ВМК

Семинар 1. Байесовские рассуждения

Курс: Байесовские методы в машинном обучении, 2015

1. В результате медицинского обследования один из тестов выявил у человека серьезное заболевание. Данный тест имеет высокую точность 99% (вероятность позитивного ответа при наличии заболевания 99%, вероятность отрицательного ответа при отсутствии заболевания также 99%). Однако, выявленное заболевание является достаточно редким и встречается только у одного человека на 10000. Вычислить вероятность того, что у обследуемого человека действительно есть выявленное заболевание.

2. Рассмотрим следующую вероятностную модель. Студент на семинаре отвечает плохо (с = 1) или хорошо (с = 0) в зависимости от наличия/отсутствия депрессии (д = 1 или д = 0) и от участия в вечеринке накануне (в = 1 или в = 0). Участие в вечеринке также может приводить к тому, что у студента болит голова (г = 1), а плохой ответ на семинаре влечёт недовольство преподавателя (п = 1). Причинно-следственные связи в модели показаны на рис. 1, а вероятности задаются как:

$p(\text{с} = 1 \mid \text{в}, \text{д})$	в	д
0.999	1	1
0.9	1	0
0.9	0	1
0.01	0	0

$p(\text{г} = 1 \mid \text{в})$	в
0.9	1
0.2	0

$p(\text{п} = 1 \mid \text{с})$	с
0.95	1
0.5	0

$p(\text{в} = 1) = 0.2$
$p(\text{д} = 1) = 0.4$.

Требуется определить $p(\text{в} = 1 \mid \text{г} = 1)$, $p(\text{в} = 1 \mid \text{п} = 1)$ и $p(\text{в} = 1 \mid \text{п} = 1, \text{г} = 1)$.

3. Рассмотрим две независимые случайные величины, распределённые по закону Пуассона: $x_1 \sim \text{Poiss}(\lambda_1)$, $x_2 \sim \text{Poiss}(\lambda_2)$, т.е. $p(x_i = k) = \exp(-\lambda_i)\frac{\lambda_i^k}{k!}, k = 0, 1, 2, \ldots$. Доказать, что $x_1 + x_2 \sim \text{Poiss}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

4. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_N$ – независимая выборка из распределения $\text{Poiss}(\lambda)$. Требуется оценить λ с помощью метода максимального правдоподобия.

5. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_N$ – независимая выборка из распределения $\text{Poiss}(\lambda)$. Требуется найти байесовскую оценку λ как мат.ожидание апостериорного распределения $p(\lambda \mid x_1, \ldots, x_N)$, если в качестве априорного распределения выступает гамма-распределение $p(\lambda) = \mathcal{G}(\lambda \mid a, b) = \frac{b^a}{\Gamma(a)}\lambda^{a-1}\exp(-b\lambda)$, $a, b > 0$.

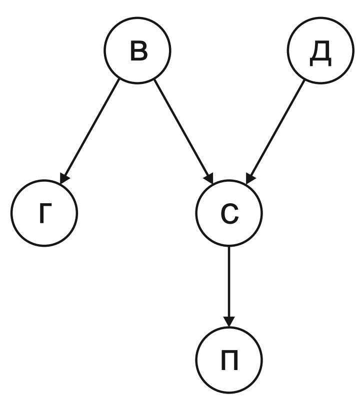

Рис. 1: Причинно-следственные связи для задачи 2