Методы сэмплирования по важности для задачи оценки надёжности энергетических систем

Самал Кубентаева

Научный руководитель: к.ф.-м.н. Ю. В. Максимов

Москва, 2018

Источники энергии

- Альтернативные источники энергии
- Причины сбоев в электрической сети
- Надежность

Сбалансированная система передачи мощности

- $G = (V, E)$ граф, V вершины, E ребра:

$$\forall a \in V \quad p_a = \sum_{b:\{a,b\}\in E} \beta_{ab}(\theta_a - \theta_b)$$

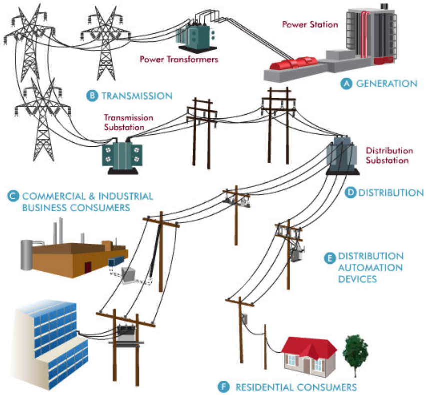
  $p = (p_a | a \in V)$ — вектор мощности потребления или генерации, $\theta = (\theta_a | a \in V)$ — вектор напряжения, B — матрица Лапласа.

- $V = V_c + V_u + V_b$, где V_c-контролируемые, V_u-неконтролируемы, V_b - балансирующие.

$$p_c + p_u + p_b = 0$$

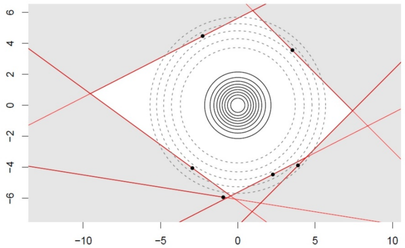
Предположения

- DC модель (линеаризованная модель постоянного тока) H_j – линейные ограничения на сеть.
- Нормальное распределение $\boldsymbol{x} \sim \mathcal{N}(\eta, \Sigma)$



Постановка задачи

- **Дано:** $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$ и $\boldsymbol{x} \sim \mathcal{N}(0, I)$. Многогранник $\mathcal{P} = \cap_{j=1}^{J} H_j$, $H_j = \{\boldsymbol{x}^\mathsf{T}\omega_j \geqslant \tau_j\}$, $H = \cup_{j=1}^{J} H_j = \mathcal{P}^c$, $\tau_j \in \mathbb{R}$, $\omega_j \in \mathbb{R}^d$ и $\omega_j^\mathsf{T}\omega_j = 1$. Множество $\mathcal{P}$ выпукло, $\tau_j > 0$.



- **Найти:** вероятность нахождения $\boldsymbol{x}$ вне многогранника $\mathcal{P}$.

$$\mu = P\left(\boldsymbol{x} \in H\right)$$

- **Решение:** использовать Importance Sampling.

Importance Sampling

- Пусть $X \sim p$ случайная выборка из $\mathbb{R}^d$ и $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$

$$\mu = \mathbf{E} f(X) = \int f(x)p(x)dx$$

- Распределение выборки q: $q > 0$ и $f(x)p(x) \neq 0$, где $X_1, X_2, \dots, X_n \sim q$ — i.i.d., тогда

$$\mu_n^{IS} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n} f(X_i) \frac{p(X_i)}{q(X_i)}$$

- $\mathbf{E}\mu_n^{IS} = \mu, \ \mathbf{Var}(\mu_n^{IS}) = \frac{1}{n}\left(\int \frac{f^2(x)p^2(x)}{q} dx - I^2\right)$

Mixture IS

- Будем сэплить выборку из области редких событий с распределением $q_j \in \{q_1, \dots, q_J\}$ с вероятностью α_j, $\alpha_j > 0$ и $\sum_{j=1}^J \alpha_j = 1$. Тогда

$$q_\alpha(x) = \sum_{j=1}^{J} \alpha_j q_j(x)$$

- $\mu_\alpha = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n \frac{f(X_i)p(X_i)}{q_\alpha(X_i)} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n \frac{f(X_i)p(X_i)}{\sum_{j=1}^J \alpha_j q_j(X_i)}$
- $\mathbf{Var}(\mu_\alpha) = \frac{1}{n} \left(\int \frac{f^2(x)p^2(x)}{\sum_{j=1}^J \alpha_j q_j(x)} dx - \mu^2 \right)$

ALOE

- **Обозначения:** $H_j(x) = \mathbb{I}(x \in H_j)$, $\bar{\mu} = \sum_{j=1}^{J} P_j$, $S(x_i) = \sum_{j=1}^{J} H_j$, $q_j = \frac{p(\mathbf{x})H_j(\mathbf{x})}{P_j}$ условные распределения, где $P_j = P\left(\mathbf{x} \in H_j\right)$.
- Получаем следующую оценку:

$$\mu_{ALOE} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\mathbb{I}(X_i \in H)}{\sum_{j=1}^{J} \alpha_j^{ALOE} P_j^{-1} H_j} = \frac{\bar{\mu}}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{S(X_i)}, \quad X_i \sim q_{\alpha_{ALOE}}$$

- $\alpha_{ALOE} = \frac{P_j}{\sum_{j=1}^{J} P_j}$

ALOE

Теорема

Пусть $\mu_\alpha = \mu_{ALOE}$. *Тогда* $\mathbf{E}\mu_\alpha = \mu$ *и*

$$\mathbf{Var}(\mu_\alpha) = \frac{1}{n}\left(\bar{\mu}\sum_{s=1}^{J}\frac{P(S=s)}{s} - \mu^2\right) \le \frac{\mu(\bar{\mu}-\mu)}{n}$$

Теорема

Пусть $\mu_\alpha = \mu_{ALOE}$, *где* $T_s = P(S=s)$. *Тогда*

$$\mathbf{Var}(\mu_\alpha) \le \frac{\mu^2(J + J^{-1} - 2)}{4n}.$$

Верхняя граница достигается при $S \sim \mathcal{U}(1, J)$

SGD

- Задача в стохастической форме имеет вид:

$$F(\alpha) = n\mathbf{Var}\mu_\alpha + \mu^2 = \int \frac{H_{1:J}(x)p(x)}{\sum_{j=0}^{J} \alpha_j H_j(x) P_j^{-1}} dx =$$

$$= \mathbb{E}_{q_\alpha} \frac{H_{1:J}(x)}{\left(\sum_{j=0}^{J} \alpha_j P_j^{-1} H_j(x)\right)^2} \longrightarrow \min_{\alpha \in S}.$$

- Градиент $\nabla_j F(x) = \mathbb{E}_{q_\alpha} \frac{-\mathrm{I}(x \in H) P_j^{-1} H_j(x)}{\left(\sum_{j=0}^{J} \alpha_j P_j^{-1} H_j(x)\right)^3}$

Frank-Wolfe

Приведем задачу к виду конечных-сумм:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{H_{1:J}(x_i)}{\left(\sum_{j=0}^{J}\alpha_j H_j(x_i)P_j^{-1}\right)^2} \longrightarrow \min_{\alpha\in S}$$

где $S = \{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_J) \mid \forall j \ \alpha_j \geq \varepsilon, \ \sum_{j=1}^{J}\alpha_j = 1\}$

Matpower

Case	N	N_R	J
case1354pegase	1354	260	3464
case2869pegase	2869	510	8146
case9241pegase	9241	1445	29210

Таблица: Matpower cases

где N — количество узлов, N_R — случайные узлы, $J = 2N - 2N_R + 2$ — количество ограничений.

FW vs SGD

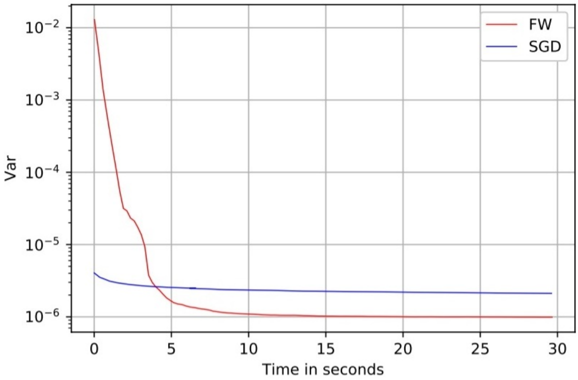


Рис.: case1354pegase

FW vs SGD

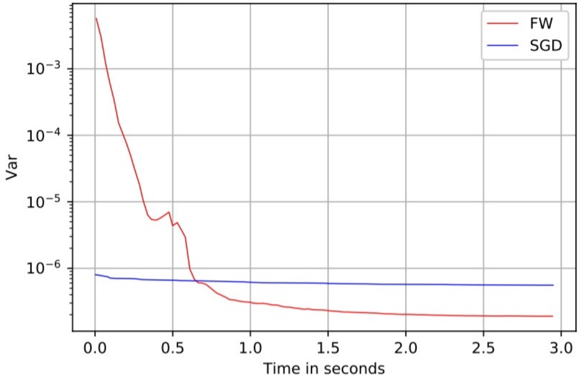


Рис.: case2869pegase

FW vs SGD

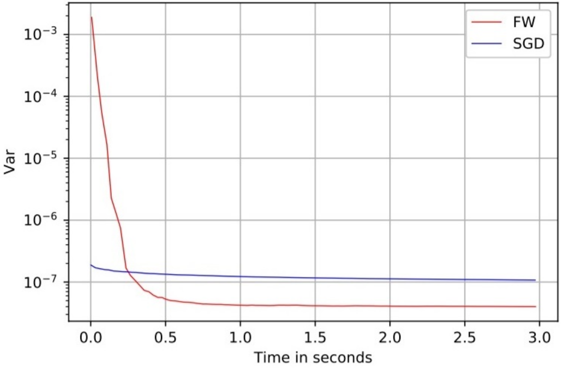


Рис.: case9241pegase

ALOE vs SGD vs FW

100000 выборка			
	μ_α	$\mathbf{Var}\,\mu_\alpha$	$\frac{\sqrt{\mathbf{Var}\,\mu_\alpha}}{\mu_\alpha}$
ALOE	$2.31 \cdot 10^{-4}$	$3.5 \cdot 10^{-13}$	0.003
SGD	$2.30 \cdot 10^{-4}$	$7.2 \cdot 10^{-13}$	0.003
Frank-Wolfe	$2.31 \cdot 10^{-4}$	$1.1 \cdot 10^{-13}$	0.001
Lower bound	$2.30 \cdot 10^{-4}$		
Upper bound	$5.70 \cdot 10^{-4}$		

Таблица: Оценки на реальных данных

Спасибо за внимание!

- A. B. Owen, Y. Maximov, and M. Chertkov,
  "Importance sampling the union of rare events with an application to power systems analysis," arXiv:1710.06965, 2018.
- H. Y. He and A. B. Owen,
  "Optimal mixture weights in multiple importance sampling," arXiv:1411.3954, 2014.
- E. K. Ryu and S. P. Boyd,
  "Adaptive importance sampling via stochastic convex programming," Institute for Computational and Mathematical Engineering, Stanford University, 2015.