Структурированное ценообразование для взаимозаменяемых товаров

Николай Савельев

Московский физико-технический институт
Факультет управлени и прикладной математики
Кафедра интеллектуальных систем

Научные руководители д.ф.-м.н. В.В. Стрижов, Ю.В. Дорн

Задача структурированного ценообразования

Мотивация: Установка оптимальной цены на один из взаимозаменяемых товаров с помощью известных методов может обрушить спрос на другие товары, поэтому необходимо искать оптимальную совокупность цен на все товары сразу.

Дано:

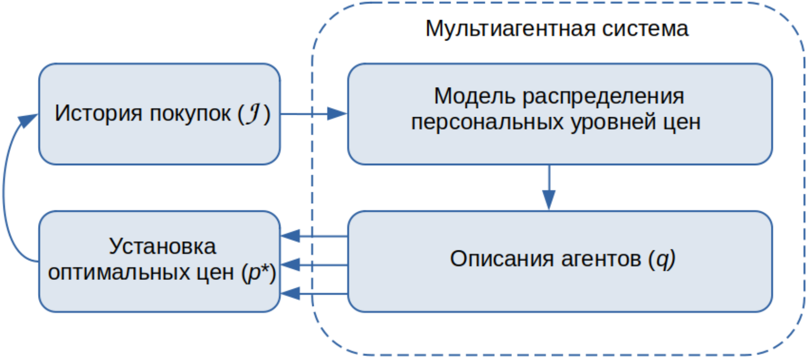
- $\mathcal{B}$ — множество взаимозаменяемых товаров, $|\mathcal{B}| = k$,
- $\mathcal{C}$ — множество клиентов, $|\mathcal{C}| = n$,
- $\{\mathcal{J}_t\}_{t=1}^{\tau}$ — история заказов,

$$\mathcal{J}_t = \{(d_{i,j,t}, p_{i,t})\}, \ i \in \mathcal{B}, \ j \in \mathcal{C},$$

где $d_{i,j,t}$ - количество товара i, купленное пользователем j в момент времени t по цене $p_{i,t}$.

Задача: Максимизировать ожидаемый доход от продажи взаимозаменяемых товаров за период времени T.

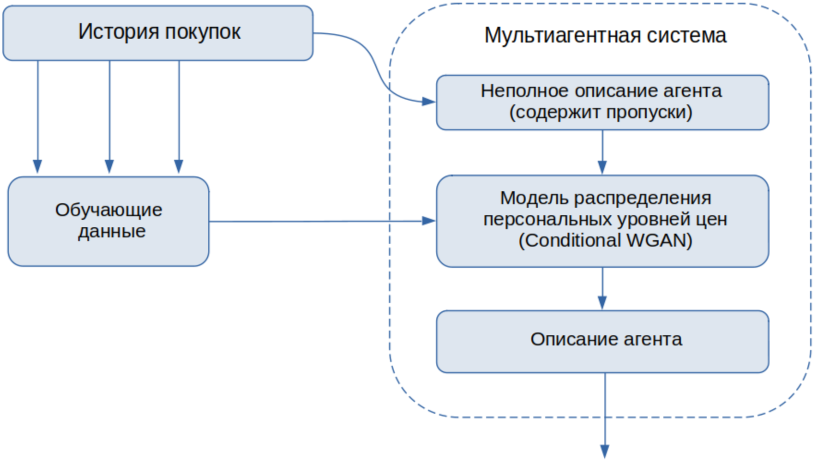
Общая схема решения



Персональный уровень цены агента (private value) - максимальное значение цены товара, при котором возможна покупка этого товара агентом.

Описание агента - вектор $q \in \mathbb{R}^k$ его персональных уровней цен на множество товаров $\mathcal{B}$.

Мультиагентная система



Неполное описание агента - вектор $\hat{q} \in \mathbb{R}^k$:

$$\hat{q}_i = \max\{p_{i,t} : (d_{i,t}, p_{i,t}) \in \{\mathcal{J}_t\}_{t=1}^{T}\}, \quad \max\{\varnothing\} = Null.$$

Максимизация дохода

$Q \in \mathbb{R}_+^{n \times k}$ — матрица описаний n агентов.
Целевая функция дохода $Rev : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$,

$$Rev(p) = \sum_{j=1}^{k} p_j \sum_{i=1}^{n} \mathcal{I}(Q, p, i, j),$$

$$\mathcal{I}(Q, p, i, j) = \begin{cases} 1, \textit{if } \mathcal{S} := \{s : q_{is} \geq p_s\} \neq \emptyset \textit{ and } j = \operatorname*{argmax}_{s \in \mathcal{S}} q_{is}, \\ 0, \textit{otherwise}. \end{cases}$$

Искомый вектор цен является решением оптимизационной задачи

$$Rev(p) \to \max_p .$$

Утверждение (Савельев, 2021). Для любой матрицы $Q \in \mathbb{R}_+^{n \times k}$, найдется такой набор индексов $i_1, \dots i_k$, что вектор $(q_{i_1 1}, \dots, q_{i_k k})^T$ является решением этой оптимизационной задачи.

Упрощение оптимизационной задачи

Процедура clean

1. $q_{i_1 j_1}$ — максимальный элемент матрицы Q. Удаляем все элементы вида $q_{i_1 j} : q_{i_1 j} \le q_{i_1 j_1}$.

2. $q_{i_2 j_2}$ — следующий по убыванию элемент, имеющий другой второй индекс, первый индекс этого элемента тоже будет другой, так как иначе он был бы удален на предыдущем шаге. Удаляем элементы вида $q_{i_2 j} : q_{i_2 j} \le q_{i_2 j_2}$.

3. Повторяем шаг 2 для остальных вторых индексов.

Пример:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 7 & 0 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ & & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} & 5 & \\ 2 & 4 & 6 \\ & & 8 \end{pmatrix}$$

Теоретическое обоснование процедуры clean

Теорема (Савельев, 2021). $Q \in \mathbb{R}_+^{n \times k}$, $n \geq k$. Функция дохода

$$Rev(p) = \sum_{j=1}^{k} p_j \sum_{i=1}^{n} \mathcal{I}(Q, p, i, j),$$

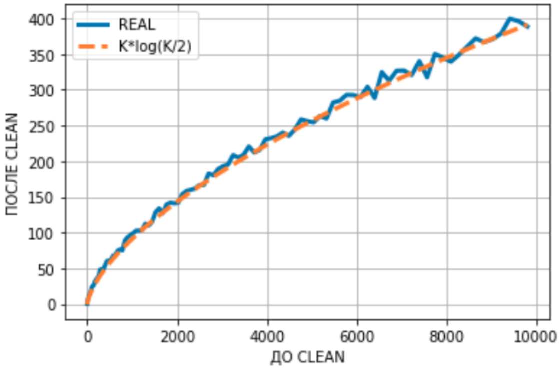
$$\mathcal{I}(Q, p, i, j) = \begin{cases} 1, if\ S := \{s : q_{is} \geq p_s\} \neq \emptyset\ and\ j = arg \max_{s \in S} q_{is} \\ 0, otherwise \end{cases}$$

достигает максимума на векторе вида $(q_{i_1 1}, \ldots, q_{i_k k})^T$, где q_{ij} — элемент матрицы Q, не удаленный процедурой clean.

Следствие (необходимое условие единственности максимума). $Q \in \mathbb{R}_+^{n \times k}$. Для того, чтобы точка максимума функции $Rev(p)$ была единственна, необходимо выполнение неравенства $n \geq k$.

Анализ процедуры clean

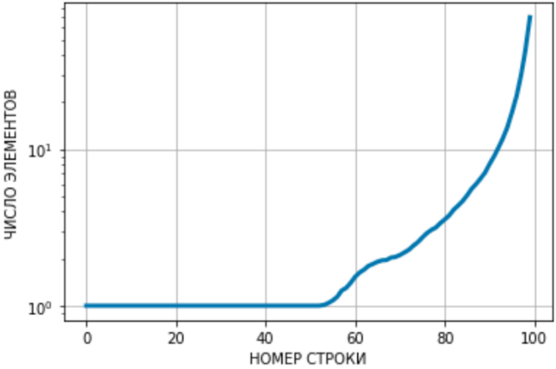
Процедура clean была применена к 2000 квадратных матриц размера от 1 до 100. Элементы матриц — НОРСВ из $U[0,1]$. Среднее число элементов матриц до и после процедуры представлено на графике.



Из изначальных k^2 элементов матрицы в среднем остается только $k\log(k/2)$ элементов.

Анализ процедуры clean

Процедура clean была применена к 100 матрицам размера 100 на 100. Элементы матриц — НОРСВ из $U[0,1]$. Строки матриц были отсортированы по числу оставшихся элементов. Среднее число оставшихся элементов строк представлено на графике.



В большей части строк остался только один элемент $\Rightarrow$ легко определяем большинство компонент оптимального вектора цен.

Выносится на защиту

- Предложен способ построения мультиагентной системы для моделирования поведения клиентов.
- Задача максимизации дохода сведена к задаче дискретной оптимизации.
- Разработана процедура clean, позволяющая существенно упростить решение оптимизационной задачи. Применение процедуры clean теоретически обоснованно.
- Экспериментально исследована работа процедуры clean.