голосовании: пример II...

Поскольку согласно принятым процедурам Сенат сначала должен голосовать поправки к законопроекту, выбор осуществлялся между альтернативами a и b.

В результате:

1) сначала благодаря либералам и консерваторам была принята альтернатива b;
2) далее при сравнении альтернатив b и S была победила альтернатива S.

— т.е. желаемый для консерваторов результат достигался.

Такая тактика приносила успех до 1912 г., пока возросшие числом либералы не проголосовали на первом этапе против b, а на втором, при сравнении a с S, победила альтернатива за a.

Разделы

Разделы

Стратегическое поведение участников голосования

Задачи

Задачи с решениями

Что ещё почитать

Задача МКР-1

Приведите простой пример существования двух победителей Кондорсе.

Решение $V = \{1, 2\}$, $A = \{x_1, x_2, x_3\}$,

$$P_1: x_1 \succ x_2 \succ x_3,$$
$$P_2: x_2 \succ x_1 \succ x_3.$$

$$\begin{tikzcd}
x_1 \arrow[dr] & & x_2 \arrow[dl] \\
& x_3 &
\end{tikzcd}$$

Задача МКР-2

Покажите, что при нечетном числе участников:

① бинарное отношение, соответствующее мажоритарному графу, связно;

② если победитель Кондорсе существует, то он единственный.

Решение

① Покажем, что любые две вершины x_i и x_j мажоритарного графа соединены дугой, направленной в какую-либо сторону.

Пусть число участников $2n+1$, и вершины мажоритарного графа x_i и x_j дугой не соединены. Это означает, что более n голосующих считают, что $x_i \succ x_j$, и не более n — что $x_j \succ x_i$, т.е. всего участников не более $n + n = 2n$. Противоречие.

② Единственность победителя Кондорсе доказывается от противного.

Задача МКР-3

Постройте мажоритарный граф при указанных предпочтениях голосующих $V = \{1, 2, 3\}$ *относительно вариантов* $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$

$$P_1 : x_1 \succ x_2 \succ x_4 \succ x_3,$$
$$P_2 : x_2 \succ x_4 \succ x_1 \succ x_3,$$
$$P_3 : x_1 \succ x_3 \succ x_2 \succ x_4$$

и определите победителя по Кондорсе и по Борда.

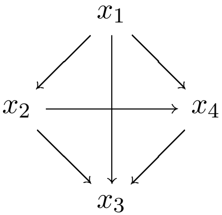
Решение Составляем матрицу голосования $m_{ij} = \#(x_i \succ x_j)$ с баллами Борда по диагонали:

	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	7	2	3	3
x_2	1	6	2	3
x_3	0	1	2	1
x_4	1	0	2	3

Задача МКР-3...

Получаем (все предпочтения $2:1$ или $3:0$):

$$
\begin{array}{lll}
x_1 \succ x_2 & x_2 \succ x_3 & x_4 \succ x_3 \\
x_1 \succ x_3 & x_2 \succ x_4 & \\
x_1 \succ x_4 & &
\end{array}
$$



Недоминирумый вариант x_1 — победитель Кондорсе,
он же победитель по Борда.

Задача МКР-4

Построить мажоритарный граф при предпочтениях из задачи МКР-1, если участник 1 *изменил свои предпочтения на*

$$P_1' : x_3 \succ x_1 \succ x_2 \succ x_4,$$

а предпочтения остальных участников остались неизменными. Есть ли здесь победитель Кондорсе? по Борда?

Решение

$$\begin{tikzcd}
 & x_1 \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
x_2 \arrow[ur] \arrow[rr] & & x_4 \\
 & x_3 \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Недоминируемых исходов нет, т.е. нет победителя Кондорсе, по Борда — x_1.

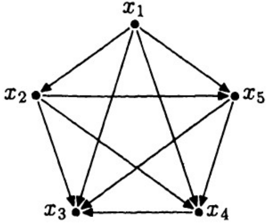
Задача МКР-5

Построить мажоритарный граф при предпочтениях голосующих $V = \{1, 2, 3\}$ *относительно вариантов* $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$

$$P_1 : x_1 \succ x_2 \succ x_5 \succ x_4 \succ x_3,$$
$$P_2 : x_3 \succ x_5 \succ x_1 \succ x_2 \succ x_4,$$
$$P_3 : x_2 \succ x_1 \succ x_4 \succ x_5 \succ x_3$$

и определить победителя Кондорсе.

Решение победитель — x_1



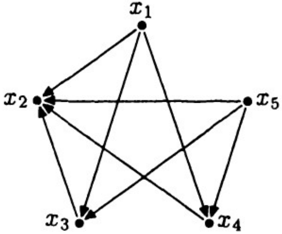
Задача МКР-6

Построить мажоритарный граф при предпочтениях участников на множестве $V = \{1, 2, 3, 4\}$ *относительно кандидатов* $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$

$$P_1 : x_5 \succ x_1 \succ x_4 \succ x_3 \succ x_2,$$
$$P_2 : x_1 \succ x_5 \succ x_3 \succ x_4 \succ x_2,$$
$$P_3 : x_4 \succ x_1 \succ x_2 \succ x_5 \succ x_3,$$
$$P_4 : x_5 \succ x_1 \succ x_3 \succ x_4 \succ x_2$$

и определить победителя Кондорсе.

Решение



Имеем два победителя Кондорсе: x_1 и x_5.

Задача МКР-7

Пусть три друга выбирают место отдыха из вариантов:
$A =$ *Сочи (С), Туапсе (Т), Валдай (В), Подмосковье (П) и их предпочтения имеют вид:*

$$P_1 : С \succ Т \succ В \succ П,$$
$$P_2 : С \succ Т \succ В \succ П,$$
$$P_3 : Т \succ С \succ П \succ В.$$

Предпочтения их жён имеют вид:

$$P_1' : С \succ Т \succ В \succ П,$$
$$P_2' : Т \succ С \succ В \succ П,$$
$$P_3' : Т \succ С \succ В \succ П.$$

Задача МКР-7...

① *Пусть коллективное решение* P *содержит пару (Т, В) (т.е.* $\mathrm{T} \succ_P \mathrm{B}$*).*
Если правило построения коллективного решения локально, то содержится ли пара (Т, В) в коллективном решении по профилю P'*?*

② *Пусть правило построения коллективного решения удовлетворяет условию единогласия.*
Какие пары обязано содержать коллективное решение по профилям

$$\overline{P} = (\, P_1,\, P_2,\, P_3\,)? \qquad \overline{P'} = (\, P'_1,\, P'_2,\, P'_3\,)?$$

③ *Пусть коллективное решение содержит пару (Т, В), если первый участник имеет такое предпочтение.*
Является ли он диктатором в смысле Эрроу?

Задача МКР-7: решение

Решение

① Заметим, что $V_{\overline{P}}(\text{Т} \succ \text{В}) = V_{\overline{P'}}(\text{Т} \succ \text{В}) = \{1, 2, 3\}$. Поэтому, раз правило принятия решения локально и если (Т, В) $\in P$, то (Т, В) $\in P'$.

② И в том и в другом случае в коллективном решении должны содержаться те пары (a, b), для которых

$$V_{\overline{P}}(a \succ b) = V_{\overline{P'}}(a \succ b) = \{1, 2, 3\}.$$

Это (С,В), (С,П), (Т,В), (Т,П) для профиля $\overline{P} = (P_1, P_2, P_3)$ и (С,В), (С,П), (Т,В), (Т,П), (В,П) для профиля $\overline{P'} = (P'_1, P'_2, P'_3)$.

③ Нет, поскольку участник является диктатором в смысле Эрроу, если он может навязать свое мнение коллективу по любой паре альтернатив, а здесь он навязывает свое решение только по паре (С, Т).

Задача МКР-8

Рассмотрим следующее правило построения коллективного решения по индивидуальным предпочтениям n участников: пара (x, y) входит в коллективное решение, если она принадлежит —

1) *ровно $n/3$;*
2) *ровно $n/2 + 1$;*
3) *более $n/2$;*
4) *не менее $n/2$;*
5) *не менее $n - 1$;*
6) *n индивидуальных предпочтений.*

① *Является ли это правило локальным?*

② *Каким аксиомам оно удовлетворяет?*

③ *Приведите (если возможно) пример, когда это правило приводит к циклам в коллективном решении.*

Задача МКР-8: решение

Решение

① Аксиоме локальности (и нейтранности) удовлетворяют все правила, т.к. решение о предпочтительности x по отношению к y зависит только от количества таких участников.

② Аксиоме единогласия удовлетворяют только те из правил, для которых пара (x, y) принадлежит коллективному решению, если она принадлежит всем индивидуальным предпочтениям. В данном случае это пп. 3–6.

Аксиоме ненавязанности удовлетворяют все приведенные правила (решение зависит только от мнений участников).

Аксиоме монотонности удовлетворяют правила 3–6.

Задача МКР-8: решение...

③ Примеры, в которых появляются циклы, можно построить для всех правил, кроме последнего.

Приведем пример для п. 5) — не менее $n-1$ индивидуальных предпочтений:

Пусть имеется n альтернатив, т.е. $A = \{x_1, \ldots, x_n\}$, а индивидуальные предпочтения имеют «циклический» вид

$$P_i : x_i > x_{i+1} > \ldots > x_n > x_1 > x_2 > \ldots > x_{i-1}, \;\; i = \overline{1,n}.$$

Тогда $V_{\overline{P}}(x_i > x_{i+1}) = V \setminus \{i+1\}$, поэтому в коллективном решении P имеем

$$x_1 > x_2 > \ldots > x_{n-1} > x_n,$$

но поскольку $V_{\overline{P}}(x_n > x_1) = V \setminus \{1\}$, то $x_n > x_1$ и получаем цикл.

Задача МКР-9

Пусть $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, $V = \{1, 2, 3\}$ *и коллективное решение строится следующим образом:*

$$\forall i \in V : a_i \succ x = a_i \succ_i x \quad \text{для всех } x \in A.$$

① *Является ли это правило локальным?*

② *Каким аксиомам оно удовлетворяет?*

Решение

① Данное правило будет локальным, поскольку решение о том, какая из альтернатив, a_i или a_j предпочтительнее, зависит только от предпочтений между a_i и a_j участников i и j.

② Нетрудно проверить, что данное правило удовлетворяет всем аксиомам $1–5$.

Задача МКР-9: решение

$$\forall i \in V : a_i \succ x \;=\; a_i \succ_i x \quad \text{для всех } x \in A.$$

Но больше никаким разумным свойствам P удовлетворять не будет: вопрос о принадлежности P пар
(a_1, a_2) и (a_1, a_3) зависит только от участника 1,
(a_2, a_1) и (a_2, a_3) — только от участника 2 и
(a_3, a_1) и (a_3, a_2) — только от участника 3,
т.е. все эти шесть пар могут принадлежать или не принадлежать P в любых сочетаниях.

Задача МКР-10

Пусть семья из трех человек (т.е. $V = \{1, 2, 3\}$*) собирается купить автомобиль.*
В качестве альтернатив рассматриваются элементы множества $A = \{\,\text{«фольксваген»}(W),\ \text{«рено»}(R),\ \text{«пежо»}(\mathrm{P})\,\}$.

$$\begin{aligned} P_1 &: W > P > R, \\ P_2 &: P > W > R, \\ P_3 &: R > W > P. \end{aligned}$$

Пусть коллективное решение, которое строится по локальному правилу, имеет вид

$$P : W > R > P.$$

Каким будет коллективное решение, если исключить из рассмотрения альтернативу W*?*

Задача МКР-10: решение

Решение

Т.к. как правило принятия решения локально, то отношение участников голосования к альтернативам R и P не зависит от их отношения к W и, в частности, от наличия или отсутствия W.

Поэтому при отсутствии W решение о том, что предпочтительнее, P или R, будет принято то же, что и при наличии W, т.е. $R > P$.

Задача МКР-11

Покажите, что олигархическое правило (выделяется некоторая группа участников ω, коллективное решение представляет собой единогласное мнение всех членов этой группы, а мнение всех остальных членов коллектива не учитывается):

① *всегда строит частичные порядки;*
② *удовлетворяет аксиомам Эрроу;*
③ *не всегда строит слабые порядки (т.е. частичные порядки вида $m_1\mathbf{1} \oplus \ldots \oplus m_h\mathbf{1}$).*

Решение ① Олигархическое правило можно записать как $P = P_1 \cap \mathrm{P}_2 \cap \ldots \cap \mathrm{P}_k$, если $P_1, \ldots, P_k$ — предпочтения «олигархов».
Поскольку P_i — строгие линейные порядки, то и их пересечение является некоторым нерефлексивным частичным порядком.

Задача МКР-11...

② Олигархическое правило локально, т.к. решение $x \overset{?}{\succ}_P y$ зависит только от предпочтений олигархов $x \succ_i y$, $i = \overline{1,k}$. Остальные аксиомы проверяются непосредственно.

③ Покажем, что коллективное решение по олигархическому правилу может не быть слабым порядком.
Пусть $A = \{a, b, c\}$, $V = \{1, 2, 3\} = \omega$ предпочтения олигархов (всех голосующих) есть

$$P_1 : a > b > c, \quad P_2 : a > c > b, \quad P_3 : c > a > b.$$

Коллективное решение: $a \succ b$, $a \not\succ c$, $b \not\succ c$ — не есть слабый порядок.

Разделы

Литература I

- *Алескеров Ф. Т., Хабина Э. Л., Шварц Д. А.* Бинарные отношения, графы и коллективные решения. — М.: Издат. дом ГУ ВШЭ, 2006.
- *Ларичев О. И.* Теория и методы принятия решений, а также Хроника событий в Волшебных Странах. — М.: Логос, 2000.
- *Мулен Э.* Кооперативне приянтия решений: Аксиомы и модели. — М.: Мир, 1991.
- *Рыков А. С.* Модели и методы системного анализа: принятие решний и оптимизация. — М.: «МИСИС», Издат. дом «Руда и металлы», 2005.
- *Николенко С. И.* Теория экономических механизмов. — М.: Национальный Открытый Университет «ИНТУИТ», 2011.

Литература II

Эрроу К. Дж. Коллективный выбор и индивидуальные ценности. — М.: ГУ ВШЭ, 2004 (перевод монографии 1951 г.).