

Тема II

Теория перечисления Пойа

Разделы I

Действие группы на множестве

Применение леммы Бёрнсайда для решения комбинаторных задач

Применение теоремы Пойа для решения комбинаторных задач

Задачи с решениями

Что ещё почитать

Действие группы на множестве: два определения

Группа $\mathcal{G} = \langle G, \circ, e \rangle$, $|G| = n$. Множество T , $|T| = N$.

Определение (I)

$$\alpha \in \text{Hom}(\mathcal{G}, \text{Symm}(T)).$$

Действие α группы \mathcal{G} на множестве T : $\mathcal{G} : T$.

Определение (II)

$$\alpha = \langle G, T; \circ, *, e \rangle,$$

где

$G \times G \xrightarrow{\circ} G$ — групповая операция;

$G \times T \xrightarrow{*} T$ — новая операция.

Аксиомы для операций: $e * t = t$; $(g \circ h) * t = h * (g * t)$.

Аксиомы: $e(t) = t$ и $(g \circ h)(t) = h(g(t))$.

Платоновы тела — правильные 3-мерные многогранники

Платоновы тела	Группа вращения	Порядок группы
тетраэдр	T (тетраэдра)	$4 \cdot 3 = 12$
куб и октаэдр	O (октаэдра)	$8 \cdot 3 = 24$
икосаэдр и додекаэдр	Y (икосаэдра)	$12 \cdot 5 = 60$



Октаэдр



Икосаэдр



Додекаэдр

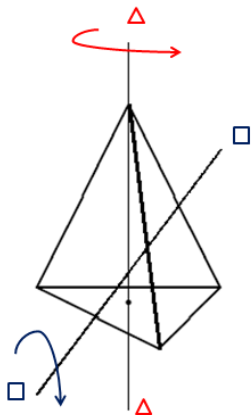
Рассматриваем группы вращений (самосовмещений)
платоновых тел

T — группа вращения тетраэдра

$$T = \langle t, f \rangle, t^3 = f^2 = e, \text{ где:}$$

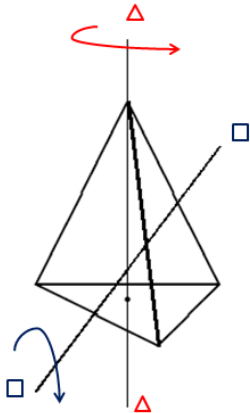
t — вращение на 120° вокруг оси, проходящей через вершину и центр тетраэдра ($\triangle-\triangle$); таких осей 4.

f — вращение на 180° вокруг оси, проходящей через центры двух противоположных рёбер ($\square-\square$); таких осей 3.



$$|T| = (3 - 1) \cdot 4 + (2 - 1) \cdot 3 + 1 = 12.$$

Действие T на грани (или вершины) тетраэдра: типы перестановок



$$\square : Type(t) = Type(t^2) = \langle 1, 0, 1, 0 \rangle;$$

$$\Delta : Type(f) = \langle 0, 2, 0, 0 \rangle.$$

Тетраэдр двойственен самому себе \Rightarrow
 действие на грани =
 действие на вершины.

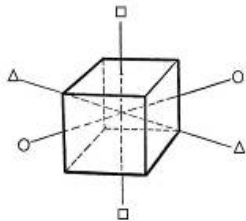
O — группа вращения куба

$$O = \langle t, f, r \rangle, t^4 = f^2 = r^3 = e, \text{ где}$$

t — вращение на 90° вокруг оси, проходящей через середины двух противоположных граней ($\square-\square$),

f — вращение на 180° вокруг оси, проходящей через середины двух противоположных рёбер ($\circ-\circ$),

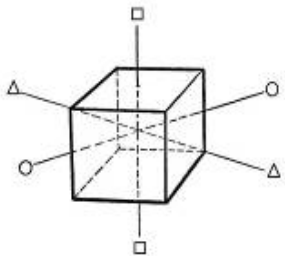
r — вращение на 120° вокруг оси, проходящей через две противоположные вершины ($\Delta-\Delta$)



Сколько осей каждого типа? 3, 6 и 4 соответственно.

$$|O| = 3 \cdot 3 + 1 \cdot 6 + 2 \cdot 4 + 1 = 24.$$

Действие O на вершины куба: типы перестановок



$$\begin{aligned} \square : \text{Type}(t) = \text{Type}(t^3) &= \\ &= \langle 0, 0, 0, 2, 0, \dots \rangle, \\ \text{Type}(t^2) &= \langle 0, 4, 0, \dots \rangle; \end{aligned}$$

$$\circ : \text{Type}(f) = \langle 0, 4, 0, \dots \rangle;$$

$$\Delta : \text{Type}(r) = \text{Type}(r^2) = \langle 2, 0, 2, 0, \dots \rangle.$$

Напоминание: фиксатор, стабилизатор и лемма Бёрнсайда

$$\{t \in T \mid g(t) = t\} \stackrel{\text{def}}{=} \text{Fix}(g) \subseteq T$$

$$\{g \in G \mid g(t) = t\} \stackrel{\text{def}}{=} \text{Stab}(t) \leq G.$$

Первое равенство — *лемма Бёрнсайда* (или Коши-Фробениуса):

$$C(\mathcal{G}) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{Fix}(g)| = \frac{1}{|G|} \sum_{t \in T} |\text{Stab}(t)|$$

Лемма.

Длина орбиты $\text{Orb}(t)$ равна индексу $\text{Stab}(t)$ в группе \mathcal{G} , т.е.

$$|\text{Orb}(t)| = |G| : |\text{Stab}(t)| = [G : \text{Stab}(t)]$$

Следствие леммы: число элементов в группе вращения правильного многогранника есть $|V| \cdot |E_0|$, где $|V|$ — число вершин, а $|E_0|$ — число рёбер, выходящих из одной вершины.

Разделы I

Действие группы на множестве

Применение леммы Бёрнсайда для решения комбинаторных задач

Применение теоремы Пойа для решения комбинаторных задач

Задачи с решениями

Что ещё почитать

Пример применения леммы Бёрнсайда

Задача про слова

Состоятся слова длины $l \geq 2$ из алфавита $A = \{a_1, \dots, a_q\}$.

Слова считаются эквивалентными, если они получаются одно из другого перестановкой крайних букв.

Определить число S неэквивалентных слов.

Решение.

T — множество слов длины l в алфавите A , $|T| = N = q^l$.

Надо представить эквивалентности как орбиты некоторого действия подходящей группы G на T .

Очевидно, $f^2 = e$ и поэтому подходит $\mathcal{G} \cong Z_2 = \{e, g\}$.

Действие: f переставляет в слове крайние буквы.

└ Применение леммы Бёрнсайда для решения комбинаторных задач

Пример применения леммы Бёрнсайда...

Число S неэквивалентных слов есть число классов эквивалентности $C(\mathcal{G})$ действия $Z_2 : T$ —

$$|\text{Fix}(e)| = |T| = q^l, \quad |\text{Fix}(f)| = q^{l-2} \cdot q = q^{l-1}.$$

$$S = C(Z_2) = \frac{1}{2} \sum_{g \in G} |\text{Fix}(g)| = \frac{q^l + q^{l-1}}{2} = \frac{q^{l-1}(q+1)}{2}.$$

Для $l = 3, q = 2 \Rightarrow S = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ (из всего 8)

Пусть $A = \{a, b\}$. Показаны слова и классы.

aaa	baa
aab	bab
aba	bba
abb	bbb

Цикловой индекс

Существует универсальный способ вычисления числа $C(\mathcal{G})$ — количества классов эквивалентности (= орбит).

Сопоставим каждой перестановке $g \in \mathcal{G}$ вес $w(g)$ по правилу:

$$\text{Type}(g) = \langle \nu_1, \dots, \nu_N \rangle \Rightarrow w(g) = \underbrace{x_1^{\nu_1} \cdot \dots \cdot x_N^{\nu_N}}_{\text{МОНОМ}}$$

Определение

Средний вес подстановок в группе называется

цикловым индексом действия $\mathcal{G} : T$:

$$P(\mathcal{G} : T, x_1, \dots, x_N) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} w(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} x_1^{\nu_1} \cdot \dots \cdot x_N^{\nu_N}.$$

(Это производящий полином многих переменных)

Цикловой индекс: обозначения и свойства

Другие обозначения: $P_G(x_1, \dots, x_N)$ и $P_G, P(\mathcal{G})$.

$P_G = P_{G'} \stackrel{?}{\Rightarrow} \mathcal{G} \cong \mathcal{G}'$ — нет, есть контрпример.

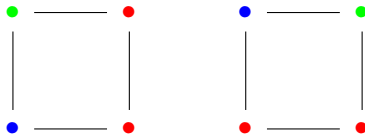
Как применять лемму «не-Бёрнсайда?»

Для применения универсального способа вычисления $C(\mathcal{G})$ надо представить эквивалентные элементы множества как классы эквивалентности действия некоторой группы \mathcal{G} на этом множестве.

Число неэквивалентных раскрасок

Пусть задано действие $\mathcal{G} : T$ группы \mathcal{G} на множестве T .

- ▶ Припишем каждому элементу T одно из r значений (неформально: покрасим в один из r цветов).
Всего, очевидно, имеется r^N раскрасок.
- ▶ Не будем различать раскраски, если при преобразовании $g : t \rightarrow t'$ t' раскрашен также как и t . Например, поворот на 90° —



не даёт нового раскрашивания вершин квадрата.

Вопрос: Сколько существует неэквивалентных раскрасок = классов эквивалентности $C(\mathcal{G})$?

Вычисление $C(\mathcal{G} : T)_\alpha$ через цикловой индекс

- ▶ Каждый класс эквивалентности это g -цикл; их $C(g) = \nu_1 + \dots + \nu_N$ штук.
- ▶ Каждая перестановка $g \in \mathcal{G}$ с типом $\langle \nu_1, \dots, \nu_N \rangle$ будет иметь $|\text{Fix}(g)| = r^{C(g)}$ неподвижных точек: каждый класс эквивалентности это g -цикл, их $C(g)$ и

$$|\text{Fix}(g)| = x_1^{\nu_1} \cdot \dots \cdot x_N^{\nu_N} \Big|_{x_1=\dots=x_N=r} = r^{C(g)}.$$

Следовательно, по лемме Бёрсайда, число полученных классов эквивалентности, т.е. неэквивалентных раскрасок

Теорема

$$C(\mathcal{G} : T)_\alpha = P(\mathcal{G} : T, x_1, \dots, x_N) \Big|_{x_1=\dots=x_N=r}.$$

Например, $P_{\mathcal{G}}(1, \dots, 1) = 1$: если все элементы покрасить в один цвет, то таких раскрасок одна.

Задача про слова

Составляются слова длины $l \geq 2$ из алфавита $\{a_1, \dots, a_m\}$. Слова считаются эквивалентными, если они получаются одно из другого перестановкой крайних букв.

Определить число S неэквивалентных слов.

Было решение: $S = \frac{m^l + m^{l-1}}{2}$.

Другое решение: $\mathcal{G} = \{e, g\} \cong Z_2$; $T: \underbrace{\circ \circ \dots \circ \circ}_{l-2}$.

Элемент g группы \mathcal{G}	$Type(g)$	$w(g)$	# МОНОМОВ
e	$\langle l, 0, \dots, 0 \rangle$	x_1^l	1
g	$\langle l-2, 1, 0, \dots, 0 \rangle$	$x_1^{l-2} x_2^1$	1

Цикловой индекс: $P(x_1, \dots, x_l) = \frac{1}{2} [x_1^l + x_1^{l-2} x_2^1]$.

$S = P(m, \dots, m)$.

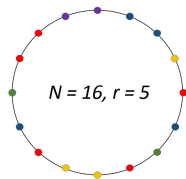
Классическая комбинаторная задача об ожерельях

Ожерелье — окружность, на которой на равных расстояниях по дуге (в вершинах правильного многоугольника) располагаются «бусины».

Задача об ожерельях. Сколько различных ожерелий можно составить из N бусин r цветов?

Варианты. Ожерелья неразличимы, если одно получается из другого *самосовмещением*:

1. поворотом в плоскости (бусины плоские, окрашены с одной стороны) — самодействие циклической группы Z_N ;
2. поворотом и переверотом в пространстве (бусины круглые) — самодействие группы диэдра (двойной пирамиды) D_N .



Задача об ожерельях: $N = 5, r = 3$

Сколько разных ожерелий можно составить из 5 бусин 3 цветов?

T — вершины правильного пятиугольника. $\#Col(3) = ?$

① Ожерелья одинаковы, если одно получается из другого поворотом.

Решение. $\mathcal{G} \cong Z_5 = \langle t \rangle, t^5 = e, n = 5$.

Элемент группы	$Type(g)$	$w(g)$	# мономов
e	$\langle 5, 0, 0, 0, 0 \rangle$	x_1^5	1
t, t^2, t^3, t^4	$\langle 0, 0, 0, 0, 1 \rangle$	x_5	4

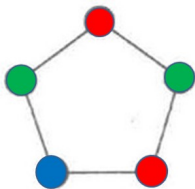
Цикловой индекс: $P(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \frac{1}{5} [x_1^5 + 4x_5]$.

$$\#Col(3) = P(3, \dots, 3) = \frac{3^5 + 4 \cdot 3}{5} = \frac{3 \cdot 85}{5} = 3 \cdot 17 = 51.$$

Задача Олимпиады «Покори Воробьёвы горы – 2009»

Для 50 детей детского сада закуплены 50 одинаковых тарелок. По краю каждой тарелки равномерно расположено 5 белых кружочков. Воспитатели хотят перекрасить какие-либо из этих кружочков в другой цвет так, чтобы все тарелки стали различными.

Какое наименьшее число дополнительных цветов потребуется им для этого?



Как должны были решать школьники

Решение.

Пусть требуется r цветов.

Отбросим r вариантов раскраски в один цвет.

Число остальных вариантов —

без учёта возможности поворота тарелки: $r^5 - r$;

с учётом поворота: $\frac{r^5 - r}{5}$

(каждый вариант повторяется 5 раз).

$$\text{Итого: } \#Col(r) = \frac{r^5 - r}{5} + r = \frac{r^5 + 4r}{5};$$

При 2 дополнительных цветах $\#Col(3) = 51$.

Задача об ожерельях: $N = 5, r = 3$, 2-й вариант

② Ожерелья одинаковы, если одно получается из другого поворотом и/или переворотом.

\mathcal{G} — группа диэдра $D_5 = \langle t, f \rangle$, $t^5 = f^2 = e$, $n = |D_5| = 10$.

Элемент группы g	$Type(g)$	$w(g)$	# мономов
e	$\langle 5, 0, 0, 0, 0 \rangle$	x_1^5	1
t, t^2, t^3, t^4	$\langle 0, 0, 0, 0, 1 \rangle$	x_5	4
f, tf, \dots, t^4f	$\langle 1, 2, 0, 0, 0 \rangle$	$x_1x_2^2$	5
Всего			10

Цикловой индекс: $P = \frac{1}{10} [x_1^5 + 4x_5 + 5x_1x_2^2]$.

$$\#Col(3) = P(x_1, \dots, x_5)|_{x_1=\dots=x_5=3} = \frac{3^5 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 3^3}{10} =$$

39.

Задача о раскраске сторон квадрата

Стороны квадрата раскрашивают в r цветов.

Сколько существует различно окрашенных квадратов?

Решение. Группа самосовмещения квадрата в пространстве — группа диэдра $D_4 = \langle t, f, s \rangle$, которая порождается тремя образующими:

t : вращение на 90° вокруг центра симметрии (в выбранном направлении — по или против часовой стрелки);

f : симметрия относительно оси, проходящей через середины противоположных сторон — 2 оси;

s : симметрия относительно оси, проходящей через середины противоположных вершин — 2 оси.

$$t^4 = f^2 = s^2 = e, \quad |D_4| = 8.$$

Задача о раскраске сторон квадрата...

При самодействии группы D_4 ($N = 4$) её элементы будут иметь следующие веса:

e : единичная перестановка оставит все стороны на месте, т.е. имеются 4 цикла длины 1, вес x_1^4 (1 перестановка);

t, t^3 : стороны циклически переходят друг в друга по и против часовой стрелке, длина цикла 4, вес x_4^1 (2 перестановки);

t^2 : стороны переходят в противоположные, что даёт два цикла длины 2, вес — x_2^2 (1 перестановка);

f : две противоположные стороны на месте, остальные две меняются местами, т.е. имеются два единичных цикла и один длины 2, вес — $x_1^2 x_2^1$ (1 перестановка, 2 оси);

s : в двух парах смежных сторон элементы меняются местами, что даёт два цикла длины 2, вес — x_2^2 (1 перестановка, 2 оси).

Задача о раскраске сторон квадрата...

Цикловой индекс самодействия D_4 :

$$P_{D_4}(x_1, \dots, x_4) = \frac{1}{8} [x_1^4 + 2x_4 + 3x_2^2 + 2x_1^2x_2].$$

Число раскрасок квадрата в r цветов:

$$P_{D_4}(r, \dots, r) = \frac{1}{8} [r^4 + 2r + 3r^2 + 2r^3].$$

В частности, в два и три цвета:

$$\#Col(2) = \frac{2^4 + 4 \cdot 2^2 + 2^4}{2^3} = 2 + 2 + 2 = 6,$$

$$\#Col(3) = \frac{3^4 + 2 \cdot 3 + 3^4}{8} = \frac{81 + 6 + 81}{8} = \frac{80 + 8 + 80}{8} = 21.$$

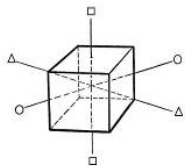
Задача о раскраске куба

Задача (раскраска граней куба в два цвета).

Грани куба раскрашивают в 2 и 3 цвета.

Сколько существует различно окрашенных кубов?

Решение. Напоминание: $\mathcal{G} = O = \langle t, f, r \rangle$, $|O| = 24$.



t — вращение на 90° вокруг оси, проходящей через середины двух противоположных граней ($\square-\square$, 3 оси);

f — вращение на 180° вокруг оси, проходящей через середины двух противоположных рёбер ($\circ-\circ$, 6 осей);

r — вращение на 120° вокруг оси, проходящей через две противоположные вершины ($\triangle-\triangle$, 4 оси).

Задача о раскраске куба: обозначения элементов

Обозначим через F множество граней куба; $|F| = N = 6$.

Выберем некоторую грань куба (квадрат) и обозначим её ①, а параллельную ей — ②.

Перенумеруем последовательно вершины грани ① числами $1, \dots, 4$, а вершины грани ② — числами $5, \dots, 8$ так, что вершина с номером i смежна с вершиной с номером $i + 4$, $i = 1, 2, 3, 4$.

Перестановки далее указаны для случая, когда ось вращения

$\langle t \rangle$ проходит через середины граней ① и ②,

$\langle f \rangle$ проходит через середины рёбер $(3-7)$ и $(1-5)$,

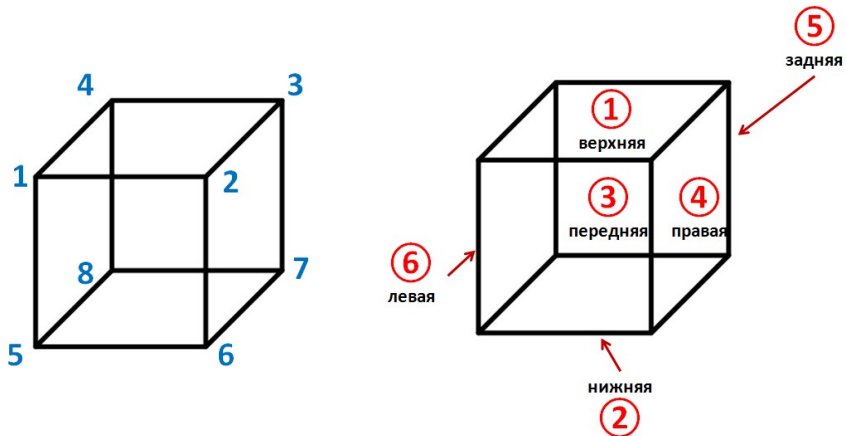
$\langle s \rangle$ проходит через вершины (1) и (7) ,

а грани обозначены:

$(1-2-6-5)$ через ③, параллельная ей грань — ⑤,

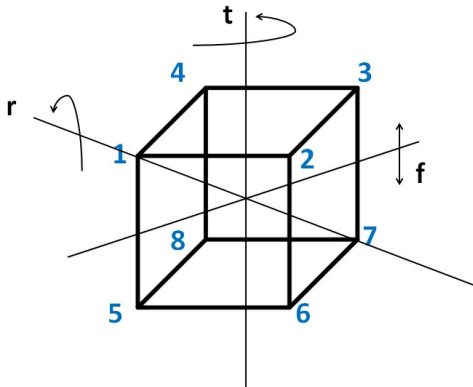
грань $(2-3-7-6)$ — через ④, параллельная ей грань — ⑥.

Задача о раскраске куба: обозначения вершин и граней



└ Применение леммы Бёрнсайда для решения комбинаторных задач

Задача о раскраске куба: обозначения осей



$$t^4 = f^2 = r^3 = e$$

Задача о раскраске куба: раскраска граней $|F| = N = 6$

$g \in O$	перестановка	$Type(g)$	$w(g)$	#
e	(①)...(⑥)	$\langle 6, 0, \dots \rangle$	x_1^6	1
t, t^3	(①)(②)(③④⑤⑥)	$\langle 2, 0, 0, 1, 0, \rangle$	$x_1^2 x_4$	$3 \cdot 2 = 6$
t^2	(①)(②)(③⑤)(④⑥)	$\langle 2, 2, 0, \dots \rangle$	$x_1^2 x_2^2$	3
f	(①②)(③⑥)(④⑤)	$\langle 0, 3, 0, \dots \rangle$	x_2^3	6
r, r^2	(①③⑥)(②④⑤)	$\langle 0, 0, 2, 0, \dots \rangle$	x_3^2	$4 \cdot 2 = 8$
Всего				24

$$P(x_1, \dots, x_6) = \frac{1}{24} [x_1^6 + 6x_1^2 x_4 + 3x_1^2 x_2^2 + 6x_2^3 + 8x_3^2].$$

$$\#Col(2) = P(2, \dots, 2) = \frac{1}{24} [2^6 + 12 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^4 + 8 \cdot 2^2] = 10,$$

$$\#Col(3) = P(3, \dots, 3) = \frac{1}{24} [3^6 + 12 \cdot 3^3 + 3 \cdot 3^4 + 8 \cdot 3^2] = 48.$$

└ Применение леммы Бёрнсайда для решения комбинаторных задач

Цикловой индекс действия группы октаэдра —
 — на множество R рёбер куба ($|R| = N = 12$):

$g \in O$	$Type(g)$	$w(g)$	$\#$
e	$\langle 12, 0, \dots \rangle$	x_1^{12}	1
t, t^3	$\langle 0, 0, 0, 3, 0, 0 \rangle$	x_4^3	$3 \cdot 2 = 6$
t^2	$\langle 0, 6, 0, \dots \rangle$	x_2^6	3
f	$\langle 2, 5, 0, \dots \rangle$	$x_1^2 x_2^5$	6
r, r^2	$\langle 0, 0, 4, 0, \dots \rangle$	x_3^4	$4 \cdot 2 = 8$
Всего			24

Цикловой индекс:

$$P(O : R) = \frac{1}{24} [x_1^{12} + 6x_4^3 + 3x_2^6 + 6x_1^2 x_2^5 + 8x_3^4].$$

└ Применение леммы Бёрнсайда для решения комбинаторных задач

Цикловой индекс действия группы октаэдра —

— на множество V вершин куба ($|V| = N = 8$):

$g \in O$	$Type(g)$	$w(g)$	$\#$
e	$\langle 8, 0, \dots \rangle$	x_1^8	1
t, t^3	$\langle 0, 0, 0, 2, 0, 0 \rangle$	x_4^2	$3 \cdot 2 = 6$
t^2	$\langle 0, 4, 0, \dots \rangle$	x_2^4	3
f	$\langle 0, 4, 0, \dots \rangle$	x_2^4	6
r, r^2	$\langle 2, 0, 2, 0, \dots \rangle$	$x_1^2 x_3^2$	$4 \cdot 2 = 8$
Всего			24

Цикловой индекс:

$$P(O : V) = \frac{1}{24} [x_1^8 + 6x_4^2 + 9x_2^4 + 8x_1^2 x_3^2].$$

Задача (пересчисление графов).

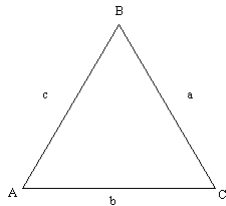
Сколько имеется неориентированных непомеченных графов (без петель и кратных рёбер) с тремя вершинами?

Решение. T — стороны треугольника, $N = 3$.

$\mathcal{G} \cong S_3$ — все перестановки сторон,

$$n = 3! = 6.$$

$\mathcal{G} : T$ — самодействие группы S_3



Графы **неориентированные** —

$r = 2$ — пометки «есть ребро/нет ребра»

$$S_3 = \{ e, (abc), (acb), ((a)(bc)), ((b)(ac)), ((c)(ab)) \}$$

Пересчисление графов...

$$S_3 = \left\{ e, \underbrace{(abc)}_t, \underbrace{(acb)}_{t^2}, \underbrace{((a)(bc))}_f, \underbrace{((b)(ac))}_{tf}, \underbrace{((c)(ab))}_{t^2f} \right\} = \langle t, f \rangle$$

$g \in S_3$	$Type(g)$	$w(g)$	#
$e = (a)(b)(c)$	$\langle 3, 0, 0 \rangle$	x_1^3	1
t, t^2	$\langle 0, 0, 1 \rangle$	x_3^1	2
f, tf, t^2f	$\langle 1, 1, 0 \rangle$	$x_1^1 x_2^1$	3
Всего			6

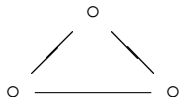
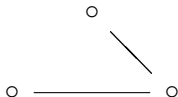
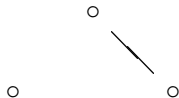
$$P(S_3) = \frac{1}{6} [x_1^3 + 2x_3^1 + 3x_1^1 x_2^1],$$

— цикловой индекс самодействия группы S_3 , или, что то же, группы симметрии треугольника.

$$P(2, 2, 2) = 4.$$

Перечисление графов...

Перечислим эти графы:



Цикловые индексы самодействия S_n , Z_n , D_n и действия O на элементы куба

$$P(S_n) = \sum_{\substack{(j_1, \dots, j_n) \in \mathbb{N}_0^n \\ 1j_1 + 2j_2 + \dots + nj_n = n}} \frac{x_1^{j_1} x_2^{j_2} \dots x_n^{j_n}}{(1^{j_1} j_1!)(2^{j_2} j_2!) \dots (n^{j_n} j_n!)},$$

$$P(Z_n) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \varphi(d) x_d^{n/d}, \quad \varphi - \text{функция Эйлера},$$

$$P(D_n) = \frac{1}{2} P(Z_n) + \begin{cases} \frac{1}{2} x_1 x_2^{(n-1)/2}, & \text{если } n \text{ нечётно,} \\ \frac{1}{4} [x_2^{n/2} + x_1^2 x_2^{n/2-1}], & \text{если } n \text{ чётно,} \end{cases}$$

$$P(O : V) = \frac{1}{24} [x_1^8 + 9x_2^4 + 6x_4^2 + 8x_1^2 x_3^2] \quad (\text{на вершины}),$$

$$P(O : E) = \frac{1}{24} [x_1^{12} + 3x_2^6 + 8x_3^4 + 6x_4^2 + 8x_1^2 x_2^5 + 6x_4^3] \quad (\text{на рёбра}),$$

$$P(O : F) = \frac{1}{24} [x_1^6 + 3x_1^2 x_2^2 + 6x_1^2 x_4 + 6x_2^3 + 8x_3^2] \quad (\text{на грани}).$$

Разделы I

Действие группы на множестве

Применение леммы Бёрнсайда для решения комбинаторных задач

Применение теоремы Пойа для решения комбинаторных задач

Задачи с решениями

Что ещё почитать

Теорема Пойа

К множеству T , $|T| = N$, группе \mathcal{G} , $|G| = n$ и действию $\mathcal{G} : T$ _{α} добавим множество $R = \{c_1, \dots, c_r\}$, меток («красок»), и совокупность функций $F = R^T$ — приписывания меток (*раскрашиваний*) элементам T .

\mathcal{G} , действуя на T , действует и на R^T — $\circ : R^T \times G \stackrel{\circ}{=} R^T$.

Придадим вес элементам R : $w(c_i) = y_i$, $i = \overline{1, r}$.

Теорема (Редфилда-Пойа; 1927, 1937)

Цикловой индекс действия группы \mathcal{G} на R^T есть

$$P(\mathcal{G} : R^T, y_1, \dots, y_r) = P(\mathcal{G} : T, x_1, \dots, x_N) \Big|_{x_k = y_1^k + \dots + y_r^k, k = \overline{1, N}}$$

Теорема Пойа...

Следствие

Если все веса выбраны одинаковыми ($y_1 = \dots y_r = 1$), то $x_1 = \dots x_N = r$ и $W(F)$ — число классов эквивалентности

$$C(\mathcal{G} : R^T) = C(\mathcal{G} : T) = P(\mathcal{G} : T, r, \dots, r).$$

— лемма Бёрнсайда.

Что можно определить (подсчитать) с помощью:

леммы Бёрнсайда — общее число неэквивалентных разметок (раскрасок);

теорема Редфилда-Пойа — число разметок данного типа, т.е. содержащих данное количество элементов конкретного цвета.

Д. Пойа



Дьёрдь Пойа (Pólya György, 1887–1985)

— венгерский математик.

После окончания Будапештского
университета работал в

Высшей технической школе в Цюрихе,

а с 1940 г. — в Стэнфордском
университете (США).

Внёс заметный вклад в теорию чисел, функциональный анализ, математическую статистику (*распределение Пойа*) и комбинаторику (*теорема Редфилда–Пойа*).

Пойа много работал со школьными учителями математики и внёс большой вклад в популяризацию науки.

Усложним задачу об ожерельях $N = 5, r = 3$

Задача об ожерельях (5 бусин 3 цветов).

Цвета — красный, синий, зелёный. Ожерелья одинаковы, если одно получается из другого поворотом и/или переворотом.

Сколько имеется ожерелий, имеющих ровно 2 красные бусины?

Решение. Было: $\mathcal{G} = D_5$,

цикловой индекс $P = \frac{1}{10} [x_1^5 + 4x_5 + 5x_1x_2^2]$,

всего ожерелий $P(3, \dots, 3) = 39$ (только поворот — 51).

$$x_1 = y_1 + y_2 + y_3, \quad x_2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2, \quad \dots, \quad x_5 = y_1^5 + y_2^5 + y_3^5.$$

$$\begin{cases} w(\text{красный}) = y_1, \\ w(\text{синий}) = y_2, \\ w(\text{зелёный}) = y_3, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = y, \\ y_2 = y_3 = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y + 2, \\ x_2 = y^2 + 2, \\ \dots \\ x_5 = y^5 + 2. \end{cases}$$

Задача об ожерельях: 5 бусин 3 цветов...

$$P(x_1, \dots, x_5) = \frac{1}{10} [x_1^5 + 4x_5 + 5x_1x_2^2]$$

$$x_k \mapsto y^k + 2, \quad k = \overline{1, 5}; \quad P(y) = \sum_{i=1}^5 u_i y^i, \quad \boxed{u_2 = ?}$$

$$\begin{aligned} P(y) &= \frac{1}{10} [u_0 + u_1 y + u_2 y^2 + \dots + u_5 y^5] = \\ &= \frac{1}{10} [(y+2)^5 + 4(y^5+2) + 5(y+2)(y^2+2)^2] = \\ &= \frac{1}{10} [\dots + C_5^2 2^3 y^2 + \dots + 5(y+2)(y^4+4y^2+4)] = \\ &= \frac{1}{10} [\dots + (10 \cdot 8 + 5 \cdot 2 \cdot 4)y^2 + \dots]. \end{aligned}$$

$$u_2 = \frac{80 + 40}{10} = 12.$$

Задача о раскраске куба

Вершины куба помечают красными и синим цветами.

Сколько существует

- 1) *разнопомеченных кубов ($\#Col(3)$);*
- 2) *кубов, у которых половина вершины красные ($\#Col(4, 4)$);*
- 3) *кубов, у которых не более 2 красных вершин?*

Решение. Цикловой индекс действия O на вершины куба

$$P(O : V; x_1, \dots, x_8) = \frac{1}{24} [x_1^8 + 6x_4^2 + 9x_2^4 + 8x_1^2x_3^2].$$

$$\begin{aligned} 1) \#Col(2) &= P|_{x_1=\dots=x_8=2} = \frac{2^8 + 6 \cdot 2^2 + 9 \cdot 2^4 + 8 \cdot 4 \cdot 4}{3 \cdot 2^3} = \\ &= \frac{32 + 3 + 18 + 16}{3} = \frac{69}{3} = 23. \end{aligned}$$

Задача о раскраске куба... $(\frac{1}{24} [x_1^8 + 6x_4^2 + 9x_2^4 + 8x_1^2x_3^2])$

2) $w(\text{красный}) = y$, $w(\text{синий}) = 1$, $x_k = y^k + 1$, $k = \overline{1, 8}$:

$$\#Col(4, 4) = \frac{1}{24} [(y+1)^8 + 9 \cdot (y^2+1)^4 + 6 \cdot (y^4+1)^2 + 8 \cdot (y+1)^2(y^3+1)^2] =$$

$$= \frac{1}{24} [\dots + 28y^2 + C_8^4 y^4 + \dots + 9(\dots 4y^2 + 6y^4 + \dots) + \dots + 6 \cdot 2y^4 \dots + 8(\dots + 2y + y^2 + \dots)(\dots + 2y^3 + \dots)].$$

$$u_4 = \frac{1}{24} [70 + 9 \cdot 6 + 6 \cdot 2 + 8 \cdot 2 \cdot 2] = \frac{168}{24} = 7.$$

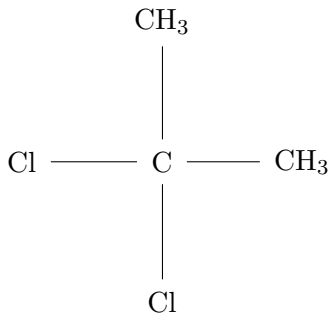
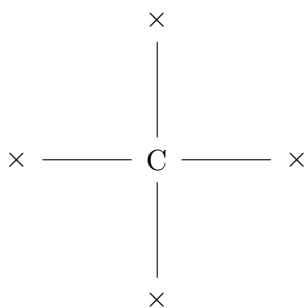
3) $\#Col(\leq 2, *) = u_0 + u_1 + u_2$, $u_0 = u_1 = 1$.

$$u_2 = \frac{1}{24} [\dots + 28y^2 + \dots + 9(\dots + 4y^2 \dots) + 8(\dots + y^2 + \dots)] =$$

$$= \frac{28 + 36 + 8}{24} = \frac{72}{24} = 3. \quad \#Col(\leq 2, *) = 1 + 1 + 3 = 5.$$

Задача о числе молекул

Рассмотрим молекулы 4-валентного углерода C:



где на месте \times могут находиться CH_3 (метил), C_2H_5 (этил), H (водород) или Cl (хлор). Например — дихлорбутан.

Задача о числе молекул...

(продолжение)

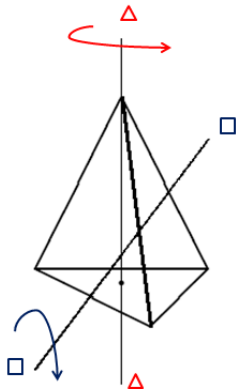
Найти

- 1) *общее число M всех молекул;*
- 2) *число молекул с $H = 0, 1, 2, 3, 4$ атомами водорода.*

Задача о числе молекул...

Решение. Какая группа действует и на каком множестве?

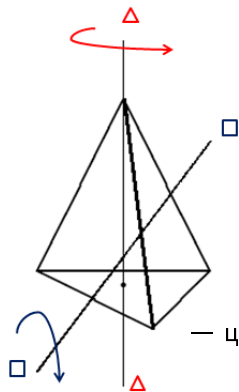
$T = \langle t, f \rangle, t^3 = f^2 = e$, где



t — вращение на 120° вокруг оси, проходящей через вершину и центр тетраэдра ($\Delta-\Delta$);
 f — вращение на 180° вокруг оси, проходящей через центры двух противоположных рёбер ($\square-\square$).

Задача о числе молекул... (группа вращения тетраэдра)

Цикловой индекс действия группы T на вершины тетраэдра —



$g \in T$	$Type(g)$	$w(g)$	#
e	$\langle 4, 0, 0, 0 \rangle$	x_1^4	1
t, t^2	$\langle 1, 0, 1, 0 \rangle$	$x_1 x_3$	$4 \cdot 2 = 8$
f	$\langle 0, 2, 0, 0 \rangle$	x_2^2	3

$$P(T : V) = \frac{1}{12} [x_1^4 + 8x_1 x_3 + 3x_2^2]$$

— цикловой индекс действия группы вращения тетраэдра на его вершины (= грани).

Задача о числе молекул... (группа вращения тетраэдра)...

1) Получено

$$P(x_1, \dots, x_4) = \frac{1}{12} [x_1^4 + 8x_1x_3 + 3x_2^2].$$

Всего молекул (4 радикала, $x_1 = \dots = x_4 = 4$) —

$$\begin{aligned} M = P(x_1, \dots, x_4) &= \frac{4^4 + 8 \cdot 4 \cdot 4 + 3 \cdot 4^2}{3 \cdot 4} = \frac{64 + 32 + 12}{3} = \\ &= \frac{96 + 12}{3} = 32 + 4 = 36. \end{aligned}$$

2) Веса: $y_1 = \text{H}$, $y_2 = y_3 = y_4 = 1$.Подстановка в P : $x_k = \text{H}^k + 3$, $k = \overline{1, 4}$.

Задача о числе молекул... (группа вращения тетраэдра)...

$$P(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{12} [x_1^4 + 8x_1x_3 + 3x_2^2].$$

Проводим подстановку — $x_k \mapsto H^k + 3$, $k = 1, 2, 3$.

$$\begin{aligned} P(H) &= \frac{1}{12} \left[(H+3)^4 + 8(H+3)(H^3+3) + 3(H^2+3)^2 \right] = \\ &= \frac{1}{12} \left[(H^4 + 4 \cdot H^3 \cdot 3 + 6 \cdot H^2 \cdot 9 + 4 \cdot H \cdot 27 + 81) + \right. \\ &\quad \left. + 8(H^4 + 3H^3 + 3H + 9) + 3(H^4 + 6H^2 + 9) \right] = \\ &= 1 \cdot H^4 + 3 \cdot H^3 + 6 \cdot H^2 + 11 \cdot H + 15. \end{aligned}$$

Итого имеется молекул с числом атома водорода:

с 4-мя — 1 шт., с 3-мя — 3 шт., с 2-мя — 6 шт.,

с 1-м — 11 шт., без атомов водорода — 15 шт.,

всего — $1 + 3 + 6 + 11 + 15 = 36$.

Разделы I

Действие группы на множестве

Применение леммы Бёрнсайда для решения комбинаторных задач

Применение теоремы Пойа для решения комбинаторных задач

Задачи с решениями

Что ещё почитать

Задача ТП-0-1 I

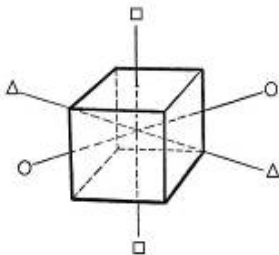
Найдите порядок стабилизаторов произвольной

(а) вершины, (б) ребра, (в) грани

куба при действии группы октаэдра O на соответствующие элементы.

Какие перестановки в них содержатся?

Решение.



Задача ТП-0-1 II

- (а) Пусть O действует на вершины куба и v — некоторая вершина.
Тогда $\text{Stab}(v) = \{e, s, s^2\} \leq O$ — группа вращений на 120° (в выбранном направлении) вокруг диагонали куба, проходящей через данную вершину, $\text{Stab}(v) \cong Z_3$.
- (б) Пусть O действует на рёбра куба и r — некоторое ребро.
Тогда $\text{Stab}(r) = \{e, f\} \leq O$ — группа вращений на 180° вокруг оси, проходящей через середины рёбер (данного и ему противоположного) куба, $\text{Stab}(r) \cong Z_2$.
- (в) Пусть O действует на грани куба и f — некоторая грань.
Тогда $\text{Stab}(f) = \{e, t, t^2, t^3\} \leq O$ — группа вращений на 90° (в выбранном направлении) вокруг оси, проходящей через середины граней (данной и ей противоположной) куба, $\text{Stab}(f) \cong Z_4$.

Задача ТП-0-2

Найти цикловой индекс для следующим образом
определённого самодействия четверной группы Клейна
 $V_4 = \{ e, a, b, ab \mid a^2 = b^2 = (ab)^2 = e^2 = e, ab = ba \}$:

$$1) \quad e: \begin{pmatrix} e & a & b & ab \\ e & a & b & ab \end{pmatrix}, \quad a: \begin{pmatrix} e & a & b & ab \\ a & e & ab & b \end{pmatrix},$$

$$b: \begin{pmatrix} e & a & b & ab \\ b & ab & e & a \end{pmatrix}, \quad ab: \begin{pmatrix} e & a & b & ab \\ ab & b & a & e \end{pmatrix};$$

$$2) \quad e: \begin{pmatrix} e & a & b & ab \\ e & a & b & ab \end{pmatrix}, \quad a: \begin{pmatrix} e & a & b & ab \\ a & e & b & ab \end{pmatrix},$$

$$b: \begin{pmatrix} e & a & b & ab \\ e & a & ab & b \end{pmatrix}, \quad ab: \begin{pmatrix} e & a & b & ab \\ a & e & ab & b \end{pmatrix}.$$

Задача ТП-0-2...

Решение. Везде группа Клейна V_4 действует на свои же элементы.

	g	$Type(g)$	$w(g)$
1)	e	$\langle \underline{4}, 0, 0, 0 \rangle$	x_1^4
	a, b, ab	$\langle 0, 2, 0, 0 \rangle$	x_2^2

$$P_{V_4} = \frac{1}{4} [x_1^4 + 3x_2^2]$$

	g	$Type(g)$	$w(g)$
2)	e	$\langle \underline{4}, 0, 0, 0 \rangle$	x_1^4
	a, b	$\langle \underline{2}, 1, 0, 0 \rangle$	$x_1^2 x_2$
	ab	$\langle 0, 1, 0, 0 \rangle$	x_2

$$P'_{V_4} = \frac{1}{4} [x_1^4 + 2x_1^2 x_2 + x_2]$$

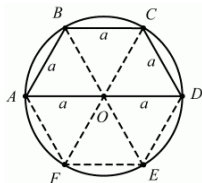
Первая группа перестановок есть нормальная подгруппа S_4 , а вторая — нет.

Задача ТП-0-3

Найти цикловой индекс транзитивного самодействия группы Z_6 .

Решение. Обозначим последовательно вершины правильного шестиугольника буквами A, \dots, F , $Z_6 = \langle t \rangle$, t — поворот на 60° .

$g \in Z_6$	$Type(g)$	$w(g)$
$e = (A) \dots (F)$	$\langle 6, 0, 0, 0, 0, 0 \rangle$	x_1^6
$g = (ABCDEF)$	$\langle 0, 0, 0, 0, 0, 1 \rangle$	x_6
$g^2 = (ACE)(BDF)$	$\langle 0, 0, 2, 0, 0, 0 \rangle$	x_3^2
$g^3 = (AD)(BE)(CF)$	$\langle 0, 3, 0, 0, 0, 0 \rangle$	x_2^3
$g^4 = (AEC)(BFD)$	$\langle 0, 0, 2, 0, 0, 0 \rangle$	x_3^2
$g^5 = (AFEDCB)$	$\langle 0, 0, 0, 0, 0, 1 \rangle$	x_6



$$P_{Z_6} = \frac{1}{6} [x_1^6 + x_2^3 + 2x_3^2 + 2x_6] = \frac{1}{6} \sum_{d|6} \varphi(d) x_d^{6/d};$$

$$D(6) = \{1, 2, 3, 6\}, \varphi(1) = \varphi(2) = 1, \varphi(3) = \varphi(6) = 2$$

Задача ТП-0-5

Найти цикловой индекс действия группы симметрии правильного n -угольника (группы диэдра) D_n на его вершины (стороны).

Решение. $|D_n| = 2n$, $n > 2$.

1. При нечётных n : $D_n = \langle t, f \rangle$, где

t — вращение на $360^\circ/n$ вокруг центра квадрата,

$\langle t \rangle \cong Z_n$;

r — симметрия относительно прямой, проходящей через вершину и центр многоугольника, $\langle r \rangle \cong Z_2$, n осей.

$$P(D_n) = \frac{1}{2n} \left[\sum_{d|n} \varphi(d) x_d^{n/d} + n x_1 x_2^{(n-1)/2} \right].$$

Задача ТП-0-5...

2. При чётных n : $D_n = \langle t, f, s \rangle$, где

t — то же;

f — симметрия относительно прямой, проходящей через середины противоположных сторон, $\langle f \rangle \cong Z_2$, $n/2$ осей;

s — симметрия относительно прямой, проходящей через противоположные вершин, $\langle s \rangle \cong Z_2$, $n/2$ осей.

$$P(D_n) = \frac{1}{2n} \left[\sum_{d|n} \varphi(d) x_d^{n/d} + \frac{n}{2} x_2^{n/2} + \frac{n}{2} x_1^2 x_2^{n/2-1} \right].$$

Задача ТП-1-1

На стеклянных пластинах рисуют одинаковые прямоугольники (не квадраты) и раскрашивают их стороны в r цветов.

Сколько можно нарисовать таких различных прямоугольников?

Конкретно, при $r = 2$?

Решение. Найдём цикловой индекс $R : S$ действия группы R самосовмещений прямоугольника в пространстве на его стороны. Группа $R = \langle t, f \rangle$ порождается образующими: t — вращение вокруг центра симметрии на 180° , f — отражение вокруг оси, проходящей через середины противоположных сторон, 2 оси.

$g \in R$	$Type(g)$	$w(g)$	$\#$
e	$\langle 4, 0, 0, 0 \rangle$	x_1^4	1
t	$\langle 0, 2, 0, 0 \rangle$	x_2^2	1
f	$\langle 2, 1, 0, 0 \rangle$	$x_1^2 x_2$	2

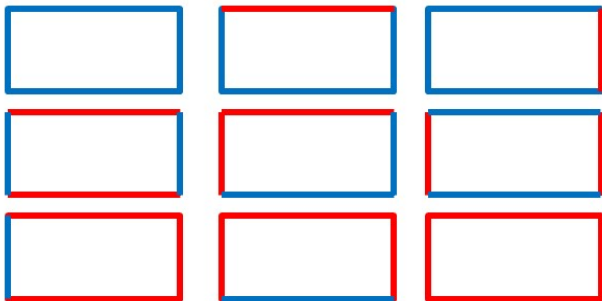
$$P(R : S; x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{4} [x_1^4 + x_2^2 + 2x_1^2 x_2].$$

Задача ТП-1-1...

$$P(R : S; r, \dots, r) = \frac{1}{4} [r^4 + r^2 + 2r^3].$$

Число 2-цветных прямоугольников —

$$\#Col(2) = P(R : S; 2, \dots, 2) = \frac{16 + 4 + 16}{4} = \frac{36}{4} = 4 + 1 + 4 = 9 :$$



Задача ТП-1-2

На стеклянных пластинах рисуют одинаковые прямоугольники (не квадраты) и раскрашивают их вершины в 3 цвета.

Сколько можно нарисовать таких различных прямоугольников?

Решение. Найдём цикловой индекс $P(R : V)_\alpha$ действия группы R самосовмещений прямоугольника в пространстве на его вершины.

$g \in R$	$Type(g)$	$w(g)$	#
e	$\langle 4, 0, 0, 0 \rangle$	x_1^4	1
t	$\langle 0, 2, 0, 0 \rangle$	x_2^2	1
f	$\langle 0, 2, 0, 0 \rangle$	x_2^2	2

$$P(R : V)_\alpha; x_1, x_2, x_3, x_4 = \frac{1}{4} [x_1^4 + 3x_2^2]$$

Число прямоугольников:

$$\#Col(3) = P(R : V)_\alpha; 3, \dots, 3 = \frac{81 + 27}{4} = \frac{108}{4} = 27$$

Задача ТП-1-3 I

Квадратная стеклянная пластина разделена на 9 равных квадратов, которые раскрашиваются в один из r цветов.

Сколько существует разноокрашенных пластин?

Конкретно, при $r = 2$?

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Решение. Группа $D_4 = \langle t, f, s \rangle$, $t^4 = f^2 = s^2 = e$, $|D_4| = 8$ действует на 9 элементов стеклянной пластики.

t — вращение на 90° вокруг центра квадрата;

f — симметрия относительно прямой, проходящей через середины противоположных сторон;

Задача ТП-1-3 II

s — симметрия относительно прямой, проходящей через противоположные вершин.

T — множество квадратов, составляющих пластину, $|T| = 9$.

Определяем цикловой индекс действия D_4 на T .

$g \in D_4$	перестановка	$Type(g)$	$w(g)$	#
e	(1) ... (9)	$\langle 9, 0, \dots \rangle$	x_1^9	1
t, t^3	(5)(1397)(2684)	$\langle 1, 0, 0, 2, \dots \rangle$	$x_1 x_4^2$	2
t^2	(5)(19)(37)(28)(79)	$\langle 1, 4, 0, \dots \rangle$	$x_1 x_2^4$	1
s, f, \dots	(2)(5)(8)(13)(48)(79)	$\langle 3, 3, 0, \dots \rangle$	$x_1^3 x_2^3$	4
				8

Цикловой индекс: $P = \frac{1}{8} [x_1^9 + 2x_1 x_4^2 + x_1 x_2^4 + 4x_1^3 x_2^3]$.

$$\#Col(2) = \frac{2^9 + 2 \cdot 2^3 + 2^5 + 4 \cdot 2^3 \cdot 2^3}{2^3} = 64 + 2 + 4 + 32 = 102.$$

Задача ТП-1-4 (о компостере) I

Компостером назовём квадратную таблицу 4×4 , в которой каждая клетка может быть либо пустой, либо содержать в центре символ \bullet .

Сколько существует различных компостеров, если не различать те, которые могут быть получены один из другого самосовмещениями в пространстве?

Решение.

Найдём цикловой индекс действия группы диэдра D_4 на 16 клеток компостера.

$$D_4 = \langle t, f, s \rangle, t^4 = f^2 = s^2 = e, |D_4| = 8,$$

Задача ТП-1-4 (о компостере) II

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

$g \in D_4$	перестановка	$Type(g)$	$w(g)$	#
e	$(1) \dots (16)$	$\langle 16, 0, \dots \rangle$	x_1^4	1
t, t^3	$(1, 4, 16, 13) \dots (6, 7, 11, 10)$	$\langle 0, 0, 0, 4, \dots \rangle$	x_4^4	2
t^2	$(1, 16) \dots (6, 11)$	$\langle 0, 8, 0, \dots \rangle$	x_2^8	1
f	$(1, 4) \dots (10, 11)$	$\langle 0, 8, 0, \dots \rangle$	x_2^8	2
s	$(1) \dots (16)(2, 5) \dots (12, 15)$	$\langle 4, 6, 0, \dots \rangle$	$x_1^4 x_2^6$	2

Задача ТП-1-4 (о компостере) III

Цикловой индекс действия группы D_4 на элементы компостера есть

$$P(x_1, \dots, x_4) = \frac{1}{8} [x_1^{16} + 2x_4^4 + 3x_2^8 + 2x_1^4x_2^6].$$

Наличие/отсутствие в клетке символа \bullet описывается их отображением в двухэлементное множество (раскраске в два цвета), поэтому число C различных компостеров есть

$$\begin{aligned} C = P(2, 2, \dots) &= \frac{2^{16} + 2^5 + 3 \cdot 2^8 + 2^{11}}{2^3} = \\ &= 8192 + 4 + 3 \cdot 32 + 256 = 8196 + 96 + 256 = 8548. \end{aligned}$$

К аналогичной задаче сводится задача о числе фотошаблонов рисунков соединений для интегральных схем.

Задача ТП-1-5

Найти число различных вариантов раскраски граней куба в 2 и 3 цвета.

Решение. Цикловой индекс:

$$P(O : F) = \frac{1}{24} \left[x_1^6 + \underline{6x_1^2x_4} + 3x_1^2x_2^2 + \underline{6x_2^3} + 8x_3^2 \right].$$

$$\#Col(2) = \frac{2^6 + 12 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^4 + 2^5}{3 \cdot 2^3} = \frac{8 + 12 + 6 + 4}{3} = 10.$$

$$\begin{aligned} \#Col(3) &= \frac{3^6 + 12 \cdot 3^3 + 3 \cdot 3^5 + 8 \cdot 3^2}{3 \cdot 8} = \frac{3 \cdot (81 + 36 + 27 + 8)}{8} = \\ &= \frac{3 \cdot (80 + 64 + 8)}{8} = 3 \cdot (10 + 8 + 1) = 3 \cdot 19 = 57. \end{aligned}$$

Задача ТП-1-6

Определить число различных раскрасок всех граней правильной 4-угольной пирамиды Π в 3 цвета.

Решение. Занумеруем последовательно боковые грани Π числами $1, \dots, 4$, а основание — 5 .

$\mathcal{G} \cong Z_4 = \langle t \rangle$, t — вращение на 90° .

$g \in Z_4$	$Type(g)$	$w(g)$	#
$e = (1)(2)(3)(4)(5)$	$\langle 5, 0, 0, 0, 0 \rangle$	x_1^5	1
$t, t^3 = (1234)(5)$	$\langle 1, 0, 0, 1, 0 \rangle$	$x_1 x_4$	2
$t^2 = (12)(34)(5)$	$\langle 1, 2, 0, 0, 0 \rangle$	$x_1 x_2^2$	1

$$P(x_1, \dots, x_5) = \frac{1}{4} [x_1^5 + 2x_1 x_4 + x_1 x_2^2],$$

$$P(3, \dots, 3) = \frac{3^5 + 2 \cdot 3^2 + 3^3}{4} = \frac{9 \cdot (27 + 2 + 3)}{4} = \frac{9 \cdot 32}{4} = 72.$$

Задача ТП-1-7

Найти число раскрасок всех граней усечённой правильной 4-угольной пирамиды в 3 цвета.

Решение. Пронумеруем грани Π : боковые — с 1 по 4 по часовой стрелке, основания — 5 и 6. Группа, действующая на Π — $Z_4 = \langle t \rangle$, t — поворот на 90° по часовой стрелке.

$g \in Z_4$	перестановка	$Type(g)$	$w(g)$	#
e	(1) ... (6)	$\langle 6, 0, \dots \rangle$	x_1^6	1
t, t^3	(1234)(5)(6)	$\langle 2, 0, 0, 1, 0, 0 \rangle$	$x_1^2 x_4$	2
t^2	(12)(34)(5)(6)	$\langle 2, 2, 0, \dots \rangle$	$x_1^2 x_2^2$	1

Цикловой индекс $P = \frac{1}{4} [x_1^6 + 2x_1^2 x_4 + x_1^2 x_2^2]$.

$$\#Col(3) = \frac{3^6 + 2 \cdot 3^2 + 3^4}{4} = \frac{3^3(27 + 2 + 3)}{4} = 27 \cdot 8 = 216.$$

Задача ТП-1-8

Найти число различных вариантов раскраски граней тетраэдра в 2 и 3 цвета.

Решение. Цикловой индекс:

$$P(T : F, x_1, \dots, x_4) = \frac{1}{12} [x_1^4 + 8x_1x_3 + 3x_2^2].$$

$$\#Col(2) = \frac{2^4 + 11 \cdot 2^2}{3 \cdot 2^2} = \frac{4 + 11}{3} = 5.$$

$$\#Col(3) = \frac{3^4 + 11 \cdot 3^2}{3 \cdot 4} = \frac{27 + 33}{4} = \frac{60}{4} = 15.$$

Задача ТП-1-9 I

Найти число различных вариантов раскраски рёбер тетраэдра в 2 и 3 цвета.

Решение. Группа $T = \langle t, f \rangle$, $t^3 = f^2 = e$, $|T| = 12$, где

t — вращение на 120° вокруг оси, проходящей через вершину и центр симметрии, 4 оси;

f — вращение на 180° вокруг оси, проходящей через середины противоположных рёбер, 3 оси.

Обозначим через E множество рёбер тетраэдра — $|E| = 6$ — и обозначим их цифрами от 1 до 6, считая, что рёбра 1, 2 и 3 инцидентны одной вершине, а ось вращения, задаваемого элементом f , проходит через середины рёбер 1 и 6.

Найдём цикловой индекс.

Задача ТП-1-9 II

$g \in T$	Type(g)	$w(g)$	#
$e = (1) \dots (6)$	$\langle 6, 0, \dots \rangle$	x_1^6	1
$t, t^2 = (123)(456)$	$\langle 0, 0, 2, 0, \dots \rangle$	x_3^2	8
$f = (1)(23)(45)(6)$	$\langle 2, 2, 0, \dots \rangle$	$x_1^2 x_2^2$	3
			12

$$P(T_\alpha : E, x_1, \dots, x_6) = \frac{1}{12} [x_1^6 + 8x_3^2 + 3x_1^2 x_2^2].$$

$$\#Col(2) = \frac{2^6 + 8 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^4}{3 \cdot 2^2} = \frac{15 + 9 + 12}{3} = 5 + 3 + 4 = 12,$$

$$\begin{aligned} \#Col(3) &= \frac{3^6 + 8 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3^4}{3 \cdot 4} = \frac{3 \cdot (81 + 8 + 27)}{4} = \\ &= \frac{3 \cdot (80 + 8 + 28)}{4} = 3 \cdot (20 + 2 + 7) = 3 \cdot 29 = 87. \end{aligned}$$

Задача ТП-1-10

Найти число различных вариантов раскраски рёбер куба в 2 цвета.

Решение. Цикловой индекс:

$$P(O : R) = \frac{1}{24} [x_1^{12} + 6x_4^3 + 3x_2^6 + 6x_1^2x_2^5 + 8x_3^4]$$

$$\begin{aligned} \#Col(2) &= \frac{2^{12} + 6 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^6 + 7 \cdot 2^7}{3 \cdot 2^3} = \\ &= \frac{2 \cdot (2^8 + 3 + 12 + 7 \cdot 8)}{3} = \frac{2 \cdot (256 + 3 + 12 + 56)}{3} = \\ &= \frac{2 \cdot (252 + 3 + 12 + 60)}{3} = 2 \cdot (84 + 11 + 4 + 20) = 2 \cdot 109 = 218. \end{aligned}$$

Задача ТП-1-11

Найти число различных вариантов раскраски вершин куба в 2 и 3 цвета.

Решение. Цикловой индекс:

$$P(O : V) = \frac{1}{24} [x_1^8 + 6x_4^2 + 9x_2^4 + 8x_1^2x_3^2]$$

$$\begin{aligned} \#Col(2) &= \frac{2^8 + 6 \cdot 2^2 + 9 \cdot 2^4 + 2^7}{3 \cdot 2^3} = \frac{32 + 3 + 18 + 16}{3} = \\ &= \frac{30 + 3 + 18 + 18}{3} = 10 + 1 + 12 = 23. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \#Col(3) &= \frac{3^8 + 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3^4 + 8 \cdot 3^4}{3 \cdot 8} = \frac{9 \cdot (3^5 + 2 + 27 + 24)}{8} = \\ &= \frac{9 \cdot 296}{8} = 9 \cdot 37 = 333. \end{aligned}$$

Задача ТП-2-1

Сколькими геометрически различными способами три абсолютно одинаковые мухи могут усесться в вершинах правильного семиугольника, нарисованного на листе бумаги?

Решение. Множество T — вершины семиугольника, на которые действует группа $Z_7 = \langle t \rangle$, $t^7 = e$.

$g \in Z_7$	$Type(g)$	$w(g)$	кол-во
e	$\langle 7, 0, \dots \rangle$	x_1^7	1
t, t^2, \dots, t^6	$\langle 0, \dots, 0, 1 \rangle$	x_7	6
Всего			7

Задача ТП-2-1...

Цикловой индекс самодействия Z_7 :

$$P_{Z_7}(x_1, \dots, x_7) = \frac{1}{7} [x_1^7 + 6x_7] = \frac{1}{7} \sum_{d|7} \varphi(d)x_d^{7/d}.$$

Число различных раскрасок в 2 цвета (муха есть/нет), при условии окраски ровно 3 вершин из 7 есть коэффициент u_3 при y^3 после подстановки $x_1 \mapsto y + 1$, $x_7 \mapsto y^7 + 1$ в P_{Z_7} :

$$P(y) = \frac{1}{7} [(y + 1)^7 + 6(y + 1)] = \frac{1}{7} [\dots + C_7^3 y^3 + \dots].$$
$$u_3 = \frac{7!}{7 \cdot 3! \cdot 4!} = \frac{5 \cdot 6}{2 \cdot 3} = 5.$$

Задача ТП-2-2

Боковые грани правильной 6-угольной пирамиды окрашиваются в красный, синий и зелёный цвета.

Определить

- (а) *число различных 2- и 3-цветных пирамид;*
- (б) *число пирамид с одной красной гранью;*
- (в) *число пирамид, у которых не менее трёх красных граней.*

Решение. Имеем транзитивное самодействие Z_6 .

(а) Общее число пирамид.

$$P(Z_6) = \frac{1}{6} \sum_{d|6} \varphi(d) x_d^{6/d} = \frac{1}{6} [x_1^6 + x_2^3 + 2x_3^2 + 2x_6].$$

Задача ТП-2-2...

$$P(Z_6) = \frac{1}{6} [x_1^6 + x_2^3 + 2x_3^2 + 2x_6].$$

$$\#Col(2) = \frac{2^6 + 2^3 + 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2}{2 \cdot 3} = \frac{2 \cdot (16 + 2 + 2 + 1)}{3} = 14.$$

$$\begin{aligned} \#Col(3) &= \frac{3^6 + 3^3 + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{243 + 9 + 6 + 2}{2} = \\ &= \frac{242 + 10 + 6 + 2}{2} = 121 + 5 + 3 + 1 = 130. \end{aligned}$$

Задача ТП-2-2...

(б, в) Число пирамид с 1 и $3 \leq$ красными гранями.

Полагаем $y_1 = y$, $y_2 = y_3 = 1$ (следим только за красными гранями), $x_1 = y + 2$, $x_2 = y^2 + 2$, $x_3 = y^3 + 2$.

$$\begin{aligned} P(y) &= \frac{1}{6} [(y+2)^6 + (y^2+2)^3 + 2(y^3+2)^2 + 2(y^6+2)] = \\ &= \frac{1}{6} [u_0 + u_1y + u_2y^2 + \dots + u_6y^6] = \\ &= \frac{1}{6} [(2^6 + 2^3 + 2^3 + 4) + 6 \cdot 2^5y + (16 \cdot 15 + 2 \cdot 3 \cdot 2^2)y^2 + \dots]. \end{aligned}$$

$$u_0 = 84/6 = 14, \quad u_1 = 2^5 = 32, \quad u_2 = (240+24)/6 = 44.$$

Число пирамид с:

(б) одной красной гранью — $u_1 = 32$,

(в) не менее, чем 3 красными гранями —

$$\#Col(3) - (u_0 + u_1 + u_2) = 130 - (14 + 32 + 44) = 130 - 90 = 40.$$

Задача ТП-2-3

Имеются плоские бусины, окрашенные с одной стороны в красный, синий и зелёный цвета. Из них составляют ожерелья, содержащие по 8 в равноотстоящих точках окружности.

Определить

- а) число различных 3-цветных ожерелий;*
- б) число ожерелий, у которых не менее трёх красных бусин?*

Решение. Здесь везде — транзитивное самодействие циклической группы Z_8 .

$$D(8) = \{1, 2, 4, 8\}, \varphi(1) = \varphi(2) = 1, \varphi(4) = 2, \varphi(8) = 4,$$

$$P(Z_8) = \frac{1}{8} \sum_{d|8} \varphi(d) x_d^{8/d} = \frac{1}{8} [x_1^8 + x_2^4 + 2x_4^2 + 4x_8].$$

Задача ТП-2-3... I

а) Общее число ожерелий:

$$\begin{aligned}\#Col(3) &= \frac{3^8 + 3^4 + 2 \cdot 9 + 4 \cdot 3}{8} = \frac{6561 + 81 + 18 + 12}{8} = \\ &= \frac{6560 + 80 + 32}{8} = 820 + 10 + 4 = 834.\end{aligned}$$

б) Подсчитаем число X ожерелий, в которых число красных бусин не более 3 (т.е. 0, 1 и 2) и вычтем полученное количество из 834.

Полагаем $y_1 = y$, $y_2 = y_3 = 1$ (следим только за бусинами красного цвета).

Найдём коэффициенты u_0, u_1, u_2 при y_0, y_1, y_2 в производящем многочлене W при подстановке $x_k = y^k + 2$, $k = 1, \dots, 8$.

Задача ТП-2-3... II

$$P(Z_8) = \frac{1}{8} [x_1^8 + x_2^4 + 2x_4^2 + 4x_8]$$

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{8} [(y+2)^8 + (y^2+2)^4 + 2(y^4+2)^2 + 4(y^8+2)] = \\ &= u_0 + u_1y + u_2y^2 + \dots + u_8y^8 = \\ &= \frac{1}{2^3} [(2^8 + 2^4 + 2 \cdot 2^2 + 8) + 8 \cdot 2^7y + (C_8^2 \cdot 2^6 + 4 \cdot 2^3)y^2 + \dots]. \\ u_0 &= 2^5 + 2 + 1 + 1 = 36, \quad u_1 = 128, \\ u_2 &= 28 \cdot 8 + 4 = 224 + 4 = 228. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\#Col(3 \leq) = 834 - (36 + 128 + 228) = 834 - 392 = 442.$$

Задача ТП-2-4 I

Грани куба раскрашивают в два цвета — красный и синий.
Сколько существует кубов

- 1) различно окрашенных?
- 2) у которых не менее 4 граней красные ($\#Col(\geq 4)$)?

Решение. Цикловой индекс:

$$P(O : F) = \frac{1}{3 \cdot 2^3} \left[x_1^6 + \underline{6x_1^2x_4} + 3x_1^2x_2^2 + \underline{6x_2^3} + 8x_3^2 \right].$$

$$1) \#Col(2) = \frac{2^6 + 12 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^4 + 2^5}{3 \cdot 2^3} = \frac{2^3 + 12 + 6 + 4}{3} = \frac{30}{3} = 10.$$

$$2) \text{ Полагаем } w(1) = y, w(2) = 1, x_k = y^k + 1, k = \overline{1, 6}.$$

$$W = \frac{1}{24} \left[(y+1)^6 + 6(y+1)^2(y^4+1) + 3(y+1)^2(y^2+1)^2 + 6(y^2+1)^3 + 8(y^3+1)^2 \right].$$

Задача ТП-2-4 II

$\#Col(\geq 4) = u_4 + u_5 + u_6$ — число кубов с 4, 5 и 6 красными гранями соответственно. Очевидно $u_5 = u_6 = 1$.

Раскрывая W , находим:

$$W = \frac{1}{24} [\dots + C_6^4 y^4 + \dots + 6(y^2 + 2y + 1)(\underline{y^4} + 1) + \\ + 3(\underline{y^2} + 2y + 1)(\underline{y^4} + 2\underline{y^2} + 1) + \\ + 6(y^6 + 3\underline{y^4} + 3y^2 + 1) + 8(y^6 + 2y^3 + 1)].$$

Откуда $u_4 = \frac{15 + 6 + 9 + 18}{3 \cdot 8} = \frac{5 + 2 + 3 + 6}{8} = \frac{16}{8} = 2$.

Итого $\#Col(\geq 4) = 1 + 1 + 2 = 4$.

Задача ТП-2-5 I

Для раскраски сторон квадрата на стеклянной пластинке используют 3 цвета — красный, синий и зелёный.

Сколько можно получить

- 1) *разнораскрашенных квадратов?*
- 2) *квадратов с 1 красным ребром и не более 2 синих?*

Решение. Цикловой индекс:

$$P(D_4) = \frac{1}{8} [x_1^4 + 2x_4 + 3x_2^2 + 2x_1^2x_2]$$

$$\begin{aligned} 1) \quad \#Col(3) &= \frac{1}{8} [3^4 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^2 \cdot 3] = \frac{81 + 6 + 27 + 54}{8} = \\ &= \frac{168}{8} = \frac{87 + 81}{8} = 21. \end{aligned}$$

Задача ТП-2-5 II

2) При раскраске в 3 цвета: $x_k = y_1^k + y_2^k + y_3^k$, $k = \overline{1, 4}$.

Следим только за красным (y_1) и синим (y_2) цветами:

$x_k = y_1^k + y_2^k + 1$, $k = \overline{1, 4}$. Находим $u_{10} + u_{11} + u_{12}$.

$$W = \frac{1}{8} [(y_1 + (y_2 + 1))^4 + 2(y_1^4 + y_2^4 + 1) + 3(y_1^2 + (y_2^2 + 1))^2 + 2(y_1 + (y_2 + 1))^2(y_1^2 + y_2^2 + 1)] \boxed{=}$$

нас интересуют только члены с y_1^1 (красное ребро — одно)

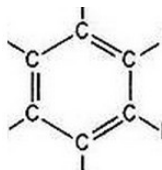
$$\begin{aligned} \boxed{=} & \frac{1}{8} [y_1^4 + 4y_1^3(y_2 + 1) + 6y_1^2(y_2 + 1)^2 + \underline{4y_1(y_2 + 1)^3} + (y_2 + 1) + \dots \\ & \dots + 2(y_1^2 + \underline{2y_1(y_2 + 1)}) + (y_2 + 1)^2(y_1^2 + y_2^2 + 1)] = \\ & = \frac{1}{8} [\dots + 4y_1(y_2 + 1)^3 + 4y_1(y_2 + 1)(y_2^2 + 1)] = \\ & = \frac{1}{8} [\dots + 4y_1(y_2^3 + \underline{3y_2^2 + 3y_2^1 + 1}) + 4y_1(y_2^3 + \underline{y_2 + y_2^2 + 1})] \boxed{=} \end{aligned}$$

Задача ТП-2-5 III

нас интересуют только члены с y_2^0 , y_2^1 и y_2^2 при y_1 (синих рёбер — 0, 1, 2)

$$\boxed{\equiv} \frac{1}{8} [4 \cdot 7 + 4 \cdot 3] = \frac{4 \cdot 10}{8} = 5.$$

Задача ТП-2-6



Присоединяя к свободным связям углерода бензольного кольца атомы водорода H или метил CH_3 , можно получить молекулы разных веществ (ксилол, бензол и др.).

- 1) Сколько химически разных молекул можно получить таким путём?*
- 2) Сколько из них молекул с присоединёнными 0, ..., 6 атомами водорода?*

Задача ТП-2-6... I

Решение. Самодействие группы диэдра D_6 .

1) Имеем $D_6 = \langle t, f, s \rangle$, $t^4 = f^2 = s^2 = e$, $|D_6| = 12$ — группа диэдра порядка 6, где

t — вращение на 60° вокруг центра квадрата;

f — симметрия относительно прямой, проходящей через середины противоположных сторон (3 оси);

s — симметрия относительно прямой, проходящей через противоположные вершин (3 оси).

Пронумеруем последовательно вершины правильного 6-угольника $1, \dots, 6$.

Перестановки ниже указаны для случая, когда ось f проходит через середины сторон (2-3) и (5-6), а ось s — через вершины 1 и 4.

Задача ТП-2-6... II

$g \in D_6$	перестановка	$Type(g)$	$w(g)$	#
e	(1) ... (6)	$\langle 6, 0, \dots, 0 \rangle$	x_1^6	1
t, t^5	(123456)	$\langle 0, \dots, 0, 1 \rangle$	x_6^1	2
t^2, t^4	(135)(246)	$\langle 0, 0, 2, \dots, 0 \rangle$	x_3^2	2
t^3	(14)(25)(36)	$\langle 0, 3, 0, \dots, 0 \rangle$	x_2^3	1
f	(14)(23)(56)	$\langle 0, 3, 0, \dots, 0 \rangle$	x_3^2	3
s	(1)(4)(26)(35)	$\langle 2, 2, 0, \dots \rangle$	$x_1^2 x_2^2$	3
				12

Цикловой индекс: $P(D_6) = \frac{1}{12} [x_1^6 + 2x_6 + 2x_3^2 + 4x_2^3 + 3x_1^2 x_2^2]$.

Всего молекул — подстановка $x_1 = \dots = x_6 = 2$ (H и метил CH_3):

$$M = \frac{64 + 4 + 8 + 32 + 3 \cdot 16}{3 \cdot 4} = \frac{16 + 1 + 2 + 8 + 12}{3} = \frac{39}{3} = 13$$

Задача ТП-2-6... III

2) Число молекул с $0, \dots, 6$ атомами водорода — обозначение $y_1 = H, y_2 = 1$ и подстановка $x_k = H^k + 1, k = \overline{1, 6}$ в P .

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{12} \left[(H+1)^6 + 3(H+1)^2(H^2+1)^2 + 4(H^2+1)^3 + \right. \\ &\quad \left. + 2(H^3+1)^2 + 2(H^6+1) \right] = \\ &= H^6 + H^5 + 3 \cdot H^4 + 3 \cdot H^3 + 3 \cdot H^2 + H + 1. \end{aligned}$$

Итого: молекул с числом атомов водорода (как радикала) — $H = 0, 1, 5$ и 6 — по 1 шт., $H = 2, 3$ и 4 — по 3 шт., всего — 13.

Разделы I

Действие группы на множестве






Применение леммы Бёрнсайда для решения комбинаторных задач

Применение теоремы Пойа для решения комбинаторных задач

Задачи с решениями

Что ещё почитать

Литература I

-  Белов В.В., Воробьев Е.М., Шаталов В.Е. Теория графов. — М.: Высшая школа, 1976.
-  Лидл Р., Пильц Г. Прикладная абстрактная алгебра: Учебное пособие. — Екатеринбург: Изд.-во Урал. ун.-та, 1996.
-  Нефедов В.Н., Осипова В.А. Курс дискретной математики. М.: Изд-во МАИ, 1992.
-  Прикладная комбинаторная математика. Сборник статей / Под. ред. Э.Бэккенбаха. — М.: Изд-во Мир, 1968.
-  Воронин В.П. Дополнительные главы дискретной математики. — М.: ф-т ВМК, 2002.
(<http://padabum.com/d.php?id=10281>)