Машинное обучение.
Домашнее задание №11

Задача 1. Пусть $X, A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — невырожденные матрицы. Покажите, что

$$\nabla_X \det AXB = X^{-T} \det AXB.$$

Задача 2. В нормальном дискриминантном анализе возникает задача максимизации правдоподобия

$$\log p(X_y \mid \mu_y, \Sigma_y) = \sum_{i=1}^{m} \log \mathcal{N}(x_i \mid \mu_y, \Sigma_y) \to \max_{\mu_y, \Sigma_y}.$$

Рассмотрим задачу максимизации *взвешенного* правдоподобия:

$$\log p(X_y \mid \mu_y, \Sigma_y) = \sum_{i=1}^{m} w_i \log \mathcal{N}(x_i \mid \mu_y, \Sigma_y) \to \max_{\mu_y, \Sigma_y},$$

где $w_i \geqslant 0$. Найдите ее решение.

Задача 3. Рассмотрим задачу классификации с двумя классами $Y = \{1, 2\}$ и нормальный байесовский классификатор

$$a(x) = \arg\max_{y \in \{1,2\}} p(y) p(x \mid y),$$

в котором плотности классов $p(x \mid y)$ — это многомерные нормальные распределения $\mathcal{N}(\mu_y, \Sigma_y)$. Пусть векторы матожиданий имеют вид $\mu_1 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ и $\mu_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, ковариационные матрицы совпадают и равны $\Sigma = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Априорные вероятности классов равны $p(1) = 1/3$ и $p(2) = 2/3$.

1. Выпишите уравнение разделяющей поверхности классификатора $a(x)$.
2. Найдите собственное разложение матрицы Σ.
3. Перейдите к новым координатам, оси которых совпадают с собственными векторами матрицы Σ.
4. Выпишите уравнение разделяющей поверхности классификатора $a(x)$ в новых координатах.